複素多樣體와 接觸多樣體

嚴 相 燮

§1. 複素多樣體

$2n+2$ 次元微分可能多樣體 K_{2n+2} 가

$$F^2 = -E \qquad (F_\lambda{}^\mu F_\mu{}^\nu = -\delta_\lambda{}^\nu), \quad (\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots, = 1, 2, \cdots\cdots, 2n+2)$$

인 槪複素構造 F 를 가질 때 K_{n+2} 를 $2n+2$ 次元 槪複素多樣體라 한다. 槪複素多樣體 K_{2n+2} 에 $G = FGF^t$ 인 Riemann 計量 $G = (G_{\lambda\mu})$ 가 導入되었을 때 이 K_{2n+2} 를 槪 Hermite 多樣體라고 한다. 또 이 槪 Hermite 多樣體 K_{2n+2} 에 있어서 局所座標系를 (x^λ) 라 할 때

$$d\Theta = 0, \quad (\Theta = F_{\mu\lambda} dx^\mu \wedge dx^\lambda)$$

이면 이 K_{2n+2} 를 槪 Kaehler 多樣體라고 한다.

또 槪複素多樣體 K_{2n+2} 에 있어서 Nijenhuis tensor N 이 零일 때 이 K_{2n+2} 를 複素多樣體라고 한다.

以上의 關係를 表로 나타내면 다음과 같다. [Y.Tashiro][*]

$$\begin{tikzcd}
K_{2n+2}\,(2n+2)\text{-dimensional diffentiable manifold)} \arrow[rr, "(\exists\Theta\,;\,d\Theta=0)"] \arrow[d, "(\exists F)"'] & & \text{Symplectic} \arrow[d, "(\exists G)"] \\
\text{almost complex} \arrow[r, "(\exists G)"] \arrow[d, "(N=0)"'] & \text{almost Hermitian} \arrow[r, "(d\Theta=0)"] \arrow[d] & \text{atmost Kaehlerian} \arrow[d] \\
\text{complex} \arrow[r] & \text{Hermitian} \arrow[r] & \text{Kaehlerian.}
\end{tikzcd}$$

§2. 接觸多樣體

$2n+1$ 次元 微分可能多樣體 M_{2n+1} 에 있어서 $(1, 1)$ - 型 tensor field $f=(f_i{}^h)$ $(i, j, k, \cdots\cdots = 1, 2, \cdots\cdots, 2n+1)$ 와 covariant vector field $\eta = (\eta_i)$, contravariant vector field $\xi = (\xi^i)$ 가 있어서

(*) [ ] 안은 末尾의 參考文獻을 말한다.

$$\operatorname{rank} f=2n,\quad f^2-\eta\xi=-E \qquad (f_j{}^i f_i{}^h-\eta_j\xi^h=-\delta_j^h)$$

$$f\eta=0 \qquad (f_i{}^h\eta_h=0), \qquad \xi f=0 \qquad (\xi^i f_i{}^h=0)$$

$$\eta\xi=E \qquad (\eta_i\xi^i=1)$$

일 때 $(f_i{}^h,\ \eta_i,\ \xi^h)$를 槪接觸構造라고 하며 簡單히 $(f,\ \eta,\ \xi)$-構造라고도 한다. [S. Sasaki (1)]

여기에서

$$f=(f_B{}^A)=\begin{pmatrix} f_i{}^h & f_i{}^\infty \\ f_\infty{}^h & 0 \end{pmatrix}, \qquad f_i{}^\infty=\eta_i, \qquad f_\infty{}^i=\xi^i$$

$$(A,\ B,\ C,\cdots\cdots=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 2n+1,\ \infty)$$

이라 놓으면 위의 關係는

$$f^2=-E, \qquad (f_C{}^B f_B{}^A=-\delta_C^A)$$

로 된다. 위의 M_{2n+1}가 이러한 槪接觸構造 f를 가질 때 M_{2n+1}을 槪接觸多様樣라고 하며 이 槪接觸多樣體 M_{2n+1}에

$$g=fgf^t, \qquad g=(g_{CB})=\begin{pmatrix} g_{ji} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

인 Riemann 計量 g가 導入되었을 때 이 M_{2n+1}을 槪 Gray 多樣體라고 한다.

또 이 槪 Gray 多樣體 M_{2n+1}에 있어서

$$\theta_1=f_{i\infty}dy^i, \qquad \theta_2=f_{ji}\,dy^j\wedge dy^i$$

$$((y^i)\text{는 } M_{2n+1}\text{에 있어서의 局所座標系})$$

인 1-form과 2-form에 對하여 $\theta_2=d\theta_1$일 때 이 M_{2n+1}을 槪 Sasaki 多樣體라고 한다.

또 槪接觸多樣體 M_{2n+1}에 있어서 Nijenhuis c-tensor n이 零일 때 이 M_{2n+1}을 正規槪接觸多樣體라고 한다.

以上의 關係를 表로 나타내면 다음과 같다. [Y. Tashiro]

$$\begin{tikzcd}
M_{2n+1}\left(\begin{array}{l}2n+1-\text{dimensional}\\ \text{differentiable manifold}\end{array}\right) \arrow[rr, "(\exists\theta_1,\theta_2\,:\,\theta_2=d\theta_1)"] \arrow[d, "(\exists f)"'] & & \text{contact} \arrow[d, "(\exists g)"] \\
\text{almost contact} \arrow[r, "(\exists g)"] \arrow[d, "(n=0)"'] & \text{almost Grayan} \arrow[r, "(\theta_2=d\theta_1)"] \arrow[d] & \text{almost Sasakian} \arrow[d] \\
\text{normal almost contact} \arrow[r] & \text{Grayan} \arrow[r] & \text{Sasakian}
\end{tikzcd}$$

J. W. Gray는 $\theta_1\wedge\theta_2{}^n\neq 0$인 1-form θ_1, 2-form θ_2가 주어지는 微分可

能多樣體 M_{2n+1} 에 있어서는 M_{2n+1} 에 概接觸構造를 導入할 수 있음을 보였다. [J. W. Gray]

위의 概接觸多樣體에 있어서의 (f, η, ξ)-構造에 對하여 Riemann 計量 g 를 합쳐서 概 Gray 空間에 있어서의 構造를 (f, η, ξ, g)-構造라고도 한다. [S. Sasaki (1)] 또

$$\eta = \eta_i\, dy^i, \qquad d\eta = \frac{1}{2} f_{ji}\, dy^j \wedge dy^i$$

일 때 위의 rank $f = 2n$ 일 條件은 $(dy)^n \neq 0$ 일 條件과 恒等이다. [E. Cartan]

또 S. Sasaki 는 그의 論文 (1)에 있어서 概接觸構造를 가지는 多樣體 M_{2n+1} 에 있어서는

$$f_{ji} = \partial_j \eta_i - \partial_i \eta_j, \quad \theta_2 = f_{ji} dy^j \wedge dy^i, \quad \theta_1 = \eta_i dy^i$$

이면 $\theta_2 = d\theta_1$ 로 되는 (f, η, ξ, g)-構造를 恒常 導入할 수 있다는 것을 論하였다. [S. Sasaki (1), THEOREM (4)]

§3. 超曲面, 部分多樣體

【1】 複素 및 概複素多樣體 K_{2n+2} 에 있어서의 超曲面으로서의 概接觸多樣體 M_{2n+1}.

(i) K_{2n+2} 에 있어서의 概複素構造 $F_A{}^B$:

$$F_A{}^B = (F_i{}^j,\ F_\infty{}^j,\ F_i{}^\infty,\ F_\infty{}^\infty)$$

에 對하여

$$F_i{}^j = f_i{}^j, \ \ F_\infty{}^j = \xi^j, \ \ F_i{}^\infty = -\eta_i, \ \ F_\infty{}^\infty = 0$$

이라 놓으면 이 $f_i{}^j$, η_i, ξ^j 等은 한 (f, η, ξ)-構造를 이룬다. [S. Sasaki and Y. Hatakeyama]

(ii) 微分可能多樣體 M_{2n} 에 있어서 $f^3 + f = 0$ 의 條件을 滿足하는 한 tensor field f 가 存在하면 $l = -f^2$, $m = f^2 + 1$ 인 distribution 이 可能하고 이 때 rank $f = 2n$ 이면, $f^2 = -1$ 이 되어서 f 는 概複素構造를 이루고 이 f 構造가 (partially) 積分可能일 條件은 Haantjes 의 tensor 가 零일 것이다.

또 rank $f = 2n - 1$ 이면 $m_i{}^h = v_i u^h$ 로 分解되고 이 때는 한 概接觸인

(f, v, u) - 構造가 存在한다. [K. Yano (1)]

(iii) 槪 Hermite 多樣體 $K_{2n+2}(F_\nu{}^\mu, G_{\nu\mu})$ 의 局所座標系를 (x^λ)라 하고 이 多樣體 K_{2n+2} 의 超曲面을 M_{2n+1}(局所座標系 (y^i))이라 할 때

$$B_i{}^\lambda = \partial_i x^\lambda \quad (\partial_i = \partial/\partial y^i)$$

이라 놓고 $B = (B_B{}^\kappa) = \begin{pmatrix} B_i{}^\kappa \\ C^\kappa \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = (B^A{}_\kappa) = (B^i{}_\kappa, C_\kappa)$

라 할 때

$$f = BFB^{-1}, \qquad g = BGB^t$$

에 依하여 tensor f, g를 導入하면 이들은 槪 Hermite 多樣體 K_{2n+2}의 超曲面인 M_{2n+1}에 있어서의 한 槪 Gray 인 $(f_i{}^j, f_i, f^j, g_{ji})$ - 構造를 이룬다. [Y. Tashiro]

(iv) 위의 (iii)에서의 槪 Hermite 多樣體 $K_{2n+2}(F_\nu{}^\mu, G_{\nu\mu})$의 超曲面 M_{2n+1}을 생각하여

$$F_\nu{}^\rho B_i{}^\nu = f_i{}^j B_j{}^\rho + f_i C^\rho, \quad F_\nu{}^\rho C^\nu = -f^i B_i{}^\rho$$

및 $g = BGB^t$에 依하여 tensor f, g를 導入하면 이들은 또한 槪 Hermite 多樣體 K_{2n+2}의 超曲面 M_{2n+1}에 있어서의 한 槪 Gray 인 $(f_i{}^j, f_i, f^j, g_{ji})$ - 構造를 이룬다. [K. Yano and S. Ishihara (1)]

【2】槪複素多樣體 K_{2n+2}의 部分多樣體로서의 槪複素多樣體 K_{2n}.

槪複素多樣體 $K_{2n+2}(F_\nu{}^\mu)$의 局所座標系를 (x^λ) 라 하고 K_{2n+2}의 $2n$-次元部分多樣體 $K_{2n}('F_a{}^b)$ 局所座標系 (ξ^a))에

$$F_\lambda{}^\rho B_a{}^\lambda = 'F_a{}^b B_b{}^\rho, \qquad (B_a{}^\lambda = \partial_a x^\lambda, \ \partial_a = \partial/\partial\xi^a)$$

에 의하여 한 tensor $'F$를 導入하면 $'F^2 = -I$이 되어서 K_{2n} 또한 한 槪複素多樣體로 된다. [K. Yano (2)]

【3】槪接觸多樣體 M_{2n+1}에 있어서의 超曲面으로서의 槪複素多樣體 K_{2n}.

筆者는 1965年에 다음의 方法에 依하여, 槪接觸多樣體의 超曲面에 槪複素構造를 導入할 수 있음을 發表하였다. [S. S. Eum (1)]

槪接觸多樣體 $M_{2n+1}(f_i{}^j, f_i, f^j)$의 局所座標系를 (y^i)라 하고 그 超曲面 K_{2n}을 생각하여 K_{2n}의 局所座標系를 ξ^a, $B_a{}^i = \partial_a y^i$ $(\partial_a = \partial/\partial\xi^a)$, M_{2n+1}에 있어서 K_{2n}에 normal인 單位 vector를 C^i라 할 때

$$f_i{}^j B_a{}^i = \varphi_a{}^b B_b{}^j, \qquad f^i = C^i$$

에 依하여 tensor φ를 導入하면 distribution $(B_a{}^i, C^i = f^i)$이 完全積分可能일

條件下에서 $\varphi^2=-I$이 되어서 φ는 M_{2n+1}의 超曲面인 K_{2n}에 있어서의 한 槪複素構造를 이룬다. [S. S. Eum (2)] 그리고 이 때 M_{2n+1}의 特性에 依하여 K_{2n}의 性格이 다음과 같이 決定된다.

M_{2n+1}		K_{2n}
Gray 多様體	$\longrightarrow$	Hermite 多様體
$f_i{}^j$가 Killing tensor	$\longrightarrow$	槪 K 多様體
條件(1.22)	$\longrightarrow$	O^*- 多様體
條件(1.24)	$\longrightarrow$	槪 Kaehler 多様體

그러나 이 때 注目할 事實은槪 Sasaki 多様體인 M_{2n+1}에는 筆者의 方法으로서는 槪 Hermite 多様體인 超曲面 K_{2n}을 導入할 수 없다는 것이다. [S. S. Eum (1)]

또 위의 [1]의 (iii), K. Yano and S. Ishihara의 方法에 依하여 槪複素多様體 K_{2n+2}에 그 超曲面인 超接觸多様體 M_{2n+1}을 導入하고 이 M_{2n+1}에 [3], 筆者의 方法에 依하여 그 超曲面인 槪複素多様體 K_{2n}을 導入하면 이 K_{2n}은 위의 K_{2n+2}의 한 槪複素部分多様體이다. 이렇게 導入된 部分多様體 K_{2n}을 [2], K. Yano의 方法에 依하여 K_{2n+2}에서 誘導된 槪複素部分多様體와 比較할 때 注目해야 할 事實은 그 接續(connection)들의 內包關係인 것이다. 即 普通의 方法에 依하여 K_{2n+2}에서의 接續 $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$에서 M_{2n+1}에서의 接觸 Γ^{i}_{kj}를 導入하고 다시 이것에서 그 超曲面 K_{2n}에서의 接續 Γ^{a}_{cb}를 導入하면 $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$에서 한꺼번에 Γ^{a}_{cb}를 導入한 것과는 그 結果가 同一한 接續이 되지 않는 點에 留意해야 한다.

이 接續의 導入을 위에서 말한 前者의 境遇 即 $\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}\rightarrow\Gamma^{i}_{kj}\rightarrow\Gamma^{a}_{cb}$에 依할 때는 萬一 K_{2n+2}의 超曲面인 M_{2n+1}에 있어서의 第2基本 tensor h_{ji}가 f_jf_i에 比例할 때는 (f_j는 M_{2n+1}의 構造 vector) 위의 K_{2n+2}, M_{2n+1}은 모두 Einstein 多様體이고 K_{2n}은 Kaehler 多様體로 되는 것이다. [S. S. Eum (1)]

또 위의 [3], 筆者의 方法에 依하여 槪接觸空間 M_{2n+1}에 그 超曲面인 槪複素空間 K_{2n}을 導入했을 때는 定正則曲率空間과의 關係는 다음과 같다. 단 文獻 S. S. Eum (3)에서의 條件 (3.5)를 假定하기로 한다.

概接觸計量空間 M_{2n+1}	Kalehler 超曲面 K_{2n}
定 C-正則曲率空間이면 $\longrightarrow$	定正則曲率空間이 아니다.
C-正則平面의 公理를 滿足하면 $\longrightarrow$	定正則曲率空間이다.

이것에서, 위와 같은 概接觸計量空間 M_{2n+1} 이 C-正則平面의 公理를 滿足하면 그것은 定 C-正則曲率空間이 아니라는 結論을 얻는다. [S. S. Eum (3)]

§4. 接 bundle, Fibre 空間

【1】 接 bundle 에 있어서의 Riemann 計量

n-次元 Riemann 多樣體 M^n 에 對하여 그 接 bundle 을 $T(M^n)$, natural projection 을 π 即 $\pi: T(M^n) \to M^n$, standard fibre 로서의 linear vector space 를 E^n 即 $\pi: M^n \times E^n \to M^n$, M_n 의 一點 P 의 座標를 x^i, P 點에서의 接 vector 의 成分을 v^i 라 하고 또 U, U' 를 M^n 의 neighborhood 라 할 때 $U \times E^n(x^i, v^i)$, $U' \times E^n(x'^a, v'^a)$의 共通部分에 對해서

$$x'^a = x^a(x^1, \cdots\cdots, x^n), \quad v'^a = \partial_i x'^a v^i, \quad x^{n+i} = v^i, \quad x'^{n+i} = v'^i$$

라 놓으면

$$x'^A = x'^A(x^1, \cdots\cdots, x^n, x^{n+1}, \cdots\cdots, x^{2n})$$

$$\left(\frac{\partial x'^A}{\partial x^I}\right) = \begin{pmatrix} \partial_i x'^a & 0 \\ (\partial^2_{ij} x'^a) v^j & \partial_i x'^a \end{pmatrix}.$$

接 bundle $T(M^n)$에 있어서

$$d\sigma^2 = g_{jk}\, dx^j\, dx^k + g_{jk}\, Dv^j\, Dv^k = G_{JK}\, dx^J\, dx^K$$

$$(h, i, j, \cdots\cdots, a, b, c, \cdots\cdots = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

$$\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots, \alpha, \beta, \gamma, \cdots\cdots = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

$$A, B, C, \cdots\cdots, I, J, K, \cdots\cdots = 1, 2, \cdots\cdots, 2n)$$

에 의하여 Riemann 計量을 定義하면

$$\begin{cases} G_{jk} = g_{jk} + \left\{{\beta \atop \mu j}\right\}\left\{{\gamma \atop \nu k}\right\} v^\mu v^\nu g_{\beta\gamma} \\ G_{j\ n+k} = [\lambda j, k] v^\lambda \\ G_{n+j\ n+k} = g_{jk}. \end{cases}$$

[S. Sasaki (2)]

【2】 接 bundle 에 있어서의 概複素構造

n-次元 Riemann 多樣體 M^n 의 接bundle $T(M^n)$, (x^i, y^i)에 있어서 $\Gamma_i^h = \left\{{h \atop i\ r}\right\} y^r$ 라 놓고 또

$$\begin{cases}\varphi_i{}^h = \Gamma_i^h, & \varphi_i{}^{h*} = -\delta_i^h - \Gamma_i^r\Gamma_r^h \\ \varphi_{i*}{}^h = \delta_i^h, & \varphi_{i*}{}^{h*} = -\Gamma_i^h, \end{cases} \qquad (i^* = n+i)$$

라고 定義하면 $\varphi^2 = -I$로 되어서 φ는 接bundle $T(M^n)$에 있어서의 한 槪複素構造 tensor이다.

또
$$\begin{cases}G_{ji} = g_{ji} + \Gamma_j^r\Gamma_{ir} \\ G_{ji*} = \Gamma_{ji}, \quad G_{j*i*} = g_{ji}\end{cases}$$

에 依하여 $T(M^n)$에 計量을 導入하면. $\varphi_{\mu\lambda}(=\varphi_\mu{}^\alpha G_{\alpha\lambda})$는

$$\begin{cases}\varphi_{ji} = \Gamma_{ji} - \Gamma_{ij} = y^r(\partial_j g_{ir} - \partial_i g_{jr}) \\ \varphi_{j*i} = -\varphi_{ij*} = g_{ji} \\ \varphi_{j*i*} = 0\end{cases}$$

인 性質을 가지며 (φ, G)는 $T(M^n)$에 있어서의 한 槪Hermite 構造를 이룬다. 또 η_λ를 $g_{ir}\eta^r = \eta_i$, $\eta_{i*} = 0$에 依하여 導入하면

$$\eta = \eta_\lambda dx^\lambda, \qquad \varphi = \frac{1}{2}\varphi_{\mu\lambda}\, dx^\mu \wedge dx^\lambda$$

에 對하여 $d\eta = \varphi$이므로 $d\varphi = 0$이고 上記 φ는 槪 Kaehler 構造가 되는 것이다. [S. Tachibana and M. Okumura]

【3】複素超曲面의 normal인 圓 bundle에 있어서의 構造 $M(F_\lambda{}^\mu, G_{\mu\lambda})$를 $2n+2$次元 Kaehler 多様體, (M의 局所座標系를 (u^λ)라 한다. $\lambda, \mu, \nu, \cdots\cdots = 1, 2, \cdots\cdots, 2n+2$) V를 M의 $2n$次元 複素部分多様體, (V의 局所座標系를 (x^a)라 한다. $a, b, c, \cdots\cdots = 1, 2, \cdots\cdots, 2n$)

$\mathfrak{n}(V)$를 V의 normal 인 圓 bundle, 即 V의 모든 unit normal vector 들의 集合이라 한다. ($\mathfrak{n}(V)$의 局所座標系를 $(\bar{q}^i)$라 한다. $i, j, k, \cdots = 1, 2, \cdots, 2n+1$)

$$\text{但;}\ \bar{q}^i; \quad \bar{q}^a = x^a, \quad \bar{q}^{2n+1} = \theta$$

또 이 때의 natural projection을 p라 하자. 即

$$p:\ \mathfrak{n}(V) \longrightarrow V$$

다음에 S^{2n+1}을 $2n+1$次元 單位球面이라 하고 (S^{2n+1}의 局所座標系를 $\tilde{q}^i$라 한다. 但, $\tilde{q}^i; \tilde{q}^a = x^a, \tilde{q}^{2n+1} = \theta$)

$\mathfrak{n}(V)$의 한 vector N에 對하여 이 vector N을 原點을 始點으로 하는 位置 vector N'로 平行移動하면 N'의 終點인 $\phi(N)$은 S^{2n+1} 上의 一點이다. 이와 같이 우리는 $\phi; \mathfrak{n}(V) \to S^{2n+1}$을 定義할 수 있다. 또

$$x^\rho = \sigma A^\rho + \tau F_\nu{}^\rho A^\nu, \ (A^\rho\text{는 常數},\ \sigma, \tau\text{는 實媒介變數})$$

로 定義되는 (E^{2n+2} 內의) 한 正則平面을 생각하여, 이 正則平面과 S^{2n+1}의 共通部分을 正則大圓이라고 부르기로 하자.

이 正則大圓들의 集合은 한 S^{2n+1}의 fibring을 形成하며 그것은 複素射影空間 CP^n 上의 自然 bundle 構造 $\pi : S^{2n+1} \to CP^n$을 決定한다. (CP^n의 局所座標系를 $(\bar{x}^a)$라 한다. 但 $\bar{x}^a = x^a$)

다음에 V의 一點 P에 對하여 寫像 φ를

$$\varphi(P) = \pi(\phi(p^{-1})(P)))$$

로 定義하면 $\varphi : V \to CP^n$이고 이것은 V에 있어서의 Gauss 寫像이라고 불리어진다.

$$\begin{tikzcd} n(V) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "p"'] & S^{2n+1} \arrow[d, "\pi"] \\ V \arrow[r, "\varphi"'] & CP^n \end{tikzcd} \qquad \varphi \circ p = \pi \circ \phi$$

[K. Yano and S.Ishihara (2)]

(i) V (局所座標系 (x^a))

Kaehler 多様體 M의 複素構造 F 및 計量 G로부터 앞 §2, [2]의 方法에 依하여 V에 複素構造 f 및 그 計量 g를 導入할 수 있고 이 때 $f^2 = -I$, $\nabla f = 0$이므로 (f, g)는 V에서의 Kaehler 構造이다.

이 때 Gauss 方程式 및 Weingarten 方程式을 다음과 같이 놓는다.

$$\begin{cases} \nabla_c B_b{}^\rho = h_{cb} C^\rho + k_{cb} D^\rho \\ \nabla_c C^\rho = -h_c{}^a B_a{}^\rho + l_c D^\rho \\ \nabla_c D^\rho = -k_c{}^a B_a{}^\rho - l_c C^\rho \end{cases}$$

但 C, D는 V에 對한 單位法線 vector이다. [K. Yano and S. Ishihara (2)]

(ii) $n(V)$ (局所座標系 $(\bar{q}^i)$)

$$\begin{cases} (\bar{\xi}^h) = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^a \\ \bar{\xi}^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\bar{\eta}_i) = (\eta_b, \ \eta_{2n+1}) = (l_b, \ 1) \\ \bar{f} = f^L \quad (L\text{은 horizontal lift를 뜻한다.}) \\ \bar{g} = g^L + \bar{\eta} \otimes \bar{\eta} \end{cases}$$

와 같이 定義하면 이 $(\bar{f}, \bar{\eta}, \bar{\xi}, \bar{g})$는 $n(V)$에서의 概接觸計量構造로 된다.

[K. Yano and S. Ishihara (2)]

(iii) S^{2n+1} (局所座標系 $\tilde{q}^i$)

$$\tilde{B}_h{}^\rho = \partial_b x^\rho \quad (\partial_b = \partial / \partial \tilde{q}^b), \qquad d\phi(\bar{\xi}) = \tilde{\xi}$$

$$\tilde{\gamma}_{ji}=\begin{pmatrix} G_{\nu\mu}\tilde{B}_c{}^\nu\tilde{B}_b{}^\mu & G_{\nu\mu}\tilde{B}_c{}^\nu\tilde{\xi}^\mu \\ G_{\nu\mu}\tilde{\xi}^\nu\tilde{B}_b{}^\mu & G_{\nu\mu}\tilde{\xi}^\nu\tilde{\xi}^\mu \end{pmatrix},\quad (\tilde{\eta}_i)=(\tilde{\eta}_b,\ \tilde{\eta}_{2n+1})=(l_b,\ 1)$$

이라 定義하고 또 $F\tilde{B}$의 tangent part를 잡으면

$$(\tilde{f}_i{}^h)=\begin{pmatrix} f_b{}^a & 0 \\ -f_b{}^e l_e & 0 \end{pmatrix}$$

이고 이 $(\tilde{f},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\xi},\ \tilde{\gamma})$는 S^{2n+1}에서의 概接觸計量構造로 된다. 또 이 때

$$\tilde{f}\circ d\phi = d\phi\circ\bar{f}$$

이다. [K. Yano and S. Ishihara (2)]

(iv) CP^n (局所座標系$(\bar{x}^a)$)

$\tilde{\gamma}$, $\tilde{f}$의 π에 依한 projection을 各各 $\bar{\bar{\gamma}}$, $\bar{\bar{f}}$라 하면,

$$\bar{\bar{\gamma}}_{cb} = \tilde{\gamma}_{ji}\,\tilde{e}^j{}_c\,\tilde{e}^i{}_b = \gamma_{cb},$$

$$\bar{\bar{f}}_b{}^a = \tilde{f}_j{}^h\,\tilde{e}^j{}_b\,\tilde{e}_h{}^a = f_b{}^a$$

但 $$(\tilde{e}^i{}_b)=\begin{pmatrix} \delta_b{}^a \\ -l_b \end{pmatrix},\qquad (\tilde{e}_h{}^a)=(\delta_b{}^a,\ 0)$$

이고 이 때 $(\bar{\bar{f}},\ \bar{\bar{\gamma}})$는 CP^n에서의 Kaehler 構造로 된다. 또 이 때

$$d\pi\circ\tilde{f} = \bar{\bar{f}}\circ d\pi,\qquad d\varphi\circ f = \bar{\bar{f}}\circ d\varphi$$

이다. [K. Yano. and S. Ishihara (2), (3)]

參考 文獻

Y. Tashiro, *On contact structure of hypersurfaces in complex manifolds I*, Tōhoku Math. J. (1) 15, (1963), 62–78.

S. Sasaki (1), *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure I*, Tōhoku Math. J. (3) 12 (1960), 459–476.

S. Sasaki (2), *On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I, II*, Tōhoku Math. J. 10 (1958), 338–354, Tōhoku Math. J. 14 (1962), 146–155.

S. Sasaki and Y. Hatakeyama, *On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II*, Tōhoku Math. J. (2) 13 (1961), 281–294.

E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Hermann, Paris, (1922).

J. W. Gray, *Some global properties of contact structure*, Ann. of Math. 69 (1959), 421–450.

K. Yano (1), *On a structure defined by a tensor field f of type* (1, 1) *satisfying* $f^3+f=0$, Tensor, N.S. 14 (1963), 99–109.

K. Yano (2), *Eckmann-Frölicher connections on almost analytic submanifolds*, Kōdai

Math. Sem. Rep. (1) 14(1962), 53-58.

K. Yano and S. Ishihara (1), *Almost contact structures induced on hypersurfaces in complex and almost complex spaces*, Kōdai Math. Sem. Rep. (3) 17(1965), 222-249.

K. Yano and S. Ishihara (2), *Normal circle bundles of complex hypersurfaces*, Kōdai Math. Sem. Pep. (1) 20(1968), 29-53.

K. Yano and S. Ishihara (3), *Fibred spaces with invariant Riemannian metric*, Kōdai Math. Sem. Rep. (3) 19(1967), 317-360.

S. Tachibana and M. Okumura, *On the almost complex structure of tangent bundles of Riemannian space*, Tōhoku Math. J. 14(1962), 156-161.

S. S. Eum (1), *On almost Hermitian hypersurfaces in almost contact metric spaces*, Kyungpook Math. J. 6 (1965), 35-47.

S. S. Eum (2), *On complex hypersurfaces in normal almost contact spaces*, Tensor N. S. (1) 19 (1968), 45-50.

S. S. Eum (3), *On Kaehlerian hypersurfaces in almost contact metric spaces*, Tensor N. S. (1) 20 (1969), 37-44.

成均館大學校