環論의 한 傾向

李 禹 翰

1. 非可換環의 構造論(structure theory)은 主로 N. Jacobson, S. Amitur, G. Azumaya, J. Dieudonné, I.N. Herstein, I. Kaplansky, W. Krull, A. Kurosch, J. Levitzki, N.H. McCoy, T. Nakayama 等에 依해서 發展되어 왔다. 이 方向의 參考書도 多數 出刊되여 있는데, 몇개 列擧하면

Jacobson, J., *Structure of Rings,* A.M.S. Colloq, Publ., Providence, 1956

Artin, E., Nesbitt, C.J., Thrall, R.M., *Rings with Maximum Condition,* Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1944

Azumaya, G., Nakayama, T., *Dai-su-gaku,* II, Iwanami, 1952

Azumaya, G., *Tanjun-kan no daisuteki riron,* Kawada Shobo, Tokyo, 1952.,

McCoy, N.H., *Rings and Ideals, Carus Monograph Series,* No. 8, La Salle. 1948

______, *The Theory of Rings,* MacMillam Co., New York, 1964

Albert, A.A., *Structure of Algebras,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1939

Herstein, I.N., *Theory of Rings.* Uinv. of Chicago Math. Notes, 1961

______, *Noncommutative Ring, Carus Monograph Series,* No. 15, La Salle, Ill., 1968

等과 같다. 이 外에 論文形式으로 出版되는 수효는 꾸준히 增加一路에 있으며, 環論과 關聯되는 non-associative algebras 나 homological algebras 方面에까지 進出하여, 커다란 影響을 끼치고 있다. 本論文은 이런 中에도 特히 最近에 R. E. Johnson, Kwangil Koh, A.C. Mewborn 等에 依하여 硏究되여 있는 topics 中 하나를 例示하고저 한다. 이들은 主로 素環(prime ring)이란 比較的 廣範圍한 環을 다루고 있는데, 거기서 나왔으리라고 믿어지는 弱遷移的環(weakly transitive ring)과 그 表現에 對하여 말하고자 한다.

2. weakly transitive ring에 있어서(almost maximal right ideal)의 概念은 決定的이다. I를 環 R의 右側 ideal이라 할때, $R-I$이 faithful right

R-module, 즉 $\{r\epsilon R \mid Rr \subseteq I\} = \{0\}$이면 I는 faithful이라고 말한다. 또 R의 right ideal I에 대하여, $J_1 \cap J_2 = I$인 right ideal J_1, J_2中 적어도 하나는, 가령 J_1은 I와 같아진다고 하면 I는 meet-irreducible이라고 한다. 지금

$$N(I) = \{r\epsilon R \mid rI \subseteq I\}$$

$$[I:a] = \{r\epsilon R \mid ar\epsilon I\}, \quad a\epsilon R$$

라 놓기로 하자.

定義 1. I가 ring R의 proper right ideal 일때 다음 세條件이 만족되면 I를 almost maximal이라고 한다.

(i) I는 meet-irreducible.

(ii) $a\epsilon R$, $[I:a] \supset I$이면 $a\epsilon I$.

(iii) J가 R의 right ideal이고, $J \supset I$이면 $N(I) \cap J$이며,

또 $a\epsilon R$, $[J:a] \subseteq I$이면 $[J:a] \supset I$이다.

그러면 1을 갖는 ring의 maximal proper right ideal은 almost maximal이다. 그러나, almost maximal이면서 maximal이 아닌것이 있다. 이를테면 $\{0\}$은 the ring of integers에 있어서 almost maximal이지만 明白히 maximal은 아니다.

R을 ring이라 하고, M을 right R-module이라 할때 M의 任意의 두 non-zero subodules가 non-zero intersection을 가지면 M은 uniform R-module이라고 한다. 이제 L을 R을 subring으로 포함하고, 1을 갖는 ring이라고 하자. L의 non-zero元 q에 대하여 R속에 $qa = b$, $b \neq 0$인 元 a, b가 存在하면 R은 L속의 right order라고 한다.

定義 2. V를 division ring D上에서의 (left) vector space라 하고, R을 V에서의 a ring of linear tranformations라 하자. 이때 다음 條件이 만족되면 R을 weakly transitive라고 한다. 즉 D속에 right order K가 存在하고, 또 V의 (K, R)-submodule M이 存在하여서, M은 R-module로서 uniform, $DM = V$ 또 $\{m_i\}^n_{i=1}$이 M의 D-linearly independent인 subset, $\{y_i\}^n_{i=1}$이 M의 subset이면 $m_i r = k y_i$, $1 \leq i \leq n$, $k \neq 0$인 元 r, k가 각각 R과 K속에 存在한다는 것이다.

1951年, American Mathematical Society 發行의 Proceedings. Vol. 2, 891-895頁의 R.E. Johonson 著 論文, *The Extended Centralizer of a Ring over a*

Module 에 依하면, R-module M의 extended centralizer의 槪念은 大略 다음과 같다. 즉

M의 모든 submodules의 set를 $\mathfrak{m}$으로 表示하고, M의 submodule N로서 $N'\epsilon\mathfrak{m}$인 non-zero submodule N'에 대하여 $N\cap N'\neq\{0\}$인 性質을 갖는것 全體를 $\mathfrak{m}^*$로 表示한다. $\mathfrak{m}$의 任意 N에 대하여, R-homomorphism of N into M을 semi-endomorphism of M이라하고 이런 semi-endomorphims 全體를 $\mathfrak{a}$로 表示한다. 便宜上, 이 simi-endomorphism α가 作用하는 module을 N이라고 하면 이 N을 M_a로 表示하기로 한다. 任意 $\alpha\epsilon\mathfrak{a}$에 대하여

$$N_a=\{x\,|\,x\epsilon M_a,\ \alpha x=0\}$$

놓고, 또 $\mathfrak{k}$를 $M_a\epsilon\mathfrak{m}^*$인 α 全體라하고

$$\mathfrak{p}=\{\alpha\,|\,\alpha\epsilon\mathfrak{k},\ N_a\epsilon\mathfrak{m}^*\}$$

라 놓으면 $\{\mathfrak{k}/\mathfrak{p};\ +,\cdot\}$은 ring을 이룸을 알 수 있다. 이 ring을 R-module M의 extended centralizer 라고 부른다. 그리고 이 extended centralizer 가 division ring이 되는 必要充分條件은 $\mathfrak{m}^*=\mathfrak{m}-\{0\}$이다. 즉 이 必要充分條件은 M이 uniform R-module이라는 것이다.

1966年, K. Koh 와 A.C. Mewborn 에 依하면 다음과 같은 事實을 알수 있다. 즉 I를 ring R의 almost maximal right ideal이라고 하면 R-module $M=R-I$의 extended cetralizer D가 存在하고, D는 division ring을 이룬다. 더욱 이때 $M=R-I$는 uniform R-module이고, I centralizer K는 바로 $K=N(I)-I$이며, 또 D속의 right order가 되며, 또 M은 (D,R)-module V로 擴大되어서 $DM=V$이고 끝으로 R은 D上의 벡타空間 V에서의 weakly transitive ring of linear transformations을 induce하게 된다. 이 事實은

A Class of Prime Rings, Canad. Math. Bull. Vol 9, No. 1, 1966

에 記載되여 있으며, 다음 事實도 있음을 적어 둔다. 즉

ring R이 faithful almost maximal right ideal을 갖는 必要充分條件은 R이 weakly transitive인 것이다.

더욱 最近着의 論文

K. Koh, A. C. Mewborn, *The Weak Radical of a Ring*, Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967) 554-559

에 依하면 大略 다음과 같다. 즉

ring R의 a weakly transitive representation이라 함은 a homonorphissm of R onto a weakly transitive ring이다.

定義 3. ring R의 weak radical $W(R)$은 모든 weakly transitive representations의 kernel의 intersection이다. 萬一에 R의 weakly travsitive representation이 없을 때는 $W(R)=R$이다.

그 主要한 結果를 들어보면 다음과 같다.

(1) $W(R/W(R))=\{0\}$

(2) $W(R)$은 모든 almost maximal right ideals의 intersection이다.

(3) weakly transitive ring의 (two-sided) ideal은 weakly transitive이다.

(4) S가 ring R의 ideal이면, subring으로서 $W(S)=W(R)\cap S$이다.

(5) R_n은 ring R上의 n次行列全體라 하면 $W(R_n)=W(R)_n$이다.

Koh와 Mewborn이 指摘하고 있듯이, 上記 事實과 analogues인 Jacobson의 Structure Thory(c/o Strure of Rings)에 있어서의 諸定理의 證明方法을 보면 大端히 興味롭다. 卽 quasi-regularity의 槪念을 使用하고 있다는 點이다. 여기서 quasi-regular라 함은 다음과 같다. ring R의 元 a는 $a+b-ab=0$, $b+a-ba=0$인 元 b가 存在할때 quasi-regular라 한다. weak radical의 定義도 Jacobson radical의 定義에 準하고 있으므로 quasi-regularity에 해당하는 槪念을 weakly transitivity 속에서 얻으면 퍽 便利하겠으나, 實地로는 그런것을 아직 發見하지 못하고 있다. 따라서 그들은 아직 right weak radical과 left weak radical이 一致함을 證明하지 못하고 있다. 勿論 Jacobson right-radical이 Jacobson left radical과 一致한다는 定理의 證明은 quasi-regularity를 使用한 것만이 있을 따름이다. 이 時點에서 볼때 quasi-regularity를 使用하지 않는 證明方法을 얻는 것이 第一 急한 일이다.

한편 著者와 鄭在明 等에 依하여 다음 事實이 밝혀 졌다.

(*Jae Myung Chung*, On *Semi-simplicity and Weak Semi-simplicity*, J. of Korean Moth, Soc., Vol. 5, Nov., 1968

Wuhan Lee, On the Existence of an Almost Maximal Right Idesal in a Matrix Ring, Seoul Univ. J., Vol. 19, Oct., 1968)

(1) R을 ring, J를 the ring of integers, $R^*=R+J$, $R\cap J=\{0\}$, J의 1과 R^*의 1이 같다고 하면 $W(R)=W(R^*)$이다.

(2) ring R의 a modular maximal ringht ideal은 an almost maximal right ideal이다.

(3) ring R이 semi-simple이면, R은 weakly semi-simple이다. 즉 $J(R)=\{0\}$이면 $W(R)=\{0\}$이다.

(4) R이 commutative ring 일때 $\{0\}$이 an almost maximal right ideal일 必要充分條件은 R이 integral domain이다.

(5) ring R_n(R 上의 n次行列全體)이 weakly primitive인 必要充分條件은 R이 weakly primitive이다.

(6) $J(R_n)=J(R)_n$이다.

앞에서 指摘한 바와 같이, Jacobson의 structure theory에서, quasi-requlárity의 使用을 피하고, modular maximal right ideal의 概念을 使用하여 보면 果然 어느 程度까지 갈수 있을런지? 著者가 試圖한 바 다음의 結果와 앞의 (1) 程度이다.

서 울 大 學 校