<論 說>

도형의 정의에 관한 한 연구

최 영 한

ABSTRCT

A Study on the Definitions of Some Geometric Figures

Young H. Choe

In mathematics, a definition must have authentic reasons to be defined so. On defining geometric figures, there must be adequencies in sequel and consistency in the concepts of figures, though the dimensions of them are different. So we can avoid complicated thoughts from the study of geometric property.

From the texts of SMSG, UICSM and others, we can find easily that the same concepts are not kept up on defining some figures such as ray and segment on a line, angle and polygon on a plane, and polyhedral angle and polyhedron on a 3-dimensionl space. And the measure of angle is not well-defined on basis of measure theory. Moreover, the concepts for interior, exterior, and frontier of each figure used in these texts are different from those of general topology and algebraic topology.

To avoid such absurdness, I myself made new terms and their definitions, such as "gan" instead of angle, "polygonal region" instead of polygon, and "polyhedral solid" instead of polyhedron, where each new figure contains its interior.

The scope of this work is limited to the fundamental idea, and it merely has dealt with on the concepts of measure, dimension, and topological property. In this case, the measure of a figure is a set function of it, so the concepts of measure is coincided with that of measure theory, and we can deduce the topological property for it from abstract stage. It also presents appropriate concepts required in much clearer fashion than traditional method.

차 례

Ⅰ. 서론

Ⅱ. 종래의 정의에 관한 일반적인 고찰

Ⅲ. 여러가지 도형에 관한 정의의 구체적인 고찰

1. 반직선
2. 선분
3. 각
4. 다각형과 단일폐곡선
5. 이면각과 다면각
6. 다면체와 곡면체

Ⅳ. 결론 및 제언

참고 문헌

Ⅰ. 서 론

20세기는 수학과 수학 교육에 다같이 큰 변화를 주었다. 최근 70년 동안 발전하여온 현대 수학은 지난 수천년 동안의 수학에 양적으로나 질적으로나 비교할 수 없으리 만큼 급진적으로 변천하였으며, 수학 교육 역시 이러한 현대 수학

의 기반위에 교육 철학과 심리학의 영향을 받아 많은 변화를 이룩하였다.

20세기 벽두(劈頭)부터 일어난 공리주의와 그 동안 발전한 추상 수학의 개념들은 수학 교육을 전면적으로 재검토하게 하였고, 수학 교육의 기초를 재확립하여 교육 과정의 내용을 재구성하게 하였다.

이른바 수학 교육의 현대화로서 수학의 본질적인 면에서, 또 수학의 교육적인 면에서 수학의 체계와 그 구조를 강조하고, 수학의 추상화와 일반화를 주장하게 되었다.

수학 교육의 현대화가 전 세계에 파급한지도 이미 십수년이 지났으며, 이의 영향을 받은 교과서도 각국에서 여러 종류가 발간되었다. 특히 School Mathematics Study Group (SMSG)과 University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM)의 교과서는 이러한 교과서들의 효시(嚆矢)가 되었으며, 종래의 교과서보다 공리계의 구조와 내용의 논리체계를 엄밀히 다루었다. [1], [2]

그러나 위의 교과서에서는 도형의 정의 자체는 엄밀히 다루었지만 일관된 개념아래 정의되지 않았음을 알 수 있었다. 즉 직선 도형으로서 반직선과 선분, 평면 도형으로서 각과 다각형, 3차원 공간 도형으로서 다면각과 다면체가 모두 일관된 개념으로 정의 되어 있지 않았으며, 따라서 도형의 위상 개념과 측도 개념이 도형에 따라 모두 달라짐을 알 수 있다.

물론, 그와 같이 정의한 데 대해서는 그들 교과서 나름으로 어떤 근거와 이유가 있을 것이다. 그러나 여기서는 하나하나 도형의 엄밀한 정의보다도 도형이 다르더라도 서로 개념상에 유기적인 관련성이 있는 정의를 하려고 한다. 그러기 위하여 우선 이제까지의 교과서에 채택된 정의를 분석하고, 이에 추상 수학에서 사용되는 개념과 일치하도록 새로운 정의를 만들어 보았다.

Ⅱ. 종래의 정의에 관한 일반적인 고찰

여러가지 교과서와 문헌에 나타난 정의를 전체적으로 조사하였다. 몇가지 특별한 예외는 있지만 SMSG, UICSM 등의 교과서에서는 기본적인 도형에 대한 정의의 방법은 달랐지만 비슷한 개념으로 정의하고 있었다.

그러나 앞서 말한 것과 같이 직선위의 도형, 평면위의 도형, 3차원 공간위의 도형에 대하여 정의된 개념이 일관되지 않았다. 우선 선분에 대해서는 직선위의 두 점 및 그 사이에 있는 모든 점들의 집합으로 정의하였다. 물론 끝점을 포함하느냐, 하지 않느냐에 따라 여러가지 다른 용어를 쓰고 있다.

평면위의 도형(다각형, 원 등)에 대해서는 SMSG와 UICSM 등 몇 가지 교과서에서는 그 경계가 되는 단일 폐곡선으로 정의하였고, 또 어떤 교과서에서는 경계뿐만 아니라 내부까지 포함하도록 정의하고 있었다. 또 SMSG와 UICSM에서는 도형의 측도를 정의하기 위하여 *region* 이란 말을 썼고, 같은 개념에 대하여 Modern Geometry 에서는 *surface* 라는 말을 사용하였다.[1)]

3차원 공간위의 도형(각기둥, 각뿔, 원기둥, 원뿔등)에 대해서는 SMSG와 UICSM에서는 도형의 내부와 경계를 포함하도록 정의하였고, 그외의 교과서에는 대부분 경계만으로 정의하였다. 또 다면체에 대한 정의는 UICSM과 SMSG가 서로 달랐다. UICSM에서는 내부와 경계를 포함하였으며 SMSG에서는 경계만으로 정의하였다. SMSG에서는 다시 체적을 정의하기 위하여 *region* 을 썼다. 구(球)에 대해서는 UICSM이나 SMSG가 모두 경계만으로 정의하였고 다시 체적을 정의하기 위하여 UICSM에서는 *region* 을 썼고 SMSG는 *solid* 를 사용하였다.

한편 측도에 대해서는 SMSG와 UICSM이 사용하고 있는 개념이 판이하게 달랐다. SMSG는 측도라는 말을 두 점 사이에서와 각의 두 변사이에서만 사용하였으며, 선분, *region*, *solid* 에 대해서는 길이, 면적, 체적이란 말은 썼으나 측도라는 말을 일체 쓰지 않았다. 즉 측도를 거리의 개념으로 사용하였다. UICSM에서는 두점사이의 거리에 대해서는 측도라하지 않았고, 선분, *region*, 다면체에 대하여 각각 길이, 면적, 체적을 정의하여 이것을 도형의 측도라 한다고 하

1) [3] p. 416

였고, 각의 측도에 대해서는 정확한 정의나 공준이 없이, 다만 교사용 지침서에 선분의 측도와 같은 개념이라고 막연하게 설명하였다.

그리고 모든 교과서가 공통적으로 일반적인 도형에 대한 내부, 경계, 외부의 개념은 매우 애매하였으며, 또 도형의 위상 개념과 달랐다. 그리하여 도형마다 내부와 외부를 정의하는 데 많은 설명이 필요하였고, 좀 복잡한 도형에서는 내부를 정의하지 못하였으며, 정의하드라도 위상수학에서 사용하는 개념과는 달랐다. 특히 각의 경우에는 그 크기가 180° 에 접근함에 따라 내부가 점차로 커지지만 180° 의 경우에는 내부를 정할 수가 없게 되어버렸다. 그리고 반직선, 반평면 등에서는 내부를 쉽게 정의할 수 있는데도 정의하지 않았다. 또 도형의 내부 및 외부가 도형에 따라 결정되지 않고, 그 경계의 도양에 따라 정하여 졌으며, 도형은 내부와 외부의 경계의 구실만 하였다. 이로써 많은 애매한 점과 모순이 일어났다.

Ⅲ. 여러가지 도형에 관한 정의의 구체적인 고찰

1. 반직선

교과과정 개편후 한동안 혼란을 가져다 준 것에 반직선과 사선이 있다. 종래 반직선은 *ray*를 번역한 말로서 써왔다. 그러나 UICSM에서 경계인 끝점을 포함하느냐, 하지 않느냐에 따라 *ray*, *half-line* 이라고 구별하기 시작하였다.[2] 우리나라에서는 다시 *ray* 를 사선으로, *half-line* 을 반직선이라 함으로서 종래의 용어를 그대로 쓰는 사람과 사이에 혼란이 일어났다. 이것을 어떤 계통을 세워 이를테면 끝점을 포함할 때나, 하지 않을 때나 모두 반직선이라 하고, 특히 경계를 포함하지 않을 때를 개반직선, 포함할 때를 폐반직선이라 한다면 아무 혼란이 없을 것이다. 그리고 기호로는 A를 끝점으로 하고 B를 지나는 반직선의 표시는 $\overrightarrow{AB}$로 하고 구별할 필요가 있을 때는 개반직선은 $(\overrightarrow{AB})^o$ 로, 폐반직선은 $(\overrightarrow{AB})^c$ 로 표시한다면 좋을 것이다.

2. 선 분

UICSM에서는 선분을 두가지로 구분하고 있다.[3] 끝점을 포함하지 않는 경우를 *interval* 이라 하고 경계를 포함하는 경우를 *segment* 라 하였다. 또 이 책의 교사용 지침서에서는 이 용어는 아직 표준화가 되어 있지 않으므로 여러가지로 쓰인다고 하였다.

이것도 혼란을 가져올 우려성이 있으므로 경계를 포함하는 경우, 포함하지 않는 경우를 통털어 선분이라 하고, 특히 경계를 포함할 때를 폐선분, 포함하지 않을 때를 개선분이라 하는 것이 좋겠다. 기호로는 선분을 $\overline{AB}$로 나타내고, 특히 구별할 필요가 있을 때는 폐선분을 $(\overline{AB})^c$로, 개선분 또는 선분의 내부를 $(\overline{AB})^o$로 표시하면 좋을 것이다.

직선위의 도형에는 위에 든 반직선, 선분외에도 여러가지가 있다. 이를테면 직선에 수를 대응시켜 유리점 전체의 집합과 무리점 전체의 집합을 생각할 수도 있으며, Cantor 의 삼진 집합 (ternary set)등 여러가지 도형을 만들 수 있다.

직선을 전공간으로 생각하였을 때 직선위의 도형 전체는 Boolean algebra of sets 가 된다. 이때 길이를 집합 함수로 도입하면, 직선위의 도형 전체에 하나의 측도가 결정된다. 선분 $\overline{AB}$ 의 길이를 $m(\overline{AB})$로 나타내며 두 선분의 길이가 같고, 위상적 성질이 같은 때 두 선분은 서로 합동이라 하고 기호 $\cong$로서 나타낸다. 따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 는 선분 $\overline{AB}$와 선분 $\overline{CD}$가 점의 집합으로서 완전히 일치한다는 뜻으로, $\overline{AB}\cong\overline{CD}$ 는 길이가 같고 위상적 성질이 같다는 뜻으로 사용한다. 그리고 $m(\overline{AB})=m(\overline{CD})$는 그 길이가 같다는 뜻으로 사용한다. 따라서 위상적 성질이 다를 수도 있다. 또 두 점사이의 거리는 두 점을 끝점으로 하는 선분의 길이로써 정한다면 직선상에는 거리 (metric)가 결정된다.

3. 각

종래의 각의 정의에 대하여 살펴 보자.

"한 점 O에서 그은 두 반직선 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$로 되는 도형을 각이라고 하며, 점 O를 각의 꼭지점, 두 반직선 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$를 각의 변이라고 한다."

2) [2] p. 19

3) Idid. p. 19

"∠AOB의 두변 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 O의 반대편에 있고 직선을 이룰 때 평각이라고 한다."

이러한 정의는 유크리드의 원본에서 유래한 것 같다.[4] 그러나 각의 정의는 이밖에도 여러가지가 있다. H. Scotten은 각에 관한 정의를 다음과 같이 세가지로 나누었다.[5]

i) 두 직선사이의 방향의 차(差)

ii) 한 변을 자신의 위치에서 다른 변의 위치까지 평면밖으로 벗어남이 없이 움직인 양(量)

iii) 한 점에서 그은 두 반직선 사이에 포함되는 평면의 부분.

이 세 가지 관점을 하나씩 분석하여 보면 i)과 ii)는 도형을 나타낸 것이 아니다. Scotten 자신의 연구처럼 i)은 직선위의 두 점사이의 거리(이것을 위치의 차이라고 하였다)에 해당하는 평면위의 개념이다. 다음 ii)는 Amaldi[6]가 연구한 것처럼 평면위에서 한 점을 중심으로 반직선이 회전한 양이다.

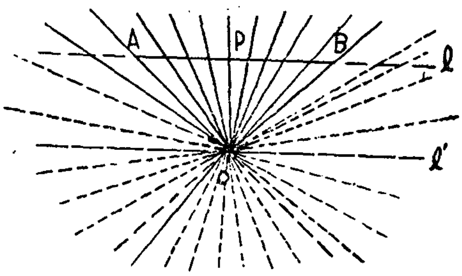
위의 i)은 거리의 개념이며, 이렇게 측도를 정의한다면 임의의 두 직선사이의 거리는 90°를 넘지 못한다. ii)는 회전에 의하여 형성된 도형(아직 이 도형이 무엇인지 정의되지 않았다)의 크기를 말한 것으로 우리는 이것으로 일반각(도형이 아니고 양이다)을 정의한다.

다음 iii)은 도형을 정의한 것이지만 앞서 든 "한 점에서 그은 두 반직선"과는 개념이 다르다 다시 여기에 대하여 G. Veronese의 정의를 살펴보자.[7]

"두점에 의하여 bounded된 직선의 일부분을 선분이라 하는 것처럼 반직선에 의하여 bounded된 반직선의 *cluster*의 한 부분을 각이라 한다."

Veronese는 반직선의 *cluster*를 다음과 같이 말하였다.

"직선 l 위의 모든 점과 직선 l 밖의 한 점 O를 지나는 직선들과 O를 지나 l에 평행인 직선 l'의 전체로서 이루어진 도형(평면)을 말한다."



또 평각에 대하여 그는

"한 각(an angle of the cluster)에서 경계가 되는 두 반직선이 서로 반대방향일 때 평각(flat angle)이라 한다."

고 하였고, 반직선의 *cluster*는 직선위의 점 대신에 평면위의 반직선으로 바꿈으로서 직선의 구조(linear system)에 비슷하다고 하였다.

그러면 다시 처음의 각의 정의로 돌아가서 각과 관련된 몇가지 용어의 뜻을 살펴보자.[8]

"각은 평면을 두 부분으로 분할한다.

이때 개반평면 OA—B와 개반평면 OB—A의 공통부분을 ∠AOB의 내부라 하며, ∠AOB와 ∠AOB의 내부의 점의 합집합의 여집합을 ∠AOB의 외부라 한다."

"각은 그의 내부와 외부의 공통 경계이며 내부나 외부의 어느 쪽에도 속하지 않는다. 만일 ∠AOB가 일직선을 이룰 때는 내부와 외부를 정할 수가 없음을 주의하여야 한다."

한편 각의 크기에 대한 정의를 살펴 보자.[9]

"∠AOB는 반직선 $\overrightarrow{OB}$가 O를 중심으로 하여 $\overrightarrow{OA}$의 위치에서 $\overrightarrow{OB}$의 위치까지 회전하므로서 생긴 도형이라고 볼 수 있다. 이 회전한 양을

---

4) Euclid's Elements Book I. (그리스어의 원문은 생략)
Def. 8 "*A plane angle is the inclination to one another of two lines in a plane, which meet one another and do not lie in the straight line*"
Def. 9 "*And when the lines containing the angle are straight, the angle is called rectilineal.*"

5) Scotten, H. : *Inhalt und Methode des planimetrishen Unterrichts*, II, 1893. pp. 94~183

6) Amaldi: *Questisni riguardnti le matematiche elementari*, I, .Bologna, 1912.

7) Veronese, G. : *Elementi di geometria*, part 1, 1904.

8) 李星憲 : 새교육과정에 따른 現代中學數學精解, 서울 : 開明社, 1966. p. 65

9) 김치영—김용태 : 중등수학 1, 서울 : 문호사, 1966, p. 156

"$\angle AOB$의 크기 곧, 각도라 한다. 따라서, 각의 크기는 반직선 $\overrightarrow{OB}$가 회전한 양으로써 결정된다."

각의 크기에 관한 정의와 성질을 좀 더 조사하여 보면, SMSG와 UICSM에서는 그 개념이 서로 다르다. SMSG에서는 먼저 두 점사이의 거리를 *measure of distance*라 하였고 각에서 두 반직선이 벌어진 정도를 *measure of angle*이라 하였다. 이것으로 보아 SMSG 에서는 각의 크기를 두 점사이의 거리와 같은 개념으로 보았으며, 따라서 우리가 생각하는 측도와는 그 개념이 다르다. 한편 UICSM에서는 두 점사이의 거리에 대해서는 *measure*라는 말을 쓰지 않았고, 길이, 면적, 체적등을 그 도형의 *measure*라 한다고 하였으며 각의 *measure*에 대해서만은 정확한 정의나 공준이 없었으며, 단지 교사용 지침서에 선분의 *measure*와 같은 개념이라고 하였다. 그외의 교과서에서도 다른 도형의 측도에 대해서는 명확히 다루었으나, 각의 측도에 대해서는 정확한 정의를 피하였다.

이것은 각의 개념이 명확하지 않았기 때문이다. 우선 종래와 같이 각을 정의하였을 때, 평면위에서 각의 전체의 집합은 Boolean algebra of sets나 ring of sets를 이루지 못하며, 따라서 위와 같이 생각한 각의 크기를 도형의 집합 함수로 도입하였을 때 측도로서 의의를 갖지 못한다. 이때까지 우리는 각을 도형으로서는 한 점에서 그은 두 반직선의 합집합으로 정의하였지만 크기로서는 그 각의 내부가 차지하고 있는 도형의 크기를 항상 생각하고 있었다. 따라서 도형과 그 크기에서 개념의 일관성을 갖지 못하였다.

그래서 여기서는 다음과 같은 각에 대응할 새로운 도형과 그 정의를 만들어 보았다.

"평면에서 한 점 O를 중심으로 반직선 $\overrightarrow{OA}$를 반직선 $\overrightarrow{OB}$의 위치까지 회전하였을 때 생긴 자취를 '간'이라 한다"

그러나 이것은 새로 용어를 늘이는 것은 아니다. 여기서 간이라고 한 것은 종래의 각과 혼돈을 피하기 위한 것이다. 이때 종래의 각은 간의 경계로서 나타낼 수 있다.

위의 정의는 직선에서 한 점 A를 다른 한 점 B의 위치까지 연속적으로 이동한 자취가 선분이 되는 것과 비슷하다. 평면은 한 점에서 그은 두 반직선에 의하여 두 개의 간으로 나누인다. 이때 큰 쪽을 우간, 작은 쪽을 열간이라 한다면, 종래의 우각, 열각에 대응하게 된다.

한편 경계가 되는 두 반직선(이것을 간의 변이라고 한다)을 포함할 때를 폐간, 포함하지 않을 때를 개간이라 한다면 선분에서와 같은 개념이 된다. 또 간의 내부를 그 도형에 포함되는 개간 중에서 가장 큰 것으로 한다면 이것은 각의 내부와 같게 되며, 반평면(종래의 평각에 대응하는 개념)에 대해서도 내부를 정의할 수 있다. 이것은 개반평면이 될 것이다. 물론 우간에 대해서도 내부를 정의할 수 있다.

한편 측도에 대해서는 전평면을 360°로 하고, 반평면을 180°로 하여, 간이 전평면에서 차지하는 비율로 크기를 정한다면 이것은 집합 함수로서의 의의를 가진다. 임의의 두 간에서 한 쪽을 다른 쪽으로 평행이동할 수 있을 때 같은 equivalence class에 속하도록 하면 이 equivalence class 전체의 집합은 Boolean algebra of sets가 되며, 특히 한 점 O를 중심으로 하는 간을 대표 원으로 나타낼 수 있다. 이때 간의 크기는 측도가 된다.

위와 같이 측도를 정하였을 때 간의 2등분선, 3등분선 등은 측도의 의미에서 도형을 2등분, 3등분한다.

한편 종래 정의하기 힘들었던 일반각에 대응하는 일반간을 쉽게 확장할 수 있다. 사실상 종래의 일반각은 도형이 아니고 크기만을 나타내었다. 그러나 일반간에서는 도형과 크기를 함께 생각할 수 있다.

간의 측도를 이와 같이 정의하였을 때 사실상 이때 까지 사용하였던 각도(각의 크기)는 거리(metric)으로서의 의미를 가진다. 두 점 사이의 거리를 우리는 두 점을 끝점(경계)으로 하는 선분의 길이로 정한 것 처럼 임의의 두 직선에 대하여 이 직선을 경계로 하는 간(4개가 생기므로 가장 작은 쪽)의 크기로서 두 직선이 이루는 거리로 정할 수 있다. 이때 평행인 두 직선은 같은 equivalence class에 속한다. 이것이 바로 종래

의 두 직선이 이루는 각이다.

각에 대한 개념의 근원을 생각할 때 Scotten의 분류 i)에서와 같이 어떤 기준이 되는 방향에 대한 한 방향의 차이에서 발생하였다. 따라서 두점 사이의 거리가 도형이 아니듯이 두 방향의 차이는 도형이 아니다. 여기에 대한 도형으로 두 방향이 나타내는 반직선의 합집합을 생각하게 되었다. 그리고 이 도형의 크기로서 원래의 방향의 차이를 생각하였다. 두 반직선의 방향의 차이가 도형의 측도가 될 수 없음은 곧 알 수 있으며, 이런 경우 연속적인 반직선의 회전이동의 자취를 간단한 도형으로 생각하기가 힘들었다. 이리하여 내부라는 말을 썼다. 그러나 각의 내부는 도형의 위상적 성질을 나타낸 것이 아니고 단지 관념에 의한 것이었다. 여기에 간을 정의함으로서 이 모든 것이 쉽게 해결된다. 즉 종래에 사용하던 각의 변, 내부, 외부 등의 뜻이 명확하여진다.

또 이와같이 하였을 때 다면각의 면은 모두 간으로 되어 도형의 차원이 다르더라도 서로 연관을 지을 수 있다. 이렇게 하여 추상화 및 일반화를 용이하게 할 수 있다.

4. 다각형과 단일 폐곡선

다각형에 대하여 우선 지금까지의 교과서에 나타난 정의를 살펴보면 몇가지 교과서를 제외하고는 모두 다음과 같은 개념으로 정의하고 있다.[10]

"다각형은 다음 조건을 만족하는 유한 개의 선분으로 이루어진 집합의 합집합이다.

i) 주어진 어느 선분의 끝점도 꼭 하나의 다른 선분의 끝점으로 되어 있다.

ii) 위의 i)의 조건을 만족하는 진부분 집합은 없다.

iii) 주어진 어떤 두 선분의 공통점도 각각 두 선분의 끝점이다.

iv) 공통인 끝점을 갖는 어느 두 선분도 같은 직선위에 있지 않다."

이 정의는 매우 구체적이며 논리적이기는 하나 현대수학의 특징인 추상화가 미약할 것이며, 도형의 개념이 매우 복잡하여 대수학, 기하학, 위상수학 등에서 알고 있는 성질을 연관시키기에는 퍽 힘이 들 것이다. 위상수학에서는 도형의 내부는 그 도형에 포함된다.

또 우리는 흔히 사면체의 면은 삼각형으로 이루어 졌다고 하지만 이것은 틀렸음을 알 수 있다. 뒤에 다시 연구하겠지만 3차원 공간위에서 다면체를 이와 같은 방법으로 정의하려면 우선 선분에 유사한 평면도형이 없기 때문에 곤란을 느끼며 구태여 정의하려면 많은 용어를 구사하여야 할 것이다.

한편 위의 정의로는 다각형의 둘레의 길이는 정의할 수 있지만 면적은 생각할 수가 없다. 대부분의 교과서에서는 정확한 정의없이 면적을 다루고 있다. 수학 교육의 현대화의 영향을 받은 몇 교과서에서는 이러한 것을 해결하기 위하여 새로운 용어를 쓰고 있다.

UICSM에서는 다각형에서 내부를 포함하도록 *region*이라는 말을 썼고, 그리하여 삼각형의 기호와 삼각형을 경계로하는 *region*의 기호도 구별하여 △, ▲로 나타내었다.

한편 SMSG에서는 다각형의 면적을 다각형으로 둘러싸인 *region*의 면적으로 생각한다는 단서를 붙였지만 별다른 기호는 사용하지 않았다.

그리고 Modern Geometry에서는 *region*이라는 말 대신에 *surface*라는 말을 사용하였다.[11] 여기서는 면적을 정의하기 위한 것이 아니고 다면체를 정의하기 위한 것이다.

참고로 이성헌 저 현대중학수학[12]에서는 2차원 3각형, 1차원 삼각형, 0차원 3각형이라는 용어를 사용하였으며, 2차원 3각형은 경계와 내부를 합친 도형이며, 1차원 3각형은 세 변의 합집합으로, 0차원 3각형은 세 꼭지점으로 되어있다.

이러한 개념의 번잡성과 사고 과정의 복잡성을 피하기 위하여 다각형에서 그 내부를 포함하도록 다간면을 만들어 보자 이렇게 하였을 때

10) 〔2〕 p. 227

11) 〔3〕 p. 417
"The set of the points on a polygon and all the points in the interior of each angle of the polygon is called a *polygonal surface*"

12) 이성헌 : 현대 중학 수학 2. 서울 : 동아출판사, 1965. p. 169

n 간면의 경계는 n 각형이 되기 때문에 n 간면이라는 용어를 구태여 만들 필요가 없으나 여기서는 혼돈을 피하기 위하여 달리 사용하였다.

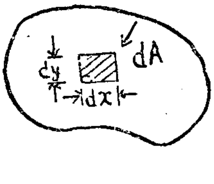
또 단일 폐곡선으로 둘러싸인 평면의 부분을 곡선면이라하여 위의 정의와 일관되게 한다. 원면[13] 타원면[14] 등도 같은 방법으로 정의한다.

단일 폐곡선의 특별한 경우로 다각형을 생각하는 것처럼 다각면을 곡선면의 특별한 경우로 생각한다. 여기서 용어에 주의할 것은 곡선면과 곡면의 구별이다. 곡면은 3차원 공간에서 곡면을 말하는 것이고, 즉 곡면체의 경계인 면의 일부 또는 전부를 말하는 것이고, 곡선면은 그 경계가 곡선으로 되어 있는 평면 도형이다.

평면 도형에 대하여도 그 경계가 도형에 포함될 때는 선분이나 간에서와 같이 "폐—"라는 접두어를 붙이고, 경계가 모두 포함되지 않을 때는 "개—"라는 접두어를 붙여서 구별한다.

면적은 UICSM에서 채택하고 있는 개념과 같이 정의한다. 사실 종래에도 면적을 정의할 때는 내부를 생각하였다.

이 때 정적분 $\int_R dA = \int\int_R dxdy$ 는 면적으로서의 의미를 가진다.



다간면, 곡선면의 개념이 종래의 개념보다 좋은 점을 몇가지 들어보자.

i) 도형의 내부, 외부, 변(경계)은 위상수학에서의 정의와 같은 개념을 가진다. 따라서 위상수학 및 해석학에서 이미 알고 있는 성질을 그대로 받아 들일 수 있다.

ii) 평면에서 도형 전체의 집합은 Boolean algebra of sets를 이룬다. 따라서 면적의 개념이 명확하여지며, 이렇게 정의 되었을 때 면적은 측도로서의 의미를 갖는다.

iii) 다간면에서 무게심은 물리학에서 무게심과 같은 뜻이 되며, 선분의 중점과 같은 개념이 된다. 종래의 다각형의 무게심은 별로 물리학적인 뜻이 없다. 마찬가지로 종래의 삼각형의 중선도 삼간면의 중선이 될 때 비로소 뜻이 명확하여 진다.

iv) 다간면을 삼간면으로 분할할 수 있다. 원래 분할이란 어떤 집합을 서로 공통부분이 없는 부분 집합으로 나누었을 때 이를 부분집합의 합집합이 원래 집합이 되어야 한다. 이때까지 우리는 분할에서 이웃하는 두 삼각형의 공통변은 두 삼각형에 모두 포함되므로 엄밀한 뜻으로 분할이 될 수 없지만 면적의 개념만으로 분할이라는 용어를 사용하여 왔다.

v) 접미어 "—형"이라는 말은 도형의 차원을 나타내지 못했지만 "—면"이라는 접미어를 씀으로서 차원을 쉽게 알 수 있다. 참고로 선이라는 말은 1차원을 나타내며, 면은 2차원을 체는 3차원을 나타내도록 한다면 도형의 차원이 명확하여 편리하다.

vi) 다간면은 간의 집합으로 쉽게 나타낼 수 있다. 예로서 종래의 삼각형은 세 선분의 합집합으로 나타내었으나 삼간면은 세 간의 공통부분으로 나타내어 지며, 종래 크기만으로 생각하였던 내각이라는 용어에 대하여 다간면의 내간은 크기 뿐만 아니라, 도형으로서의 의미도 갖는다. 사고의 전개에서 집합 연산중 공통부분이 합집합보다도 쉬우며, 연산을 쉽게 추상화 시킬 수 있다. 해석기하학과 linear programming에서 방정식이나 부등식을 나타낼 경우 다각형은 다각면보다 많은 방정식과 부등식을 요구하게 된다

---

13) UICSM 에서는 *cicular region* 이라 하였으며 *Modern Geometry* [3]에서는 *cicular surface* 로 쓰고 있다. 또 Simmons, G. F.: *Introduction to Topology and Modern Analysis*, New York: McGraw-Hill Book Co., 1963. p. 5 에서는 *Disc*를 쓰고 있다. 또 종래의 원에 대해서 Halmos, P,R. *Measure theory*, princeton: D. Van Nostrand Co., 1950. p. 12 에서는 $\{(x, y) : x^2+y^2=1\}=$ *the circumference of the unit cicle in the plane*이라 하여 원과 원주를 구별 하였다.

14) 타원체면은 3차원 공간위의 도형인 타원체의 경계이고, 타원면은 평면위의 도형이다.

5. 이면각과 다면각

평면도형인 각에서 간을 생각한 것과 같이 이면각에서 이면간을 생각하여 보자. 3차원 공간에서 반평면이 그 경계인 직선을 회전축으로 하여 회전 이동할 때 자취를 이면간이라 한다. 즉 한 직선에서 만나는 두 개의 반평면은 공간을 두 부분으로 나눈다. 이때 각각을 이면간이라한다.

그러면 이면간의 측도를 정하는 방법을 생각하여 보자. 우선 3차원 공간 전체의 측도를 180°로 정하고 이면간의 측도는 전공간에서 이면간이 차지하는 비율에 따라 정한다.

이렇게 이면간 및 그 측도를 정의한다면 종래의 이면각(두 반평면의 합집합)은 이면간의 면(경계)이 되며 이면각의 크기(이면각의 평면각)는 두 반평면사이의 거리로서 의의를 가진다.

3차원 공간에서 임의의 두 평면에 대하여 그 두 평면을 경계로 하는 이면간(4개가 생긴다) 중에서 가장 작은 쪽의 크기를 원래의 두 평면 사이의 거리로 한다면, 이것은 거리의 공리를 만족한다. 이때, 같은 equivalence class에 속하는 평면은 모두 평행이다.

한편 다면각에 대해서도 같은 개념으로 다면간을 정의할 수 있다. 이때 다면간의 경계인 면은 모두 평면도형인 간으로 되어있다.

또 다면간이 전공간에서 차지하는 비율에 따라 측도를 정할 수 있다. 이렇게 측도를 정하였을 때 이면간은 다면간의 특별한 경우로 포함되므로 서로 연관이 있어 편리하다. 종래의 다면각에서는 크기를 정할 수가 없었다.

이와 같이 정의하는 것이 타당한 이유는 평면도형인 간과 비슷하므로 생략한다.

6. 다면체와 곡면체

종래 우리들은 다면체에 대하여 그 경계를 이루는 면의 합집합으로 정의하였다. UICSM 과 SMSG 에서는 각뿔, 각기둥, 원뿔, 원기둥에 대해서는 내부를 포함하도록 정의하였다. 그러나 두 교재에서 다면체의 정의는 달리하고 있었다. UICSM 은 각뿔, 각기둥 등을 다면체라하여 내부를 포함 시켰지만, SMSG 에서는 다면체는 경계인 면만을 말하고 다시 내부를 포함시킨 도형을 *polyhedral region* 이라고 하였다.

이러한 현상은 종래 경계만으로 정의하던 방법에 차차 내부를 포함시키는 방법으로 바뀌고 있다는 것을 말해 준다.

이와 같이 내부를 포함시켰을 때 타당한 점은 평면 도형인 다간면의 경우와 같다.

한편 구(球)에 관한 정의는 UICSM 과 SMSG 가 일치하고 있었지만 모두 경계인 표면만으로 정의하고 있었다. 그러나 몇가지 전문서적에서는 달리 정의하고 있는 것을 발견할 수 있다.[15)]

한편 SMSG 와 UICSM 에서도 구의 체적을 정의하기 위하여 *spherical region*, *spherical solid* 라는 말을 각각 새로 정의하고 있었다. 여기에 해당하는 용어로 구체를 사용하고, 종래의 구에 해당하는 말을 구면으로 바꾸어 혼돈이 없게 하였으면 좋겠다. 구체뿐만 아니라 다른 곡면체에 대하여도 마찬가지로 정의하여 혼돈이 없도록 하였으면 좋겠다.

Ⅳ. 결론 및 제언

이때까지 우리가 도형을 지도할 때 일관된 개념으로 지도하지 않은 것만은 틀림없는 사실이다. 이렇게 함으로서 우리는 복잡한 사고를 하였고, 여러가지 낭비를 가져왔다. 또 어떤 문제는 너무나 개념이 복잡하여 문제의 해결이 어렵게 되었다.

이에 대하여 여러가지 해결의 방안이 있겠으나, 여기서는 차원과 위상적 성질 및 측도의 이론을 빌려 이제까지 사용되어온 도형을 분석하고, 이의 새로운 해결로서 새로운 용어와 정의들을 만들어 보았다.

이제까지의 도형은 정의가 말로서 나타내기 쉽다고만 하여 도형에 대한 사고를 어렵게 하였다. 또한 도형의 정의를 기호로 표시하기에는 너무

---

15) Simmons, G. F.: *Introduction to Topology and Modern Analysis*, New York: McGraw-Hill Book Co, 1963., p. 66 에서 "*the closed sphere* $Sr[x_0]$ *with center* x_0 *and radius* r *is defined by* $Sr[x_0]=\{x : d(x, x_0)\leq r\}$ 이라 하였고 P. 59에서, *open sphere* 는 $Sr(x_0)=\{x : d(x, x_0) < r\}$ 로 정의 하였다. 그러나 같은 정의를 Husain, T: *Introduction to Topological Group*, Philadephia: W.B, Sanders Co., 1966. p. 3 에서는 *clased ball*,. *open ball* 이라 하였다.

나 복잡하였다. 여기서 우리는 기초적인 상태에서 도형을 분석하고 이에 대한 정확한 정의를 내려 적어도 수학 자체내에서만은 혼돈없이 사용하여야 겠다. 이에 이 연구가 조금이라도 도움이 되기를 바라면서 아래와 같이 몇가지 제언을 한다.

i) 기하학에서 사용하는 도형의 정의는 그 정의에 따라 달라질 수 있으나 수학의 교육적인 입장에서 가장 타당하고 또 수학의 다른 분야에서 쉽게 전환하여 사용할 수 있도록 하는 것이 좋겠다.

ii) 위상수학에서 나온 여러가지 용어, "폐—" "개—", 내부, 외부, 경계…… 등의 용어가 초등기하학에서 같은 뜻을 갖도록 한다,

iii) 도형에서 측도의 개념은 수학 자체 뿐만 아니라 일상생활에서도 중요한 것이다, 이의 정확한 개념을 습득시켜 정확한 도형의 개념과 측도의 개념을 지도하여야 할 것이다. 또 측도와 거리(metric)을 구분하여 서로의 관계를 이해하고, 또 다른 점도 알아야겠다.

iv) 도형의 정의는 쉽게 일반화 시킬 수 있고 따라서 도형의 추상화가 용이하여야 할 것이다. 즉 차원마다 다른 개념으로 도형을 정의하게 되면 일반적인 차원에서 도형을 말할 때는 많은 혼란이 야기된다.

끝으로 이 논문이 나오기까지 여러가지로 돌봐 주신 분들에게 감사드린다.

그리고 이에 대한 여러사람들의 의견을 기다린다.

참 고 문 헌

(1) SMSG: *Geometry*, Part I & II, New Haven: Yale University press. 1960

(2) UICSM: *High School Mathematics*, Conrse 2, Boston: D.C. Heath and Co., 1965

(3) Henderson, K. B. et al: *Modern Geometry: Its Structure and Function*, New York: McGraw-Hill Book Co., 1962

(4) Moise, E.E.—Downs, F.L.: *Geometry*, Reading(Mass.): Addison-Wesley Pub. Co., 1964

(5) Kelle, P.J.—Ledd, N.E.: *Geometrv*, Chicago: Scott, Foreman and Co., 1965

(6) McSwain, E. T. et al: *Mathematics* 7, Summit(N.J.): Laidew Brother, 1963

(7) Heath, T.L.: *The Thirteen Books of Euclid's Elements*(2nd ed.), Vol. 1, 2 & 3, New York: Dover Pub. Co., 1956

(8) Young, J.W.A.: *The Teaching of Mathematics*, New York: Nongmans, Green and Co., 1920

(9) Butler, C.H.—Wren. F.L.: *The Teaching of Secondary Mathematics*(4th ed.),New York: McGraw Hill Book Co., 1965

(10) Lefschetz, S.: *Introduction to Topology*, Princeton: Princeton University Press, 1949