<연재> Ⅱ

『初步者를 爲한 Operations Research 講議』

學會 · 經營指導部長
漢陽大 · 工大講師 田 萬 述

2. 線刑計劃法

리니어 · 프로그래밍(Linear Programming: L.P)이라고 부르며, 이것은 O.R의 手法에서 廣範圍하게 用使되고 있으므로 자칫하면 OR와 全然 別個의 것으로 생각되기 쉽다. L.P은 어디까지나 O.R의 많은 手法중에서 한가지 技法인 것인바 이것은 一定한 資源(例를 들면 生產要素)을 가장 效果的으로 配置하여 最大의 利潤(때로는 最少의 費用)을 얻는데 있다. L.P의 應用은 여러가지 面에서 볼수 있지만 다음과같이 工場의 生產問題에 例를 들어 說明하여 보겠다.

(例) 어떤 工場에 있어서 A, B 2種類의 原料를 각각 2톤, 2.5톤을 所有하고 製品X.Y를를 製造하고 있다. X를 1kg 製造하는데 A를 2톤, B를 1톤 使用하고 Y를 1kg製造하는데 A를 1.5톤 B를 4톤을 必要로 한다. 製品 X 1kg當 利益은 20,000원 Y 1kg當 利益을 30,000원이라 할때 最大의 利益을 얻기위해서는 X.Y의 生產量을 各各 얼마로 決定할것인가?

이와같은 問題는 簡單한 것이지만 工場의 生產 計劃을 樹立하는데 每日 接하게되는 것이므로 우리는 이같은 類型의 더 複雜한 問題를 풀이하는것도 基本原理는 同一한것이므로 本文에서는 說明의 容易性을 爲해서 上記와 같은 簡便한 例題를 擇하였다.

O.R手法의 가장 特徵은 要求하고 있는 答을 얻기위해서 提示된 問題를 一定한 數式으로 바꾸어 數學的理論을 導入하여 解를 얻는데 있다고 하겠다(一般的 數式化는 勿論 一定한 model로 算定될 것임). L.P도 이것의 例外는 될수없다.

따라서 우선 먼저 上記의 例題를 數式化해보도록 한다. 여기서 重要한것은 (가)變數는 무엇인가? (나) 條件式은 어떻게 되는가? (다) 最大로 해야할것은 무엇인가? 라는 것을 決定하는 일이다. 求하고 있는 것은 X.Y 두 製品을 각각 얼마만큼 製造할것인가 하는 것이므로 各各 製造할 量을 $x$kg, $y$kg라하자. 다음에 制約條件은 使用해야할 原料 A, B의 量이 限定되어 있다는 것이며, X의 $x$kg에 대해서 A는 $2x$톤, Y의 $y$kg에 대해서는 1.5톤이 必要하므로 A의 必要量 合計는

$2x+1.5y$톤이 되며, 이것이 $2x+1.5y \leqq 2$이란 制約條件을 滿足시키지 않으면 안된다. 같은 方法으로 B에 대해서도 $x+4y \leqq 2.5$란 條件式이 成立된다. 또한 X.Y를 各各 $x$kg, $y$kg만큼 製造해서 얻는 總利益(Z)는 $2x+3y$(만원)가되고 이것을 最大로 해야한다. 以上을 整理하면,

$$\left.\begin{array}{l} 2x+1.5y \leqq 2 \\ x+4y \leqq 2.5 \end{array}\right\} \text{라는 條件下에서} \cdots\cdots(1)$$

$$Z=2x+3y\cdots\cdots \text{를 最大로 한다. 但 } x \geqq 0,$$

$$y \geqq 0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) 식을 制限式 (2)식을 目的式이라고 부르며 (1)式을 그대로 使用한다는 것은 不等記號를 包含하고 있는 까닭에 不便하므로 이것을 除去하기 위해서 負數아닌 變數(緩和變數, Slack Variables라고 부름)을 다음과 같이 導入하여 (1)式을 等式으로 變形한다.

記號의 簡便性을 爲해서 (1)(2)式에서 x를 x_1, y를 x_2로 바꾸고 緩和變數를 x_3, x_4라고 하면

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1+1.5x_2+x_3=2 \\ x_1+4x_2+x_4=2.5 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$Z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

가 된다.

이것을 푸는데 L·P 手法中에 가장많이 使用되고 있는 씸프렉스表를 利用하여 보고자 한다. 우선 씸프렉스 表로 解를 求하여 놓고 그 過程을 설명하겠다.

段		Cj		0	0	2	3	θ
階	Ci	基	P_0	P_3	P_4	P_1	P_2	
第1段階	0	P_3	2	1	0	2	1.5	1.333
←	0	P_4	2.5	0	1	1	4	0.625
		Zj	0	0	0	0	0	
		Zj-Cj	0	0	0	−2	−3	
第2段階	0	P_3	17/16	1	−3/8	13/8	0	0.66
→	3	P_2	5/8	0	1/4	1/4	1	2.5
		Zj	15/8	0	3/4	3/4	3	
		Zj-Cj	15/8	0	3/4	−10/8	0	
第3段階	2	P_1	17/26	8/13	−3/13	1	0	
	3	P_2	6/13	−2/13	4/13	0	1	
		Zj	35/13	10/13	6/13	2	3	
		Zj−Cj	35/13	10/13	6/13	0	0	

(3)式의 各X의 係數로 Vector로 表示하면

$$P_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ P_2=\begin{bmatrix}1.5\\4\end{bmatrix},$$

$$P_3=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ P_4=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

따라서 (3)式은 다음과 같이 된다.

$$X_1P_1+X_2P_2+X_3P_3+X_4P_4=\begin{bmatrix}2\\2.5\end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서 $x_1 x_2, x_3, \geqq 0$가 되어야 한다.

(5)式의 右項도 $P_0=\begin{bmatrix}2\\2.5\end{bmatrix}$와 같이 Vector로 表示할수가 있다. 이 原理를 利用하여 表로 만든것이 (表1)의 Simplex Tableu(單體表)이다. P_1, P_2, P_3는 構造變數 X_1, X_2, X_3에 對應하는 構造 Vector라하고 P_4, P_5는 緩和變數 X_4 X_5에 對應하는 緩和 Vector라 한다. 또한 制限量을 表示하는 P_0는 條件 Vector라 한다. 이 3가지 Vector形式으로서 (3)式을 表示하면

構造 ←Vecor→		緩和 ←Vector→		條件 ←Vecter→
P_1	P_2	P_3	P_4	P_0
2	1.5	1	0	2
1	4	0	1	2.5

(表 2)

(表 2)와 같은 行列의 形式으로 配列할수 있다. Vector의 加法에 關한 交換法則의 性質을 利用하면 Vector의 列을 任意로 交換할수 있으므로 構造 Vector와 緩和 Vector의 順序를 바꾸고 條和 Vector의 位置도 바꾸어 (表 1)의 第1段階와 같이 놓는다.

이 (表 1)의 基의 列에는 緩和 Vector P_3 P_4가 記入되고 左側의 Ci 欄에는 P_3 P_4의 單位利潤(係數)를 記入한다. 또 Cj欄에는 目的式(4式)의 單位利潤(係數)를 記入한다.

이 表를 보면 緩和 Vector P_3 P_4는 이 表의 部分行列을 形成하여 單位 Vector 즉, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=1$가 되고 있다. 이러한 單位行列(unit matrix)의 Vector를 **A, Charnes**는 基 Vector로 使用하고 있다. (A, Charnes, W, Cooper 著; An Introduction to Linear Programming P 10 참조)

P_3 P_4는 基 Vector이므로 線型計劃에서 最適解를 구한다는것은, 이러한 基 Vector를 찾아 條件式을 滿足시키는 모든 實現可能解를 이 基 Vector로 一意的으로 表示하면서 目的式을 最大 또는 最小로 하는것을 擇하면된다.

(表 1)의 計算過程을 이제부터 說明하여보겠다. Z_j는 現採用方式에 依한 等價利益을 表示하며 C_j는 選擇可能한 方式水準當의 利益을 말하며 $Z_j—C_j$은 比較利益으로써 負값이 나타나지 않는 것이 最適解에 到達하였다는 判定基準이 된다. 모두 3가지 境遇 判定基準이 있으므로 여기서 簡單히 記述하여보면

(1) $Z_j—C_j \geqq 0$인 경우

(2) $Z_j-C_j<0$이고 모든 X_{ij}가 $X_{ij}\leqq 0$인 경우

(3) $Z_j-C_j<0$이고 $X_{ij}>0$인 X_{ij}가 하나라도 있는 경우

(1)은 目的式 Z의 有限의 最大値가 얻어져서 이미 最適段階에 達한 경우다. (2)는 目的式 Z의 値가 無限大가 된다. (3)은 目的式 Z가 最適段階에 이르지 못하고 보다큰 目的函

數인 値를 求하여야만 하는 境遇다. 그러므로 $Z_j-C_j\geqq 0$을 Simplex判定基準(Simplex Criterion)이라한다.

<計算順序>

(1) Z_j값을 計算하여 Z_j行의 란에 記入한다. Z_j의 計算은 最左側 C_i列의 값 다시 말하면 P_3, P_4의 係數(지금의 경우 모두 0)를 各各 ·ㅣ에 있는 數字와 곱하여 합친것을 Z_j行의 第1列 즉 P_0列과 Z_j行이 사귀는 곳에 記入하고 또 이들 係數를 各各 P_3列의 對應行에 있는 數字와 곱하여 합친것을 P_3列과 Z_j行이 사귀는 란에 記入한다. 이와같은 方法을 P_4, P_1, P_2列까지 되풀이하면 된다.

(2) Z_j-C_j行을 記入한다.
Z_j값에서 最上行의 C_j의 값을 뺀것을 Z_j-C_j의 行에다 記入하면 된다.

(3) Z_j-C_j行에서 陰의 數値中에서 絶對値가 最大인것은 選擇하여 그 列에다가 굵은줄(太)을 두른다.

(Simplex判定基準에 따른것임)

絶對値가 큰쪽을 택한것은 X, Y 두 제품중에서 製品을 生産하지 않기 때문에 單位當損失이 −2, −3이므로 利潤의 最大化를 위해서는 Most negative인 −3에 該當되는 Y製品을 生産할시는 單位 利潤이 3이라는 比率로 利潤을 올릴수있다. 따라서 優先的이고 重點的인 生産으로 우선製品을 生産한다.

그러나 總利潤을 最大로 하기 위하여서는 單位利益과 더불어 生産可能量을 함께 생각하지 않으면 아니된다, 그것은 生産要素 즉 投入物에 使用限度가 있는 까닭이다. 따라서 다음의 問題는 製品 Y만을 生産한 경우 最大限度 얼마만큼 만들수 있는가하는 것이다. A原料의 制約만을 생각하면 2÷1.5=1.33, B原料만을 생각하면은 2.5÷4=0.625이므로 前者 1.33의 制約을 더받게되므로 Y製品을 生産할시에는 B原料 0.625比率에 기준을 두어야 한다. 이것이 θ의 값이다.

(4) θ를 計算한따.

順序(3)에서 太線으로 두른 列의 數字(Z_j-C_j行은 除外하고서)中에서 陽의 것만을 取하여 이것에 對應하는 P_0列의 數字를 나누어 그 商을 各各 θ列에 記入한다.

(5) θ列中에서 最小의 陽의 것을 擇하여 그 行을 太線으로서 두른다.

이렇게하여 그行의 左側에 左向의 화살表를 둔다.

(6) 第二段階의 基및 그의利益係數를 記入한다. 따라서 第一段階에서 基는 P_4代身에 P_2가 새로 들어온 셈이므로 P_2의 左側에서 右向의 화살표을 하여둔다.

第一段階의P_4의 對應個所에 P_2를 記入하고 그 左側에 P_2의 係數 3을 쓴다. 그리고 P_3는 그대로 自己자리에 둔다.

(7) 第二段階의 P_3, P_2 Z_j-C_j行을 計算하여 記入한다. 여기서 第一段階의 P_4를 追放變數, 第二段階의 P_2를 新入變數라 함.

(a) 新入變數(P_2)行의 計算

→÷ ↓ ↑ θ

←	0	P_4	2.5	0	1	1	4	0.625	→P_4

2.50÷41÷41÷44÷4
÷4

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

3	P_2	5/8	0	1/4	1/4	1		→P_2

(b) 第二段階에서 P_3의 計算

→(−) ↓ θ

0	P_3	2	1	0	2	1.5	1.333	→第一段階의 P_3行

(×)

3	P_2	5/8	0	1/4	1/4	1		→第二段階의 P_2行

(2−1.5×5/8), (1−1.5+0) (0−1.5×1/4), (2−1.5×1/4), (1.5−1.5×1)

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

0	P_3	17/16	1	3/8	13/8	0		→第三段階의 P_3行

(C) 第二段階에서의 Z_j-C_j行의 計算

C_j列과 C_i을 곱하여 合하면 Z_j가되므로 Z_j에서 C_j를 차례로 減하면 Z_j-C_j가 된다.

(8) 다음에는 上述한 順序를 되풀이하여 Z_j-C_j行에 陰의 數字가 없으면 最適解가되고 計算은 完了된다.

이상의 順序에 따라 (表 1)의 Z_j-C_j 의 數値를 보면 第一段階에서는 Z_j-C_j가 陰에서 始作하여 第三段階에서는 $Z_j-C_j\geqq 0$ 일때 비로서 最適解

$P_1=17/26$(X製品) } 最大利益$=35/13$
$P_2=6/13$(Y製品) } (Z_j-C_j)

$P_3=0$(原料 A) } A, B는 餘分없이
$P_4=0$(原料 B) } 모두 使用됨.

(第二編終)

<Q.C 格言>

"品質은 設計와 工程에서 形成되는것이지 檢査에依해서 만들어 지는것이 아니다"