Spectral Theory에 있어서의 諸問題

盧 載 喆

Ⅰ. Spectral Theory는 函數解析의 一分枝로써 operator theory에 基盤을 둔 學問이다. 數學的인 興味와 價値는 物理, 化學, 工學理論에 있어서 其比重이 커짐에 뒷바침을 받아 1960年 以後 硏究가 매우 活潑해지고, 많은 論文들이 쏟아져 나왔으나, 아직 未解決問題가 많고 spectrum의 定義도 古典的인 것과 새로운 것이 있고 그 사이의 關係도 硏究對象으로써 새 論文들이 나오고 있다. 著者는 1868年 10月 學會에서 이 方面에 뜻하는 會員을 爲해 그 基本槪念에서부터 理論의 方向, 著者가 計算한 結果, 그리고 未解決問題들을 約 한 時間 동안에 걸쳐 綜合報告을 한 바가 있다. 여기서는 앞으로 硏究對象이 될 수 있는 問題를 中心으로 前者의 note를 要約해 보고저 한다.

Ⅱ. (1) operator T를 semi-normal, 即

$$TT^* - T^*T = D, \qquad (D \geq 0 \text{ or } D \leq 0)$$

이고 Cartesian representation

$$T = H + iJ, \quad \text{단 } H = \frac{1}{2}(T + T^*), \quad H = \frac{1}{2i}(T - T^*)$$

을 滿足할 경우 다음과 같은 性質이 있다.

(i) $x_0 \in \sigma(H)$이면 real number y_0'와 unit vector의 sequence $\{h_n\}$가 存在해서

$$(H - x_0 I)h_n \to 0, \qquad (J - y_0' I)h_n \to 0$$

가 되고 따라서 $x_0 + iy_0' \in \sigma(T)$가 成立한다.

또 $y_0 \in \sigma(J)$이면, real number x_0'와 unit vector의 sequence $\{j_n\}$가 存在해서

$$(H - x_0' I)j_n \to 0, \quad (J - y_0 I)j_n \to 0$$

가되고 따라서 $x_0' + iy_0 \in \sigma(T)$가 成立한다.

萬一 x_0, y_0가 real이고 $x_0 + iy_0 \in \sigma(T)$이면 $x_0 \in \sigma(H)$, $y_0 \in \sigma(J)$가 成立한다.

(2) operator T가 semi-normal이고 모든 θ에 對해서

$$M\|D\| \leq \int M_\theta d_x$$

$$M_{(x)} = \begin{cases} snpI_x(z) - iufI_x(z), & if\ z \in \sigma(T),\ x \in R_e(z) \\ 0 & ,\ if\ x \notin R_e(z) \end{cases}$$

단 $T_\theta = e^{i\theta}T$, $M_{\theta(x)}$는 T_θ에 對應하는 $M_{(x)}$을 意味한다. $(M_{\theta(x)} = M_{(x)})$

이 경우 $\Pi\|D\| \leq \mu_2(\sigma(T))$ (μ_2는 二次元 measure) 가 成立한다.

Open Question: 위의 不等式 이 모든 semi-normal operator 에 對해서 成立하는가?

이 質問은 任意의 方向 θ 上에 spectrum 이 measure 0가 되지 않을 경우에 $\Pi\|D\| \leq \mu_2(\sigma(T))$가 成立하는데 任意의 semi-normal operator 에 對해서 그것이 0가 되지 않을 수 있는가 하는 問題에 歸着이 된다.

(See Trans. A.M.S. 1965 Vol. 119 No. 3)

Ⅲ. N. Dunford 의 spectral mapping theorem

$$\sigma[f(T)] = f(\sigma(T)), \qquad f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\zeta)}{\zeta - T}\, d\zeta$$

의 擴張인 定理로써 다음과 같은 것이 있다.

$$\sigma[f(T_1, T_2, \cdots\cdots, T_N)] = f(\prod_{k=1}^{N} \sigma(T_k))$$

(See Dongguk Journal, Natural Science, Vol. Ⅲ, Ⅳ, 1967)

단 $$f(T_1, T_2, \cdots\cdots, T_N) = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{C_1}\int_{C_2}\cdots\cdots\int_{C_N} f(\zeta_1, \cdots\zeta_N) R_\zeta(T_1)\cdots \cdots\cdots R_{\zeta N}(T_N)\, d\zeta_1\cdots\cdots d\zeta_N$$

Open Question: 이것이 Banach algebra R에서 spectrum 의 定義에서 成立할 수 있는가?

卽 $\mathfrak{m}$을 R의 모든 maximal ideal 이라 할 경우

$$\sigma(a) = \{\lambda : a(M) = \lambda,\ M \in \mathfrak{m}\}$$

는 $a \in R$의 spectrum 이다. 이 때

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)(\zeta_e - a)^{-1} d\zeta \quad \text{이라고 定義하면}$$

$$\sigma[f(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_N)] = \{\mu \mid \mu = f(\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots, \lambda_N),\ \lambda_i \in \sigma(a_i)\}$$

가 成立하는가?

단

$$f(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n) = \frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{c_1}\int_{c_2}\cdots\cdots\int_{cN} f(\zeta_1, \cdots\cdots \zeta_N)(\zeta_1 e - a_1)^{-1}\cdots\cdots$$
$$\cdots(\xi_N e - a_N)^{-1})d\zeta_1\, d\zeta_2 \cdots\cdots d\zeta_N.$$

IV A, B 를 Banach space X 위에서 define 된 commuting scalar operators 이고 $B=\sum_{i=1}^{n} z_i E_i$, $E_iE_j=0$ $(i \neq j)$ $E_i^2=E_i$, $\sum_{i=1}^{n} E_i = I$ 이면 $A \cdot B$ 는 scalar operator 이다.

Theorom: n 가 positive integer, S 가 Banach space X 上에 있어서 invertible scalar operator 이고 $T^n = S$ 가 成立하면 T 는 scalar operator 이다.

Theorom: n 가 positive integer, S 를 Banach space X 上에서의 invertible operator 인 경우 $T^n = S$ 이면 T 는 spectral operator 가 된다.

(See Proc. A.M.S. Vol. No. 5 Oct. 1962)

Open Question: $p(T)$ 가 operator 의 polynomial 일 경우

(i) S 가 invertible scalar operator 이고 $p(T) = S$ 이면 T 는 scalar operator 가 될 수 있는가?

(ii) S 가 invertible spectral operator 이고 $p(T) = S$ 이면 T 는 spectral operator 가 될 수 있는가?

V. space X 를 separated, complex locally convex space 이고 quasi-complete, barreled 이라 하고 하자.

X' 을 X 의 dual space, $\mathcal{L}(X)$ 를 X 에서 X 內로의 continuous linear transformation 이라 하고, C 를 field of complex plane C 의 one point compactification 이라 한다. 이 때 $\lambda \in C$ 가 resolvent set $\rho(T)$ 에 屬할 必要充分條件은 다음 條件을 滿足하는 λ 의 neiborhood V_λ 가 存在할 것이다. 即

(i) $V_\lambda \cap C \to \mathcal{L}(X)$ 인 mapping 이 存在하여 $M \in V_\lambda \cap C$ 에 對해서

(ii) $R_\mu(\mu I - T) = (\mu I - T)R_\mu$

(iii) $\{R_\mu : \mu \in V_\lambda \cap C\}$ 는 $\mathcal{L}(X)$ 에서 bounded spectrum $\sigma(T)$ 를

$$\sigma(T) = C - \rho(T)$$

로 定義한다.

古典的인 spectrum 의 定義는 다음과 같다.

$\lambda \in \rho(T)$, $T \in \mathcal{L}(X)$ iff $(\lambda I - T)^{-1}$ exist as an everywhere defined continuous operator on E. 또 $\sigma(T) = C - \rho(T)$.

Open Question: 이 두 definition이 equivalent가 될 必要充分條件은 무엇인가?

VI. 다음 問題는 著者가 어떤 部分에 對해서는 性格을 究明한 것이지만은 좀더 다른 方向에서 硏究할 餘地가 있는 것 같아서 提示한 問題이다.

X를 Banach space이라고 하면, Cartesian product $X\times X\times X\cdots\times X$는 適當한 norm을 줌으로써 Banach space가 된다.

$T_k\in B(X, X)$, $k=1, 2, \cdots\cdots, N$에 對해서 $\xi I-T$의 domain을 $D(\xi I-T_k)\equiv D_{T_k}(\xi)$, 그 range를 $R(\xi I-T_k)\equiv\Delta_{T_k}(\xi)$이라 두면

$$D((\xi I-T_k)^{-1}=\Delta_{T_k}(\xi),\ R((\xi I-T_k)^{-1})=D_{T_k}(\xi)$$

가 된다. 단 ξ는 T의 resolvent set의 任意의 element이다.

Generalized Dunford Integral $f(T_1, T_2, \cdots\cdots, T_N)$에 對해서

$$f(T_1, T_2, \cdots\cdots, T_N)(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_N)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^N}\int_{C_1}\int_{C_2}\cdots\cdots\int_{C_N}f(\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_N)[R_1(T_1)X_1]\cdots\cdots[R_{\xi N}(T_N)X_n]\,d\xi_1 d\xi_2\cdots\cdots d\xi_N$$

로 定義하면, 이 operator는

$$f(T_1, T_2, \cdots\cdots, T_N):\prod_{k=1}^{N}\Delta_{T_K}(\xi_k)\to X$$

인 multilinear transformation이라고 볼 수 있다. 이 경우 set를

$$A[\prod_{k=1}^{N}\Delta_k(T_k),\ X]=\{f(T_1, T_2, \cdots\cdots, T_N):\prod_{k=1}^{N}\Delta_k(T_k)\to X\}$$

로써 定義하면 이 set는 어떤 代數的, 位相的 構造를 가지겠는가?

(See *Some properties of an operator set* $A[\prod_{k=1}^{N}\Delta_k(T_k),\ X]$ 著者의 lecture note in K.M.S., Oct. 1968)

以上의 問題들은 서로 連關性이 密接한 것도 있고, 比較的 獨立的인 것도 있으나, 其 問題를 解決하기 爲해서 各 論文은 勿論이지만 좀더 基本的인 文獻들을 들어 보면 大略 다음과 같다.

References

1. J. G. Stampfli; *On Eigenvalues for seminormal operators,* Trans. A.M.S., 1965 Vol. 119, No. 3.
2. J. G. Stampfli: *Roots of scalar operators,* Proc. A.M.S., Vol. 13. No. 5, Oct. 1962.
3. K. K. Oberai: *Spectrum of a spectral operator operator* Proc. A.M.S., Vol. 19, No. 2, April, 1968.
4. K. K. Oberai: *Sum and product of commuting spectral operators,* Pacific Journal of Math. Vol. 25, No. 1, April, 1968.
5. J. C. Rho: *Generalized spectral mapping theorem,* Dongguk Journal, Vol. Ⅲ, Ⅳ. Natural Science, dec. 1967.
6. K. Yosida: *Functional Analysis,* Newyork Academic Press. Inc., 1965.
7. N. Dunford, J. Schwartz: *Linear operators Part* Ⅱ.

西 江 大 學