≪論　　說≫

互除法에 依한 最大公約數의 指導

金　　雄　　培

1. 互除法을 採用하게 된 動機

筆者가 지난 5月 23日 光州市內 算數科 circle 集會에 參席하여 "分數計算의 基礎事項"이라는 題目으로 이야기를 한바 있다. 素因數 分解法에 依한 最大公約數 求하기까지를 마치고 座談會로 들어 갔을 때 某 敎師로부터 다음과 같은 質問에 接했다. 「數가 큰 2數의 G.C.M도 쉽게 찾을 수 있는 方法이 아쉽다」라고. 實地로 아는 이는 國民學校 5學年 單元 「분수의 덧셈과 뺄셈」에서 最大公約數를 指導하는 途中 부닷친 아동들의 質問이었다는 것이다. 그런데, 現 國民學校 課程에 互除法이나 素因數 分解法에 依한 最大公約數 求하기는 採用되어 있지 않기 때문에 이들의 方法을 兒童에게 說明하여 理解시키기가 어려운 일이다.

直接的으로는 最大公約數가 簡單하게 求해져서 約分을 잘 할 수 있게 된다는 點과 國民學校에서 整數의 四則計算이 完成되므로 그 機會에 整數에 關한 性質을 알게 해 둔다는 2가지 理由로 互除法의 具體的인 指導가 必要하다고 하겠다.

2. 最大公約數를 求하는 方法

最大公約數를 求하는 方法에는 다음의 몇가지를 들 수 있다.

① 約數表를 使用하는 方法[1]

② 사다리 計算의 方法(一名 階段式 方法)[2]

③ 素因數 分解의 方法[3]

④ Euclid의 互除法

3. Euclid의 互除法의 理論的인 根據

두 개의 自然數를 A, B라 하고 A≧B라 함. A를 B로 나누어서 나눠 떨어지면 B는 A와 B의 G.C.M.이다. 나눠 떨어지지 않을 때에는 그의 整數몫 Q_1과 나머지 C를 求한다. 그러면

$$A=Q_1B+C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

가 되므로 $A-Q_1B=C\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

이다. (2)에서 A와 B의 公約數는 또 C의 約數이기도 하다.[4] 따라서 A와 B의 公約數를 求하는 代身 B와 C의 公約數를 求하면 된다. 이 때 B>C이므로 앞에서와 꼭 같은 方法으로 B를 C로 나누어 整除가 되면 C는 B와 C의 G.C.M.이 되고 不然이면,

$$B=Q_2C+D$$

註 1) 約數表

數	約　　數	約數의 個數
1	1	1
2	1, 2	2
3	1, 3	2
4	1, 2, 4	3
5	1, 5	2
⋮	⋮	⋮
100	1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100	9

12→	$\boxed{1,}$	$\boxed{2,}$	3,	$\boxed{4,}$	6,	12	
18→	$\boxed{1,}$	$\boxed{2,}$		$\boxed{4,}$	7,	14,	28

G.C.M.=4

註 2) 現 國民學校에서 採用되고 있는 方法.
이 方法은 兒童들이 論理的인 것은 모르고 機械的인 方法만을 알고 있기 때문에 3數 以上의 境遇에는 最小公倍數를 求할 때의 境遇와 混同이 일어나 誤謬가 많이 나타난다. 其實 大學生들 中에도

$$\begin{array}{r|rrr} 8) & 24 & 48 & 12 \\ \hline 3) & 3 & 6 & 12 \\ \hline 2) & 1 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

로 인하여 G.C.M.=8×3×2=48, L.C.M.=8×3×2×2=96이라고 하는 學生이 相當數 있음에는 놀라지 않을 수 없다.

註 3) 本質的으로는 이 方法이 優秀하다. 素數, 素因數 分解에 對한 指導를 2時間 程度 課한 後이면 充分히 理解할 수 있다.

24=	2	2	2	3		
36=	2	2		3	3	
G.C.M	2	2		3		=12
L.C.M	2	2	2	3	3	=72

註 4) 高校에서 배운 公約數의 性質

性質 1. B가 A의 約數일 때 B는 또 A의 倍數의 約數이다.

$A=mB,\ nA=n(mB)=nmB$

性質 2. C가 A 및 B의 公約數이면 C는 A±B의 約數이다.

$A=mC,\ B=nC\ \therefore A\pm B=mC\pm nC=(m\pm n)C$

이는 $B-Q_2C=D$

이므로 C와 D의 G.C.M.을 求한다.

이렇게 나눠 떨어질 때까지 反復하는데, 最後에 나눠 떨어 졌을 때의 除數가 G.C.M.이 되는 것이다.

具體的으로 91과 35의 G.C.M.을 求해 보면 다음과 같이 된다.

$\frac{91}{35}=2\frac{21}{35}$, $\frac{35}{21}=1\frac{14}{21}$, $\frac{21}{14}=1\frac{7}{14}$, $\frac{14}{⑦}=2$, G.C.M.$=7$

4. Euclid의 互除法에 依하여 最大公約數를 求하는 具體的인 指導方案

• (169, 221) 이 2數의 最大公約數를 國民學校 段階에서 求하기란 쉽지 않다. 設或 素因數分解의 方法에 對한 것을 알고 있다손 치더라도 約數가 13이기 때문에 2, 3, 4, ……, 13까지의 數로 나눠 보아야 하므로 悲鳴을 울릴는지 모른다. 그래서 이와 같이 큰 2數의 最大公約數를 쉽게 求할 수 있는 方法을 學習한다는 것을 確認시킨다.

• 세로의 길이가 8cm이고 가로의 길이가 20cm인 직4각형을 만들어 그 직4각형에 빈틈이 없이 깔 수 있는 정4각형을 찾게 한다.

1邊이 1cm인 정4각형
1邊이 2cm인 정4각형
1邊이 4cm인 정4각형
으로는 꼭 채울 수 있음을 理解시킨다(그림 1, 2, 3, 4).

• 1cm, 2cm, 4cm는 (8cm, 20cm)와 어떤 관계가 있는지를 알아 보게 한다.

8의 약수; 1, 2, 4, 8
20의 약수; 1, 2, 4, 5, 10, 20
따라서 公約數는 1, 2, 4

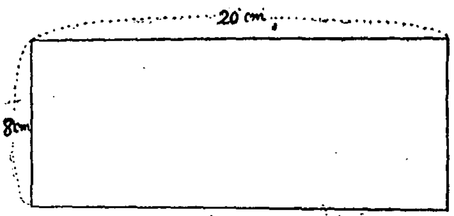

그림 1

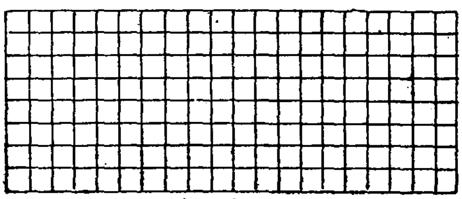

그림 2

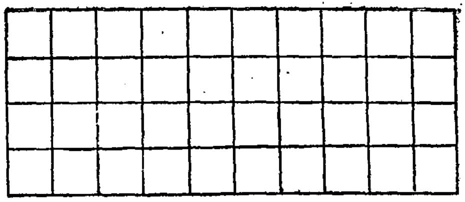

그림 3

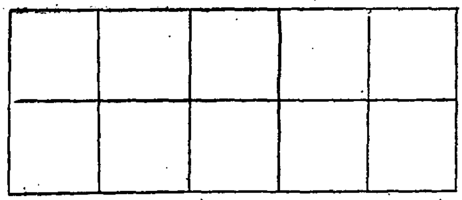

그림 4

4는 最大公約數임을 알 수 있다. 兒童들은 最大公約數를 정4각형을 通해서 發見하는 것이다.

• 다음 세로의 길이가 8cm, 가로의 길이가 20cm 되는 직4각형을 될 수 있으면 큰 정4각형으로 맞추어 깔아 보기로 한다(그림 5).

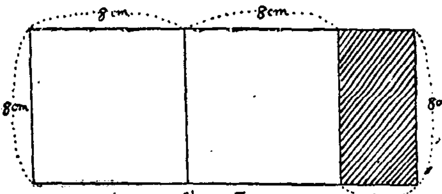

그림 5

兒童들은 1邊이 8cm인 정4각형으로 맞추어 깔면 될 것을 發見한다. 그러면 (20cm−8cm×2)×8cm가 되는 직4각형이 남는다.

• 1邊이 8cm인 정4각형으로 맞추어 깔고 남은 (4cm, 8cm)가 되는 직4각형을 다시 큰 정4각형으로 깔아 본다(그림 6).

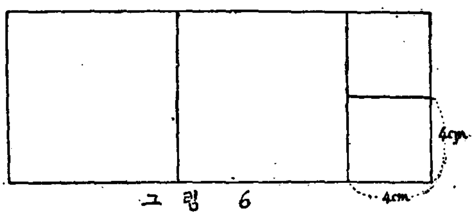

그림 6

• 여기서의 留意點은 세로의 길이를 1邊으로 하는 정4각형을 오려내고, 남은 직4각형에 맞추어 깔 수 있는 정4각형을 찾아내면 된다는 것을 理解시켜야 한다.

• 그림 6에서 4cm인 정4각형의 1邊을 延長

해 놓고 보면 (4, 8)의 最大公約數는 4이고, (8, 20)의 最大公約數도 4라는 것을 알 수 있다 (그림 7). 따라서 (4, 8)에서 求하는 便이 쉽다는 것을 理解시킨다.

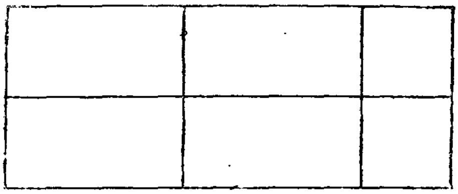

그림 7

◦(그림 5, 6)을 式으로 綜合하면 세로의 길이 8cm로, 가로의 길이 20cm를 잘랐으니까

20cm÷8cm=2…4cm

또 (4cm, 8cm)가 되는 직 4 각형을 (4cm×4cm)인 정 4 각형으로 잘랐으니까 8cm÷4cm=2로 되어 整除된다. 즉 4cm는 (8cm, 20cm), (4cm, 8cm)의 最大公約數이다. 이를 다음과 같이 計算하여 求한다.

```
     2   2
 4)  8)  20
 ↑   8   16
 |   0    4
 |________|
```

◦一般化를 圖謀하기 爲하여 15와 36의 境遇를 들어 보면,

먼저 1邊이 15가 되는 정 4 각형이 몇 개 나오는가를 본다. 이 때에는 2개 나오고, 세로가 15 가로가 6이 되는 직 4 각형이 남는다(그림 8). 이 직 4 각형을 나머지인 6으로 잘라가면 2개 나오고, 세로가 3, 가로가 6이 되는 직 4 각형이 남는다(그림 9). 또 이 직 4 각형에 맞추어 깔 수 있는 정 4 각형은 1邊의 길이가 3이 되는데 이 3이 求하고자 하는 最大公約數이다(그림 10).

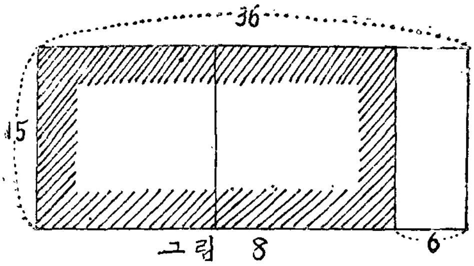

그림 8

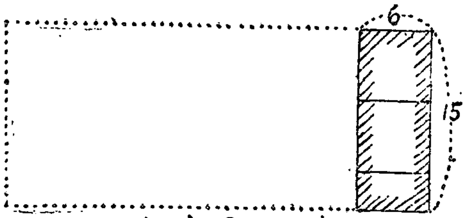

그림 9

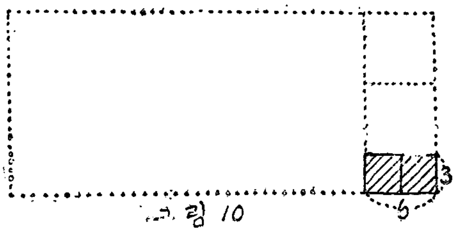

그림 10

計算하는 方法은 큰 수를 작은 수로 나누어 가는데, 나머지로 젯수를 차례 차례 나눠 가서 整除될 때의 젯수가 G.C.M.이 되는 것이다.

```
      2
15)  36
     30
      6

      2
 6)  15
     12
      3

      2
 3)   6
      6
      0
```

```
     2      2      2
 3)  6 )   15 )   36
 ↑   6     12     30
 |   0      3      6
```

◦(169, 221)의 境遇

```
       4       3       1
 13)  52)    169)    221
      52     156     169
       0      13      52
```

參考文獻

國民學校 敎科書　산수 5-1~6-2
中谷太郞 著　整數の新しい指導
長妻克亘 著　數と式の新しい指導
明治圖書 刊　算數敎育 No. 87, No. 105, No. 112, No. 113
國土社 刊　數學敎室 No. 176

(光州敎育大學)