主觀的確率의 統計學的 應用

—模糊事前分布와 古典統計學—

崔 至 薰

1. 緖 言

主觀的確率이 처음으로 世上에 나온것은 Borel(1924)에 依하여 그 槪念이 提示된것을 비롯하고 있으며 그 後 잇달아 Ramsey(1931), de Finetti(1937, 1949, 1958) 그리고 Koopman(1940, 1941) 등이 거의 完壁에 가까우리 만치 主觀的 確率의 基礎와 形式化를 이룩해 놓았다. 그러나 이들은 統計學에서 본 應用할수있는 立場에서 일어나는 問題에는 거의가 손을 대지 않았다. 主觀的確率을 統計學에 應用해본 이 가운데 처음인 者는 Molina(1931)와 Fry(1934)가 있는데 이들의 努力은 數十年間 死藏된채 아무도 상대를 않고 있었으나, I. J. Good(1950, 1952)에 依하여 다시 햇빛을 보게 되고 잇달아 程度의 差異는 있었으나 主觀的確率을 統計學에 應用한 大家들에는 Anscombe(1958), Hodges and Lehmann(1952), Lindley(1956), Wallace(1959), Whittle(1958) 등이 있다. 더욱이 Robert Schaifer(1959)가 最近發刊한 商科學生을 위한 敎科書는 全的으로 主觀的 確率論을 應用한 統計學册으로서 이만큼 實際的인 統計方法과 技術에까지도 變貌를 가지고 왔다. 더욱이 注目할 일은 비단 主觀的 確率에 基礎한 統計學者에 依해서만 主觀的 確率의 槪念에 贊同되어 統計學에 應用을 企圖된 것만이 아니고 Jeffreys(1948, 1957)와 같은 이는 主觀的 確率論者가 아님에도 不拘하고 Bayes의 定理를 深刻히 다루었고 오히려 主觀的 確率을 基礎로하는 統計學者가 보다 넓리 그리고 가장 중요하게 여기는 點을 取扱하고 있다.

2. 主觀的確率

이러한 比較的 짧은 歷史를 가지고 있는 學問의 分野가 정차 統計學을 主觀的 確率에 立脚한 것으로 變遷시키고 있는 理由는 統計推測에 있어 보다 緊要

한 結果를 恒常 가지고 오기 때문인 것이다. 主觀的 確率은 한 "人間"의 現實的인 또는 潛在的 行實에 依하여 反影되는 意見에 依存된다. 여기서말하는 "人間"은 퍽 架想的인 人物로서 絕對로 失手가 없으며 돈 내기에 어떤 일이 일어나던 상관 없이 그가 돈을 잃는다는 것을 확실히 알아차리는 그러한 노름을 조작할줄 안다. (Savage 1962). 우선 우리 自身이 이러한 人物이 되지는 못하나 이렇다고 假定을 한다. 그리하여 函數 P_r를 다음과 같이 定義한다. 即 事象 $A, B, \cdots\cdots$에 母集合 S까지도 包含해서 實數를 結合하여 A와 B가 共通部分이 없을때

$$P_r(A \text{ or } B) = P_r(A) + P_r(B),$$
$$P_r(A) \geq 0,$$
$$P_r(S) = 1.$$

여기까지는 Kolmogorov의 公理化와 조금도 다름이 없으나 다음의 odds(公算이라고 함이 좋을것 같음)를 하나더 揷入함으로서 潛在的 行實에 依하여 完全히 P_r가 決定되고 말며 이것이 主觀的 確率이 從來의 것과 다른 점이다.

$P_r(A)$는

$$\frac{P_r(A)}{P_r(\text{not } A)} = \frac{P_r(A)}{1-P_r(A)}.$$

가 odds가 되는 것이다. 다시말해서 A가 안일어나는 것에 對하여 A가 일어난다고 "當身"이 걸고자하는 그 公算(odds)이 되겠금 하는 것이 $P_r(A)$이다. 또는 더 簡潔하게 말해서 $P_r(A)$는 "A에게 기대는 自身을 위한 1에 對한 公平한 價値"*라고 할 수 있다. 도리켜 보면 마지막 公算에 頻度的(frequeutist) 接近에 依한 確率의 導入과 判異한 點이며 다음 例를 보더라도 쉽사리 條件附確率이 어떻게 主觀的 確率에 依하여 解釋되는 가를 알 수 있다.

例 1: $A \cap B$에 對하여 1을 支拂하고 $\bar{A} \cap B$에 對하여는 0을 지불하고, $\bar{B}$에 對하여 x를 支拂한다할때 x가 公平한 價値(fair value)이기 위해서는

$$x = 1 \cdot P(A \cap B) + 0 \cdot P(\bar{A} \cap B) + x \cdot P(\bar{B})$$

가 成立되어 x는

$$x = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ 단 } P(B) > 0$$

와 같이 表示된다. 이것은

* Fair value for *me* of $ 1 contingent upon A.

$$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

와 같은 것이며, $A\cap B$에 對하여 1을 주고 $\bar{A}\cap B$에 對하여 0을 줄때 $\bar{B}$인데도 A인 부분에 대한 fair value를 찾는 것이 主觀的 確率을 理解하는 첩경이다.

實上 P_r를 odds로서 導入할때 앞서 公理로 내세운 세가지는 一意的으로 決定되고 만다.

3. Bayes의 定理

위에서 紹介한 主觀的 確率이 統計學에 應用되는 重要한 根本이되는 定理에 Bayes의 定理가 있다.

Lemma 1. A가 B를 뜻할 경우

$$P(A|B)P(B) = P(A).$$

Lemma 2. A가 B를 뜻할 경우

$$P(A) \leq P(B).$$

Lemma 3. $P(B)\neq 0$이면

$$P(A|B) = P(B|A)\ \frac{P(A)}{P(B)}.$$

定理 (Bayes의 定理)

$P(B)\neq 0$이면

$$P(A|B) \propto P(A|B)P(A).$$

系 $\{A_n\}$가 事象列이고 B가 $P(B)\neq 0$인 다른 事象이면

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n)P(A_n)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}.$$

이제 Bayes의 定理를 統計學에 어떻게 應用하는가를 보인다. A가 어떤 命題라고 하자. 그러면 $P(A|B)$는 B가 주어졌을 때 A가 "眞"이다라는 것에 대한 信念의 強度를 나타낸다. 그래서 이것을 信度(degree of belief)라고 하자.* 極端的으로 A가 眞이라고 믿어지면 $P(A|B) = 1$이고, A가 僞라고 믿어지면 $P(A|B) = 0$가 된다.

區間 (0, 1)內의 다른 點은 結局 眞과 僞사이를 오락가락하는 믿음의 程度가

---

* degree belief를 信度라고 한것과 degree of confidence를 信賴度라고 한것과 混同해서는 안된다.

中間치기인 것을 나타낸다. 統計學에서는 假說이라는 말을 命題代身쓴다.

이제 E를 어떤 時點에 있어서의 累積된 知識이라고 하자. 그리고 A를 어떤 事象, H를 假說이라고 하자. 그러면 $P(H|E)$는 E가 주어신 뒤의 H에 대한 信度 : $P(H|AE)$는 A가 일어나고 E가 주어진 뒤의 H에 대한 信度 : $P(A|HE)$는 假說 H가 眞이고 E가 주어진뒤의 A가 일어나는 確率이다. E는 위의 세가지 $P(H|E)$, $P(H|AE)$, $P(A|HE)$ 어느 경우나 모두 條件附 쪽에 나타나므로 이를 略하면 $P(H)$, $P(H|A)$, $P(A|H)$가 되고 이는 頻度的 用法가 恰似해진다. 여기서 이름하기를 $P(H)$를 H의 事前確率, $P(H|A)$를 H의 事後確率, 그리고 $P(A|H)$를 A에 관한 H의 尤度(likelihood)라고 한다.

이와 같은 命名을 하고 보면 統計學이란 主目的이 資料(事象)가 信度를 어떻게 變化하는가, 換言하여, A의 觀察을 通하여 "事前"으로 부터 "事後"로 變化하는 것을 工夫하는 것이라고 말하게 된다.

4. 正規分布

위서 말한 관계는

$$P(H|A) \propto P(A|H)P(H)$$

로 주어져 이는 Bayes의 定理의 一角이며 이러한 연유로서 主觀的 確率을 統計學에 應用한 結果, 이 새로 나타난 統計學을 通稱 Bayesian Statistics라고 한다. 이제 가장 기초가되는 正規分布를 例를들어 Bayesian 統計가 어떤 結果를 가지고 오는가를 보자.

어떤 分布로부터 크기의 確率標本을 抽出하였다면 각 確率變數는 이 分布를 가지며 各各의 獨立인 n個의 確率變數의 集合이된다. 이 集合에 속하는 實數 θ에 관하여 $f(x|\theta)$가 確率變數 x의 密度이면 θ는 母數가 된다. 이제 θ는 固定된 값이나 未知이고 函數 f의 型態는 旣知라고 하자. 그리고 H를 標本을 抽出하기 以前에 우리가 가지고 있는 知識의 狀態라고 하자. 그러면 θ는 事前知識 H의 所産으로 생기는 分布를 갖는다. 이것은 信度라는 뜻으로 본 確率分布인것이며 이것을 $\pi(\theta|H)$라고 나타내자. 여기서 π를 信度를 나타내는 密度로 쓴다면 P는 頻度的 用法으로 쓰게된다.

그러므로 $X=(x_1, \cdots, x_n)$이 確率標本이면, x_i는 各各이 獨立이므로 X의 密度는

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta) = P(X|\theta,\ H)$$

로 주어진다. 그러나 결국 Bayes의 정리에 依하여

$$\pi(\theta|, XH) \propto P(X|\theta, H)\pi(\theta|H)$$

인 관계식을 갖는다. 이들은 순서로 말하여 事後密度, 尤度 그리고 事前密度인 것이다.

例 2. x를 σ^2이 旣知인 $N(\theta, \sigma^2)$이라하고, θ의 事前密度를 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$이라하면 θ의 事後密度는 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$으로 주어지며 μ_1, σ_1^2은 各各

$$\mu_1 = \frac{\dfrac{x}{\sigma^2} + \dfrac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\dfrac{1}{\sigma^2} + \dfrac{1}{\sigma_0^2}}, \quad \frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}.$$

證明. 尤度函數는

$$P(x|\theta) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}}\ exp[-(x-\theta)^2/2\sigma^2],$$

事前密度는

$$\pi(\theta) = (2\pi\sigma_0^2)^{-\frac{1}{2}}\ exp[-(\theta-\mu_0)^2/2\sigma_0^2].$$

따라서

θ를 包含하지 않는 係數는 比例常數로 吸收되어

$$\pi(\theta|x) \propto exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\theta-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

$$\propto exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right) + \theta\left(\frac{x}{\sigma^2} + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}\right)\right\}$$

$$= exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\sigma_1^2} + \frac{\theta\mu_1}{\sigma_1^2}\right\}$$

$$\propto exp\left\{-\frac{(\theta-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}.$$

結果, 標本의 크기가 1인 事前密度가 正規分布를 하는것은 事前分布의 모양도 正規分布이나 平均과 分散이 事前知識에 依하여 加重되고 있다. 다시말해서 θ에 관한 情報는 두가지 源泉에서오며 그하나는 資料에서 그리고 또하나는 우리가 가지고 있는 事前 知識이다.

이제 或者는 事前知識에 對하여 論爭을 걸어 올른지 모른다. 즉 極端으로 말하여, 例 2를 들쳐보면, 事前에 θ가 $N(\mu_0,\ \sigma_0^2)$를 한다는 그 前提가 全然 없을 때 어떻게 하겠는가? 하는 경우다.

例 3. x를 σ^2이 旣知인 $N(\theta, \sigma^2)$이라하고 θ의 事前密度에 對하여 模糊하여 $(-\infty, \infty)$에서 常數 k에 比例한다고 한다. 그러면 θ의 事後密度는 $N(x, \sigma^2)$으로 주어진다.

證明. 尤度函數는

$$P(x|\theta) \propto e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}},$$

事前密度는

$$\pi(\theta) \propto k.$$

따라서 事後密度는, 例 2과 같이 θ를 包含하지 않는 係數는 比例常數로 吸收되어,

$$\pi(\theta|x) \propto e^{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}}.$$

이는 θ가 $N(x, \sigma^2)$가 됨을 말한다.

例 3 가운데 "θ의 事前密度에 對하여 模糊하여 $(-\infty, \infty)$에서 常數 k에 比例한다"라고 한것은, 조금도 無理한 것이 아니며 全實數區間을 通하여 θ가 갖는 密度가 平坦하여 特別히 어느 部分에 密集되는 知識이 負荷되지 못한다는 뜻에서 一樣分布的인 解釋을 해도 모순이 없다.

이러한 模糊한 事前知識에 對하여 事後分布의 平均의 區間推定(Lindley 1965)을 보더라도 一樣分布的인 態度는 從來 Bayesian이 아닌 古典統計學者 乃至는 頻度的 統計學者가 取扱해온 結論과 一致하는 것에 自然스러운 首肯이간다.

定理* 確率標本 $X=(x_1, \cdots, x_n)$이 $N(\theta,\ \sigma^2)$로 부터 抽出된 크기 n의 標本이며 σ^2이 旣知이라 할때,

區間 I_α가

$$\bar{x} - \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \bar{x} + \lambda_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

로 定義될 때,

이 區間 I_α 안에서는 θ의 事前密度가 $C(1-\varepsilon)$와 $C(1-\varepsilon)$에 오고 區間 I_α 밖度서는 θ의 事前密度가 MC로 限界를 갖는 $\alpha, \varepsilon, C, M$가 存在한다면, 事後密度 $\pi(\theta|X)$는 다음 不等式을 滿足한다.

I_α 內에서는

---

* Lindly (1965) pp 13—15.

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\alpha)+M\alpha}\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}} \leq \pi(\theta|X)$$

$$\leq \frac{(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)(1-\alpha)}\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}}.$$

I_α 外에서는

$$0 \leq \pi(\theta|X) \leq \frac{M}{(1-\varepsilon)(1-\alpha)}\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\lambda^2_\alpha}.$$

단 α 는 標準化된 累積 正規分布 函數를 $\Phi(x)$라 할때

$$\alpha = 2\Phi(-\lambda_\alpha).$$

이 定理를 증명하기에 앞서 이 定理가 말하는 바를 살펴보자. α와 ε은 우리가 얼마 쯤이라도 작게 할 수 있는 값이며 따라서 $e^{-\frac{1}{2}\lambda_\alpha^2}$ 도 그리되어 아무리 큰 M에 對하여 I_α 外에서 $\pi(\theta|X)$의 上限을 작게할 수 있어 I_α 內에서 이는 近似的으로 $N(\bar{x}, \sigma^2/n)$를 한다. 即 模糊한 事前密度는 結局 古典的統計學의 結果와 같은 것이된다.

證明. Bayes의 定理에서

$$\pi(\theta|X) \propto P(X|\theta)\ \pi(\theta).$$

省略된 比例常數는 右邊을 標準化함으로써 求할 수 있어

$$\pi(\theta|X) = A\cdot P(X|\theta)\pi(\theta) \tag{1}$$

$$\text{단}\quad A = \frac{1}{\int_\theta P(X|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

라고 할 수 있다.

그리고 크기 n의 標本의 尤度函數는

$$P(X|\theta) = \left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}} \tag{2}$$

定理의 假定에서 θ의 事時密度가 $C(1-\varepsilon)$과 $C(1+\varepsilon)$사이에 存在한다 하니 (1)과 (2)로부터

I_α 內에서

$$C(1-\varepsilon) \leq \pi(\theta) \leq C(1+\varepsilon),$$

$$AP(X|\theta)C(1-\varepsilon) \leq A\cdot P(X|\theta)\pi(\theta) \leq AP(X|\theta)C(1+\varepsilon).$$

$$\therefore\quad AP(X|\theta)C(1-\varepsilon) \leq \pi(\theta|X) \leq AP(X|\theta)C(1+\varepsilon). \tag{3}$$

마찬가지로 I_α 外에서는

$$0 \leq \pi(\theta) \leq M_c.$$

$$\therefore \quad 0 \leq \pi(\theta|X) \leq AP(X|\theta)M_c. \tag{4}$$

(3)의 左邊을 보면

$$AC(1-\varepsilon)\int_{I_\alpha}\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}exp\left\{\frac{-n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}d\theta \leq \int_{I_\alpha}\pi(\theta|X)\,d\theta$$

$$\int_{I_\alpha}\left(\frac{n}{2\pi\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}exp\left\{\frac{n(\bar{x}-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}d\theta$$

$$=\int_{-\lambda_\alpha}^{\lambda_\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz, \qquad \text{단} \quad z=\frac{\bar{x}-\theta}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$=\Phi(\lambda_\alpha)-\Phi(-\lambda_\alpha)=1-\alpha.$$

왜냐하면 標準化 正規分布累積函數 $\Phi(x)$는

$$\Phi(x)=1-\Phi(-x)$$

인 관계가 있고 α를 $2\Phi(-\lambda_\alpha)$로 定義함을 상기하면 된다. 결국 (3)의 左邊은 I_α 內에서

$$AC(1-\varepsilon)(1-\alpha) \leq \int_{I_\alpha}\pi(\theta|X)\,d\theta$$

가 된다. 마찬가지로 (3)의 右邊은

$$\int_{I_\alpha}\pi(\theta|X)\,d\theta \leq AC(1+\varepsilon)(1+\alpha)$$

를 얻는다.

다음에는 I_α밖을 J_α라고 할 때

$$0 \leq \int_{J_\alpha}\pi(\theta|X)\,d\theta \leq AMC\alpha$$

를 (3)의 左邊을 I_α에서 생각하듯 하면 쉽게 求할 수 있다. 한편 事後確率密度 $\pi(\theta|X)$를 全區間 $I_\alpha+J_\alpha$에서 積分하면 密度函數의 定義에 依하여

$$\int_{I_\alpha+J_\alpha}\pi(\theta|X)\,d\theta=1.$$

따라서

$$AC(1-\varepsilon)(1-\alpha) \leq 1 \leq AC[(1+\varepsilon)(1-\alpha)+M\alpha].$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(1+\varepsilon)(1-\alpha)+M\alpha} \leq AC \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)(1-\alpha)}. \tag{5}$$

(5)를 (3)에 代入하고 $P(X|\theta)$에는 (2)를 代入하면 I_α內에서의 事後密度가 滿足하는 不等式을 얻고 같은 方法으로 (5)를 (4)에 代入하면 I_α外에서의 不等式을 얻는다.

5. 回歸線에의 應用

例 2에서와 같이 事前의 知識이 반드시 尤度函數와 같은 形態를 주거나, 例 3에서와 같이 模糊할때가 아니드라도 共軛事前 密度를 擇할 수도 있다. (Raiffa and Schlaifer 1961)

이번에는 비약되는 것 같기는 하나 두개의 標本의 比較에서 μ_1, σ_1^2; μ_2, σ_2^2이 未知일때 나타나는 Behrens-Fisher 分布와 같은 形態가 나타나는 事後分布를 생각한다.

Lemma 1. $Y_i = \beta_1 X_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$이고 ε_i가 獨立的이고 恒等的으로 $N(0, \sigma_1^2)$을 한다고 하자. 그러면 β_1의 事後分布는 自由度 $n-1$의 $t-$分布를 한다. 但 同時事前分布 $f_1(\beta_1, \sigma_1^2)$가 $\dfrac{1}{\sigma_1^2}$에 比例한다고 하자.

證明. 尤度函數는

$$L(\beta_1, \sigma_1^2) \propto \left(\frac{1}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{\Sigma(y_i - \beta x_i)^2}{2\sigma_1^2}},$$

事前密度는

$$f'(\beta_1, \sigma_1^2) \propto \frac{1}{\sigma_1^2}.$$

따라서 事後密度는

$$f''(\beta_1, \sigma_1^2 | y, x) \propto \left(\frac{1}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\Sigma(y_i - \beta_1 x_i)^2}{2\sigma_1^2}}.$$

β_1에 관한 周邊密度를 求하기 위하여 σ_1^2을 積分消去하면 $f''(\beta_1, \sigma_1^2 | y, x)$가 逆 Γ 函數이므로

$$f''(\beta_1 | y, x) \propto \int_0^\infty \left(\frac{1}{\sigma_1^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} e^{\frac{\Sigma(y_i - \beta_1 x_i)}{2\sigma_1^2}} d(\sigma_1^2)$$

$$\propto \frac{1}{[\sum(y_i - \beta_1 x_i)^2]^{\frac{n}{2}}}. \qquad (6)$$

$\hat{\beta}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$을 定義하여 $\sum(y_i - \beta_1 x_i)^2$을 變形하면

$$\sum(y_i - \beta_1 x_i)^2 = \sum(y_i - \hat{\beta}_1 x_i - (\beta_1 - \hat{\beta}_1) x_i)^2$$
$$= \sum(y_i - \hat{\beta}_1 x_i)^2 + (\beta_1 - \hat{\beta}_1)^2 \sum x_i^2.$$

이를 (6)에 代入하면

$$f''(\beta_1|y,x) \propto \frac{1}{[\sum(y_i-\hat{\beta}_1x_i)^2+(\beta_1-\hat{\beta}_1)^2\sum x_i^2]^{\frac{n}{2}}}.$$

$\sum(y_i-\hat{\beta}, x_i)_2$ 에는 變數 β_1 이 包含되어 있지 않음으로

$$f''(\beta_1|y,x) \propto \frac{1}{\left[1+\frac{(\beta_1-\hat{\beta}_1)^2\sum x_i^2}{\sum(y_i-\hat{\beta}x_i)^2}\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

이제

$$t_1=\frac{(\beta_1-\hat{\beta}_1)\sqrt{n-1}}{\sqrt{\sum(y_i-\hat{\beta}_1x_i)^2/\sum x_i^2}}$$

라고 놓으면 Jacobian 은 β_1 에 對하여 常數이므로

$$f''(\beta_1|y,x) \sim \frac{1}{\left[1+\frac{n-1}{t_1^2}\right]^{\frac{n}{2}}}.$$

이것은 自由度가 $n-1$ 인 $t-$分布를 함을 말한다.

Lemma 2. $Y_i=\beta_1X_i+\varepsilon_i$, $i=1,2,\cdots,n$ 이고 ε_i 가 獨立的이고 恒等的으로 $N(0,\sigma_1^2)$을 하고, $Y'_j=\beta_2X'_j+\varepsilon'_j$, $j=1,2,\cdots,m$ 이고 ε'_j이 獨立的이고 恒等的으로 $N(0,\sigma_2^2)$을 할때, 만일 同時事前分布 $f(\beta_1,\beta_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$이 $\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$ 에 比例한다면 事後 周邊密度 $f''(\beta_1\beta_2)$는 自由度 $n-1$의 $t-$分布와 自由度 $m-1$의 $t-$分布의 곱으로 나타난다.

證明. Lemma 1 에서

$$f''(\beta_1|y,x) \sim \frac{1}{\left[1+\frac{t_2^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}}$$

를 얻었으며 마찬가지로

$$f''(\beta^2|y',x') \sim \frac{1}{\left[1+\frac{t_1^2}{m-1}\right]^{\frac{m}{2}}}$$

$$\text{단} \quad t_2^2=\frac{(\beta_2-\hat{\beta}_2)^2\sqrt{m-1}}{\sqrt{\sum(y'_j-\hat{\beta}_2x'_j)^2/\sum x'^2_j}}$$

를 얻는다. $Y_i=\beta_1X_i+\varepsilon_i$ 와 $Y'_j=\beta_2X'_j+\varepsilon'_j$ 은 獨立이므로

$$f''(\beta_1,\beta_2|y,x,y',x') \sim \frac{1}{\left[1+\frac{t_1^2}{n-1}\right]^{\frac{n}{2}}\left[1+\frac{t_2^2}{m-1}\right]^{\frac{m}{2}}}.$$

定理. Lemma 2의 條件下에서 $\beta_1-\beta_2$의 事後密度는 Behrens-Fisher 分布

를 한다.

證明. t_1과 t_2의 定義로 부터

$$\beta_1 - \hat{\beta}_1 = t_1 \frac{\sqrt{\sum(y_i - \hat{\beta}_1 x_i)^2}}{\sqrt{(n-1)\sum x_i^2}},$$

$$\beta_2 - \hat{\beta}_2 = t_2 \frac{\sqrt{\sum(y'_j - \hat{\beta}_2 x'_j)^2}}{\sqrt{(m-1)\sum x'^2_j}}.$$

$$\therefore \quad (\beta_1 - \beta_2) - (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = t_1 C_1 - t_2 C_2.$$

단 $C_1 = \sqrt{\dfrac{\sum(y_i - \hat{\beta}_1 x_i)^2}{(n-1)\sum x_i^2}}, \quad C_2 = \sqrt{\dfrac{\sum(y'_j - \hat{\beta}_2 x'_j)^2}{(m-1)\sum x'^2_j}}.$

$\tan\omega = \dfrac{C_1}{C_2}$ 이라고 놓으면

$$(\beta_1 - \beta_2) - (\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2) = t_1 \cos\omega - t_2 \sin\omega$$

가 되어, 이는 곧 $(\beta_1 - \beta_2)$가 Behrens-Fisher 分布를 함을 말한다.

6. 結　言

主觀的 確率이 Bayes의 定理를 統計學으로 하여금 어쩔수 없는 基本的인 것으로 하게 하여, 資料를 모으기에 앞서 統計的 假說에 對한 信度가 無視할 수 없는 役割을 하고, 이 信度가 事前確率로서, 觀察에 依하여 그 事後에 일어난 確率의 分布를 變化시키는 것은, 過去 우리가 全然 信度를 생각치 않고 있었던 것을 새삼 께닫게 한다.

몇가지 例를 通하여 古典的 統計學이 Bayesian으로 보았을 때에 어떤 信度를 假定하고 있었던 가를 알 수 있다. 例 3에서는 事前密度를 常數 k로 하고 있으며, 5의 Lemma나 定理를 보면 그 結果 古典的 인것과 같은 것을 갖이고 오나, Bayesian으로 보아서는 古典 統計學者가 事前密度로서 $\dfrac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}$ 에 比例하는 模糊한 分布를 假定하고 있음을 알고있다.

參 考 文 獻

Anscombe, F.J. 1958, *Fixed sample size analysis of sequential observations,* Biometries, 10, 89-100.

Brel, E. 1924, *A propos d'un trait'e de probabilitiés,* 134-146.

de Finetti, B. 1937, *La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives.* Ann. Inst. H. Poincaré, 7, 1-68.

de Finetti,B. 1949, *Sull impostazione assiomatca del calcol delle probabilitià*, Annali Triestini, Ser. 2, 19, 29-81.

de Finetti,B. 1958, *Foundation of Probability*', 140-147.

Fry, T.C. 1934, *A mathematical theory of rational inference (a nonmathematical discussion of Bayes' theorem)*, Scripta Mathematica, 2, 205-221.

Good,I.J. 1950, *Probability and the Weighing of Evidence*, London: Griffin.

Good,I.J. 1952, *Rational decision*, J.R. stat. Soc B. 14, 107-114.

Hodges,J.L and Lehmann,E.L. 1952, *The use of previous exprience in reaching statistical decisions*, Ann math. Stat. 23, 396-407.

Jeffreys. H. 1948, *Theory of Probability*, Oxeford U. Prss (2nd edition)

Jeffreys. H. 1957, *Scientific Inference*. Cambridge U. Press (2nd edition)

Lindley, D.V. 1956, *On a measure of the information provided by experiment*, Ann. math. Statist. 27, 986-1005.

Lindley, D.V. 1965, *Introduction to Probability and Statistics Part. Probability, Part Inference*, Cambridge U. Press.

Raiffa and Schlifer 1961, *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard U. Puss.

Ramsey,F.P. 1931, *The Foundations of Mathematic and other Logical Essays*, London: Kegan Paul.

Schlaifr 1959, *Probability and Statistics for Business*

Savage L.J. 1962, *Decisons*, N.Y., McGraw-Hill.

Wallace, D.L. 1959, *Condition confidence level properties*, Ann. math. Statist., 30, 864-876.

Whittle,P. 1959, *On the smoothing of probability density* functions, J.R. Statist. Soc. B. 20, 334-343.

서울大學校