講 座

Analog Simulation 解說 (Ⅰ)

李 樂 周*

1. 緖 言

Analog simulation 의 目的은

1. 動的特性을 갖는 物理的系(physical systems)의 解析을 하는데 있다. 즉 解析코저 하는 系가 複雜해서 初期條件이나, 外部로 부터의 勵起(excitation)가 系의 特性으로 말미아마 어떻게 應答될 것인지 알아내기 힘들때, 또는 微分方程式으로 그 系의 出力(output)이 表現되었으나 그 方程式을 풀기가 힘들때 有用한 方法으로 쓰이게 된다.

2. 動的特性을 갖는 系의 特性을 要求條件에 맞도록 決定하는데 있다. 즉, 初期條件이나 外部로 부터의 勵起가 주어졌을 경우에 系로 부터 願하는 應答을 얻고저 할때, 이를 滿足하는 系의 特性은 普通 無限히 많은 境遇가 있을 수 있다. 그 中에서 가장 適合한 境遇를 擇하는 問題, 즉 設計를 위해서 有用하게 쓰인다.

3. 費用과 時間을 덜 드리고 系의 應答을 보고저 하는데 있다. Analog computor 가 digital computor 에 比해서 價格이나 使用料가 쌀 뿐만아니라, 習得하고 操作하는데 時間이 적게 걸리며, 結果를 記錄紙上이나, CRO (Cathode Ray Oscilloscope)上에서 곧 볼수가 있다.

以上과 같은 目的中에서도 設計를 위한 方便으로 가장 많이 使用되고 있으며, 複雜한 系나 풀기가 힘든 微分方程式으로 運動이 表示 될때는 解析的方法, 圖式解法 또는 digital computor 로 가장 適合한 系의 構成特性들을 찾아내기란 상당히 힘든 일이여서 近間에 이르러서는 analog simulation 의 方法이 相當히 普及, 發展되었고, 또 digital computor 와 連結해서 使用하는 方法도 發達되어 가고 있다.

Analog simulation 을 위해서는

1. 實際의 系를 數學的模型(mathematical model)으로 바꾸고,

2. 이 模型을 그 特性을 바꾸지 않고 analog computor 에서 다루기 좋도록 變形하고,

3. 이를 computor 를 使用해서 實際의 系에 關해서 알고저 하는 것들을 살피게 된다.

첫 順序에 關해서는 紙面關係上 省略하기로 하며, 둘째 및 세째 順序에 對해서만 言及하기로 한다. 이 解說은 大學課程에서의 機械振動學이나 動力學 및 一般電氣工學이나 一般電子工學에 對한 知識을 갖춘 것으로 前提한다.

2. 基本 構成要素

우선 가장 基本的인 要素를 잘 理解하므로서 簡單한 線型微分方程式을 푸는 것 부터 始作하기로 한다. 이 章을 읽으므로서 computor 에 對해서 어느 程度 익숙해 질 것이며, 後에 複雜問題와 부딪쳐도 自信을 갖게되기를 바란다.

Analog computor 에서는 物理的量 例컨데 變位, 速度, 加速度, 힘 및 偶力등이 電壓(voltages)으로 表示된다.

* 正會員, 서울大學校 工科大學

즉

$$S_t = 80\text{volts} \Big/ (\text{in/sce})$$

는 80 volts가 1 in/sec의 速力을 나타낸다. analog computor는 보내진 電壓에 數學的인 操作을 하는 電子裝置의 集合體이나, 그 機能만을 알면 足하고, 그 속의 構成과 理論에 구애되지 않아도 實際의 使用에 不便을 느끼지 않을 것이다. 操作과 記錄에 對해서는 製作會社에서 發行한 說明書를 읽으면 數時間內에 알게 될 것이다.

2·1. 電氣回路

抵抗 및 capacitor에 있어서의 電流와 電壓과의 關係는 각각

$$i = \frac{e}{R}, \tag{2.1}$$

$$i = C\frac{de}{dt} \tag{2.2}$$

단, e = 電壓, volts,

i = 電流, amp,

R = 抵抗, ohms,

C = capacitance, farads

Kirchhoff의 法則은 electric junction으로 흐르는 電流의 合이 O임을 말하고 있다.

즉 junction에서

$$\Sigma i = o \tag{2.3}$$

Analog computor의 回路圖에서는 接地의 表示를 하지 않는 것이 常例로 되어 있는데, 이는 computor 및 각 構成部分들이 內部에서 이미 接地되어 있어서 省略하고 있다.

Potentiometer는 重要한 構成要素의 하나로서 Fig. 2.1(a)와 같은 可變抵抗器이다. 그림과 같이 마추었을때

$$e_o = ae_i \tag{2.4}$$

단 $0 \leq a \leq 1$,

e_o : 出力電壓, e_i : 入力電壓

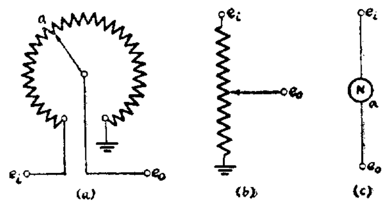

Fig. 2·1 Potentiometers

Fig. 2·1(b)는 機能圖이고, Fig. 2·1(c)는 computor 回路線圖에서의 記號이다. 圓 속의 文字 N로써 potentiometer의 番號를, 그리고 小數 a로 마춘 눈금을 나타낸다.

2·2. 合算增幅器(Summing Amplifier)

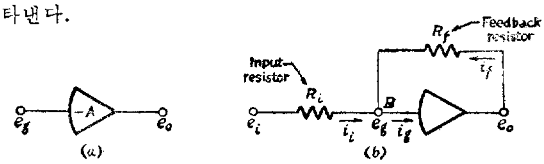

Fig. 2·2 The operational amplifier

增幅器에 對한 記號는 Fig 2·2(a)와 같으며, e_g는 格子電壓(grid voltage), e_o은 出力電壓이고, A는 增幅器의 gain이다. 이때 e_g와 e_o사이의 關係는

$$e_o = -Ae_g \tag{2·5}$$

이며, 大概의 computor에 있어서 A는 $2\times10^4\sim10^8$의 값을 가진다. 지금 $e_g = 1$ volt라면 上式으로 부터 e_o은 $2\times10^4\sim10^8$ volts의 크기를 가질 것이지만, 增幅器의 飽和電壓으로 말미아마 e_o은 制限을 받는다. 規準電壓(reference voltage)이 100 volts인 computor에서 飽和電壓 e_s는 約 170 volt이고, 10 volt computor에서는 約 17 volts이다. 增幅器가 Fig 2·2(b)와 같이 結線되었을 때는 이를 合算增幅器라고 稱한다. Kirchhoff의 法則을

合流點 B 에 適用하면,

$$\Sigma i = i_i + i_f - i_g = 0$$

이에 電流-電壓關係를 代入하면

$$\frac{e_i - e_g}{R_i} + \frac{e_o - e_g}{R_f} = i_g$$

그러나 i_g 는 增幅器에 있어서 극히 적으며, i_i 와 i_f 에 比해서 無視해도 좋다. 즉 $ig = 0$. 따라서 上式으로부터 e_o 을 求하면

$$e_o = -\frac{R_f}{R_i} \frac{e_i}{1 + \frac{1}{A}\left[1 + \frac{R_f}{R_i}\right]}$$

그러나 A 가 甚히 큰 값을 갖이므로 $\frac{1}{A}$ 를 0 으로 近似시키면

$$e_o = -\frac{R_f}{R_i} e_i \tag{2·6}$$

結局 Fig 2·2(b)의 回路는 入力電壓에 $\frac{R_f}{R_i}$ 를 곱하고, 그 符號를 바꾸는 結果를 가져옴을 알 수 있다. 以上의 誘導에서 i_g, 따라서 e_g 를 0 으로 놓았으므로 Fig 2·2(b)에서의 合流點 B 는 接地한 것과 같아진다. 이와같이 생각해서 B 에 Kirchhoff 의 法則을 適用해도 같은 結果를 얻게 된다. 萬一 $R_i = R_f$ 이면 合算增幅器는 符號만을 바꾸는 役割을 하게 되며, 이때 符號變更回路(inverter)라고 稱한다.

다음에 Fig 2·3 의 回路를 생각하자.

$$\Sigma i = i_1 + i_2 + i_3 + i_f = 0.$$

고로

$$\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2} + \frac{e_3}{R_3} + \frac{e_0}{R_f} = 0.$$

e_0 을 구하면

$$e_0 = -\frac{R_f}{R_1} e_1 - \frac{R_f}{R_2} e_2 - \frac{R_f}{R_3} e_3 \tag{2·7}$$

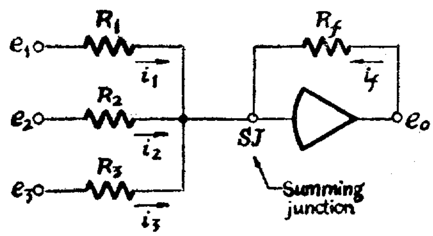

Fig. 2·3 A summing amplifier

따라서 Fig. 2·3 의 回路는 入力電壓들을 각각 入力側 抵抗과 回送抵抗(feedback resistor) R_f 로 定해지는 常數로 入力電壓을 곱하고, 그 符號를 바꾼 다음에 合한 出力電壓을 가져온다. 이로서 合算增幅器라 稱한 뜻이 自明해 진다. 留意해 둘 것은 3개의 入力側 抵抗 R_1, R_2, R_3, 과 R_f 가 모두 한 共通點 SJ(summing junction)에서 連結되고 있는 點이다. 100 volt computor 에서는 大槪 入力側 抵抗과 回送抵抗으로 0.1 및 1 megohm 의 두가지를 쓸 수 있도록 되어 있고, 10 volt computor 에서는 0.01 및 0.1 megohm 의 두가지가 보통이다.

例로서 Fig. 2·4 와 같은 回路에 對한 出力電壓을 求해 보자. 式(2·7)을 利用해서

$$e_o = -\frac{1}{1}(60) - \frac{1}{0.1}(-3) - \frac{1}{1}(50\cos 8\,t)$$
$$= -30 - 50\cos 8\,t$$

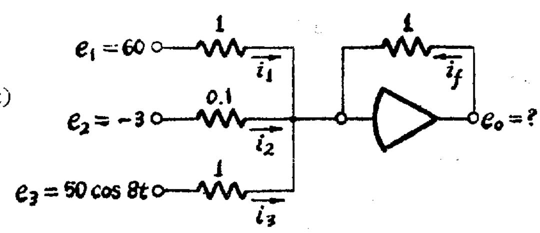

Fig. 2·4

2·3. 積分增幅器(Integrating Amplifier)

Fig. 2·5 와 같이 回送 capacitor C 를 갖는 增幅器로서, 스윗치가 넣어지는 瞬間에 C 에서의 電荷는 0 이다. 스윗치가 닫히고, 回路가 作動을 始作하면,

$$\Sigma i = i_i + i_f = 0$$

고로

$$\frac{e_i}{R_1}+C\frac{de_0}{dt}=0$$

結局

$$de_o=-\frac{e_i}{R_1C}dt.$$

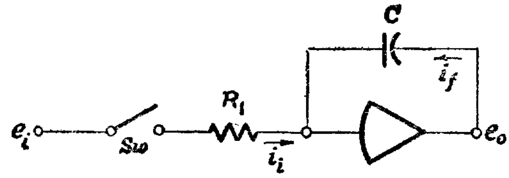

Fig 2.5 An integrating circuit

積分하면,

$$e_o=-\frac{1}{R_1C}\int e_i\,dt \qquad (2\cdot8)$$

이며, $t=0$ 때 $e_o=0$ 이므로 積分常數는 0이다. 따라서 Fig. 2•5의 回路는 入力電壓을 時間에 對해서 積分하고 $\frac{1}{R_1C}$ 인 常數로 곱한 다음에 符號를 바꿈을 알수 있다. 모든 computor 에서 C 의 크기를 microfarads(μf)로 表示하므로 앞으로는 單位를 빼고 數値만으로 表示하겠다. 지금 R_1=megohm 이고, $C=1\,\mu f$ 이면,

$$\frac{1}{R_1C}=\frac{1}{[1(10^6)]\,[1(10^{-6})]}=1$$

이며, 時間의 逆數 즉, $\frac{1}{t}$ 의 單位를 갖는다. 100 volt computor 에서는 0.1 및 $1\,\mu f$ 의 두가지 中 하나를 選擇해서 쓸 수 있도록 되어 있는 것이 普通이나, 0,01 과 0,001 μf 로 되어 있는 것도 있다. 10 volt computor 에서는 10 μf 의 것 만이 쓰이고 있다.

實際에 있어서는 Fig 2•5 에서와 같은 스윗치로 回路를 作動케 하는 것은 거이 없다. Computor 에는 始動과 同時에 어떤 定해진 初期電壓을 마련하도록 capacitor C에 帶電되어져 있게금 되어 있어야 하며, Fig 2•6은 이와 같이 하는 한 方法을 보여주고 있다. 즉 스윗치 S_1은 HOLD 位置에 있고, S_2가 닫히면 capacitor 는 電壓 V_0 까지 帶電이 되며, 이때 $e_0=+V_0$ 가 된다. S_1이 SJ로 가서 닫히고, S_2가 열리면 積分增幅器의 回路는 完成이 되어 V_0을 初期條件으로 하는 積分이 施行된다. 大概의 computor 에서는 이 스윗치들을 하나의 主스윗치로 動作하는 relay 로 作動되는데, 그 까닭은 스윗치의 作動이 瞬間的이어야 하고, 어떤 全體 回路에 들어 있는 積分增幅器들이 모두 同時에 作動하도록 하여야 하기 때문이다. 그리고 문제를 computor 로 풀다가 잠시동안 中斷하고, 出力電壓들을 檢討해 본다든가, 또는 potentiometer, 抵抗 및 capacitor 를 다시 調節하고 싶은때가 있다. 이럴때는 S_1 은 HOLD 位置에 두고, S_2를 열면 된다. 願했든 測定이나 變更을 한 後에 中斷했든 點으로 부터 다시 繼續할려면 S_1 만을 SJ 位置로 닫으면 된다. 以上과 같은 모든 機能을 다 하도록 하기 위해서는 主스윗치에 3位置 즉, RESET, OPERATE 및 HOLD 가 마련되어 있으며, Fig 2•6과 對照하면서 說明한다면 다음과 같다.

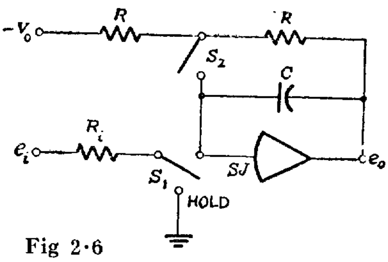

Fig 2•6

RESET: S_1은 HOLD 位置이고, S_2는 닫힘,

OPERATION: S_1은 SJ에 닫히고, S_2는 열림,

HOLD: S_1은 HOLD, S_2는 열림.

$-V_0$을 初期條件電壓이라 稱하며, IC로 回路線圖에서 表示된다. 그리고 積分回路를 Fig 2•7와 같이 表示하기로 한다. 이 回路에 對해서는

$$e_0=-\frac{1}{R_iC}\int e_i\,dt+V_0 \qquad (2\cdot9)$$

이며, 陽의 初期條件電壓을 위해서는 陰의 電壓을 所要로 함에 留意해 두기 바란다.

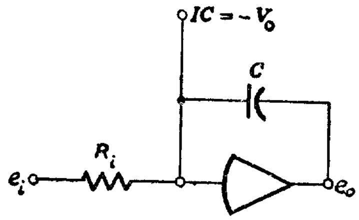

Fig 2·7

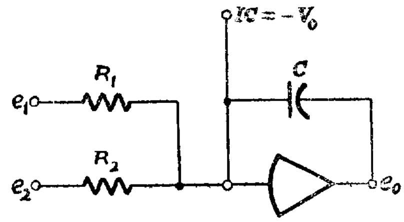

Fig 2·8

Fig 2·8 의 回路에 對해서는

$$e_0=-\frac{1}{R_1C}\int e_1\,dt-\frac{1}{R_2C}\int e_2dt+V_0 \qquad (2\cdot10)$$

Fig. 2·9 가 100 volt computor 에 對한 積分回路일 때 出力電壓을 求해보자. Kirchhoff 의 法則으로 부터

$$\Sigma i=i_1+i_2+i_3+i_f=0$$

電流—電壓關係를 代入하면

$$\frac{e_1}{R_1}+\frac{e_2}{R_2}+\frac{e_3}{R_3}+C\frac{de_0}{dt}=0$$

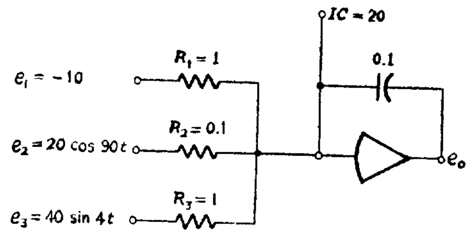

Fig 2·9

de_0 을 求하면,

$$de_0=-\left(\frac{e_1}{R_1C}+\frac{e_2}{R_2C}+\frac{e_3}{R_3C}\right)dt$$

積分해서

$$e_0=-\frac{1}{R_1C}\int e_1\,dt-\frac{1}{R_2C}\int e_2\,dt-\frac{1}{R_3C}\int e_3\,dt-IC$$

여기에 각 數値 및 數式을 代入하면

$$e_0=-\frac{1}{(1)(0.1)}\int(-10)dt-\frac{1}{(0.1)(0.1)}\int 20\cos 90\,t\ dt-\frac{1}{(1)(0.1)}\int 40\sin 4\,t\ dt-20$$

計算한 結果를 整理하면

$$e_0=100\,t-22.2\sin 90\,t+100\cos 4t-120$$

끝으로 附言해 둘 것은 앞에서 增幅器의 飽和電壓이 100 volt computor 에서는 約 170 volts 로서 그 以上의 出力電壓을 얻을 수 없다고 했다. 그러나 150 volts 를 넘으면 computor 의 出力은 線型特性을 갖지못하며, 實際 使用에 있어서는 避치 못할 境遇를 除外하고는 100 volts 를 넘지 않도록 하는 것이 좋다고 되있다.

2·4. 一次函數 發生回路

지금까지 說明한 computor 의 構成要素만을 使用해서 實用이 되는 몇가지 具體的인 例를 들기로 하겠다. 그 첫 例가 一次函數를 얻는 回路이다. Fig 2·10 의 積分回路에서 $e_i=5$ volts 이며, $IC=0$ 이다. 式 (2·9)로 부터

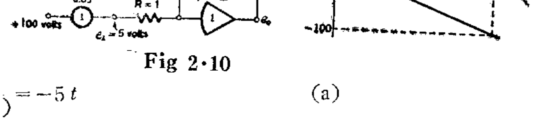

Fig 2·10

$$e_0=-\frac{1}{RC}\int 5\,dt=-\frac{5\,t}{(1)(1)}=-5\,t \qquad (a)$$

즉 e_0 은 0 volt 로 부터 始作해서 5 volts/sec 의 比率로 減少하고 있다. 그리고 기울기의 크기가 入力電壓 $e_i=5$ volts 와 같음에 留意해 두기 바란다.

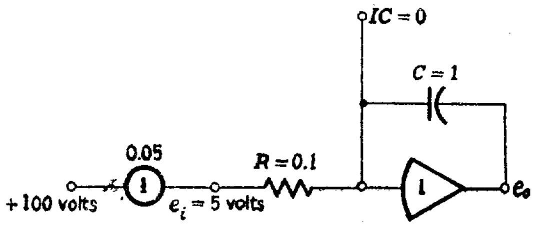

Fig 2·11

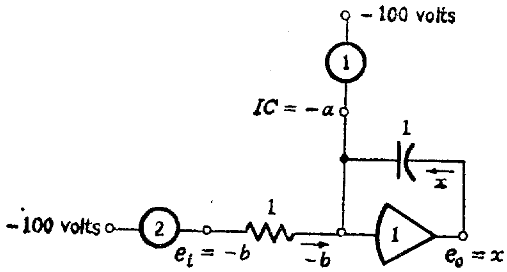

Fig 2·12

다음에 Fig 2·11 과 같이 入力抵抗 R 을 0.1 megohm 으로 바꾸면

$$e_0=-\frac{5t}{(0.1)(1)}=-50t \qquad \text{(b)}$$

이며, C 의 값을 0.1 μf 로 해도 同一한 結果를 얻을 수 있음은 勿論이다.

式 (a)의 경우에는 e_0 이 −100 volts 까지 이루는데 所要되는 時間은

$$t=\frac{-100}{-5}=20\text{ sec}$$

인데 比해서 式 (b)의 경우에는

$$t=\frac{-100}{-50}=2\text{ sec}$$

가 걸린다. 따라서 이 原理를 利用한다면 RC 의 값을 작게 함으로서 問題를 푸는 時間을 短縮시킬 수 있음을 알 수 있다. 反對로 問題를 푸는 時間을 느리게 할려면 RC 의 값을 크게 하면 된다. 윗 例에서는 RC 의 값을 $\frac{1}{10}$ 으로 함으로서 時間이 $\frac{1}{10}$ 로 短縮되었다.

지금까지는 回路들을 電氣的量으로 생각했었으나, 實際의 問題는 物理的量에 對한 것이니까, 이에 對해서 생각해 보기로 하자. Fig 2·12 에서 POT 1 의 出力은 物理的量 a 를 나타내는 電壓이고, POT 2 의 出力은 物理的量 b, AMP 1 의 出力은 物理的量 x 를 나타내는 電壓이다. 지금 computor 가 實際의 時間으로 作動한다고 하자, 즉, 物理的 現象이 이러나는 時間과 computor 에서의 時間이 同一하다. Kirchhoff 의 法則으로 부터

$$\frac{-b}{1}+(1)\frac{dx}{dt}=0$$

고로 $$x=bt+a \qquad \text{(c)}$$

이 式으로 表示되는 關係가 Fig 2.13 에 圖示되어 있다. 여기서 POT 1 은 x 의 初期値, POT 2 는 直線의 勾配를 定해 주고 있음에 留意해두기 바란다. 이때, computor 는 x 가 增幅器의 飽和電壓에 이루기까지 式 (c)를 滿足할 것이다.

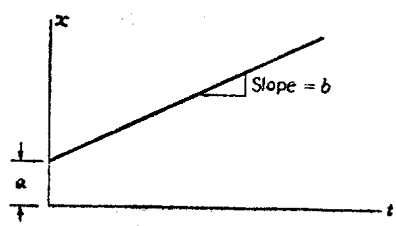

Fig 2·13

지금 時間과 變位의 關係가

$$x=1.5t+0.5 \qquad \text{(d)}$$

즉, 式 (c)에서 $a=0.5$ in, $b=1.5$ in/sec 인 경우로서 $x_{max}=6.5$ in 가 될때 까지만을 풀어보기로 하자. x 의 尺度를 $S_x=1$ volt/in 로 取한다면, 物理的量과 電壓이 同一한 數値로 表示되니까 便利하기는 하나, 增幅器의 出力이 0.5 volts 로 부터 6.5 volts 에 이룰 뿐이며, 100 volts 까지 記錄할 수 있는 記錄機를 使用할 때 正確度로 봐서 서투른 尺度設定일 것이다. 可能한 限 全容量에 가깝게 쓰는 것이 正確度가 좋을 것이며, 實際의 computor

使用에 있어서 恒常 留意해야 할 點이다. 그러나 記錄된 電壓으로 부터 物理的量을 쉽게 換算할 수 있는 尺度를 擇하는 것이 結果處理에 있어서 簡便함은 勿論이다. $S_x=15$ volts/in 를 擇한다면

$$(e_0)_{max}=(6.5\text{ in})(15\text{ volts/in})=97.5\text{ volts}$$

로서 誤差나 換算의 觀點에서 滿足스러운 尺度임을 알 수 있다. 이때 a를 電壓으로 表示하면

$$e_a=(0.5)(15)=7.5\text{ volts}$$

式 (d)에서 $t=4$ sec 에 $x_{max}=6.5$ in 를 얻기위해서는

$$e_b=\frac{97.5-7.5}{4}=22.5\text{ volts}$$

이 尺度에 依한 最終的 回路가 Fig 2.14 에 圖示되어 있다. 이 回路는 勿論 實際의 時間으로 作動되며, 4초에 結果를 얻을 수 있음은 勿論이다.

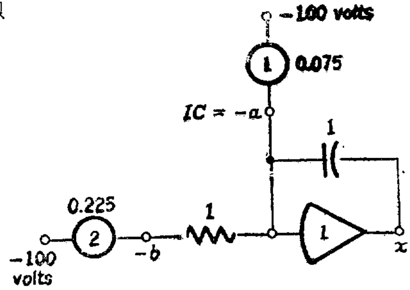

Fig 2·14

2·5 拋物線 發生回路

拋物線

$$y=a+bt+ct^2 \qquad \text{(a)}$$

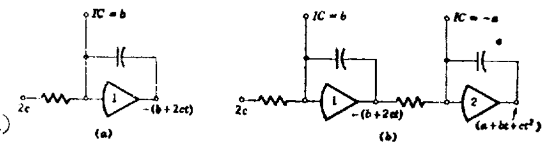

Fig 2·15

을 얻는 回路를 생각하기로 한다. 먼저 Fig 2·15(a)를 살펴면, 그 出力이

$$e_0=-(b+2ct) \qquad \text{(b)}$$

이며, 다음에 그림 (a)에서의 積分回路에 또 하나의 積分回路를 그림 (b)와 같이 連結하면, 그 出力이 願하는 바의 式 (a)의 右邊과 같아짐을 쉽게 알수 있을 것이다.

2·6. 圓 發生回路

$t=0$ 에서의 初期條件이 $z=r$ 및 $\dot z=0$ 인 微分方程式

$$\ddot z+\omega^2 z=0 \qquad \text{(a)}$$

의 解는

$$z=r\cos\omega t, \qquad \frac{\dot z}{\omega}=-r\sin\omega t \qquad \text{(b)}$$

지금 XY plotter 의 X軸에 z, Y軸에 $\frac{\dot z}{\omega}$의 값을 記錄한다면 ω rad/sec 의 角速度로 圓을 그리게 된다.

微分方程式을 computor 로 풀때의 一般的인 順序는 다음과 같다.

1. 微分方程式을 整理하여 左邊에는 最高次의 微分係數만이 오도록 한다.

2. 이 最高次의 項이 電壓이나 또는 電流로서 얻고저 하는 回路의 어디에선가 얻어졌다고 假定한다.

3. 이 電流나 電壓을 차례로 連結되는 積分回路들의 첫 머리에 入力으로 넣어주어서 낮은 次의 모든 微分係數와 函數自身을 얻도록 한다.

4. 첫 順序에서 整理한 微分方程式의 右邊에는 常數, 函數自身 및 낮은 次의 微分係數를 包含하는 項들 및 系에 加해지는 外力을 表示하는 項들을 갖일 것이다. 常數를 表示할 電壓은 computor 電壓을 potentiometer 를 通해서 얻을 수 있고, 函數自身과 低次의 微分係數들을 表示하는 電壓은 各 積分回路의 出力으로서 얻어진다. 外力을 나타낼 電壓을 얻는 方法은 지금까지의 說明으로 얻을 수 있는 것도 있으나, 特殊한 것들에 對해서는 次期의 講座에서 紹介하고저 한다. 즉 이 넷째 順序에서는 整理한 微分方程式의 右邊에 있는 各項을 表示하는

個別的인 電壓을 얻는 것이다.

5. 合算增幅器로 微分方程式의 右邊에 있는 項들을 나타내는 電壓들을 合해서 最高次의 微分係數가 얻어졌다고 假定한 곳으로 連結한다. 이때 符號變更回路가 必要할 때가 있을 것이다.

다시 微分方程式 (a)를 푸는 問題로 되돌아 가자. 첫 順序는 式 (a)를 變形해서

$$\frac{\ddot{z}}{\omega}=-\omega z \qquad \text{(c)}$$

의 꼴로 바꾼다.

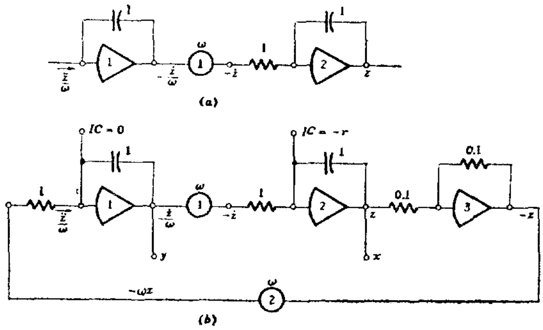

Fig 2·16

第2段階로서는 $\frac{\ddot{z}}{\omega}$가 電流로서 求하고저하는 回路의 어떤 곳에서 얻어졌다고 假定한다.

第3段階는 Fig 2·16(a)에서 볼수 있는바와 같이, 얻어졌다고 假定한 電流 $\frac{\ddot{z}}{\omega}$을 AMP 1에 보내어 出力電壓으로 $-\frac{\dot{z}}{\omega}$를 얻으며, POT 1을 ω로 調節하여 出力電壓으로 $-\dot{z}$를 얻는다. 이를 AMP 2로 積分하여 電壓 z를 얻는다.

第4 및 第5段階는 Fig 2·16(b)에서 볼 수 있는바와 같으며, 電壓 z의 符號를 AMP 3으로 바꾸어 $-z$로 한 다음에 POT 2로 $-\omega z$로 만든다. 式 (c)는 $-\omega z$와 $\frac{\ddot{z}}{\omega}$가 同一한 電壓을 나타낸다는 것을 말하고 있으므로, 끝으로 POT 2의 出力電壓을 1 megohm의 抵抗을 通해서 AMP 1에 連結하므로서 回路를 完成하게 된다. 다음에 初期條件이 $t=0$에서 $z=r$ 및 $\dot{z}=0$이므로, AMP 1에 對한 $IC=0$이고, AMP 2에 對한 $IC=-r$이다. XY-plotter에는 AMP 2의 出力을 plotter의 X軸에, AMP 1의 出力을 Y軸에 連結하여 動作시키면 半徑 r인 圓을 角速度 ω로 그리게 된다.

3. 尺度設定(Scaling)

2·4節에서 例示한 簡單한 回路에 對해서는 物理的量과 電壓사이의 關係를 明示하기가 힘들지 않았었다. 그러나 複雜한 問題에 있어서는 이 두 量사이의 關係를 computor의 容量을 넘지 않고 可能한 限 큰 電壓으로 作動시킬 目的으로 振幅尺度設定(amplitude scaling)으로 調節하게 된다. 一方 物理的 現象이 이러나는 時間이 너무 느리든가 또는 빠르므로 記錄할때 不便한 경우가 많으며, 實際의 時間(real time)을 computor에서의 時間(computor time)으로 바꾸는 一種의 時間單位의 變更인 時間尺度設定(time scaling)을 하게 된다.

合算增幅器에서 d-c 增幅器를 쓰지만 a-c 入力信號가 高周波이면 出力電壓에 큰 誤差를 誘發하게 되고, 位相差도 招來하게 된다. 또 noise voltage(普通 高周波임)의 影響도 받는다. 詳細한 說明은 略하나 合算回路의 使用에 있어서 다음의 3原則을 지키는 것이 좋다.

1. 모든 合算回路에서 $\frac{R_f}{R_i}$는 可能한 限 1에 가까운 값이 되도록 할것.
2. 可能한 限 computor 電壓(100 volt computor에서는 1000 volts)에 가까운 電壓으로 增幅器가 作動하도록 할것.
3. 回路가 適當한 速度로 作動하도록 時間尺度設定을 한 것.

積分回路에 對해서는

1. 前述한 第2項과 同一
2. 2개 以上의 積分增幅器가 直列로 使用될 때는 同一한 RC의 값을 갖도록 할 것.

勿論 以上에서 말한 것은 原則이며, 可能한 限 지키는 것이 좋다는 이야기 이고 不可避한 경우에는 어겨도 할 수 없는 일이다.

3·1 振幅尺度設定(Amplitude Scaling)

物理量을 電壓으로 表示할 때

$$e = a\lambda \tag{3·1}$$

단, e=電壓, volts

λ=物理的量,

인 關係式으로 表示하며, a 를 尺度數 (scale factor)라고 稱한다.

지금 質量—다쉬폿트—스프링系에 外力 $F_1+F_2\sin\,\omega t$ 가 作用할때를 例로 든다. 이때 運動方程式은

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_1+F_2\sin\,\omega t \tag{a}$$

이 式은 모든 項이 힘의 單位, 가령 1b, 로 表示되어 있으며, 이 式에 對한 尺度數 a 의 單位는 volts/lb 이다. 式 (a)를 m 로 나누면 (parameter form 이라 稱함)

$$\ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_1}{m}+\frac{F_2}{m}\sin\omega t$$

가 되며, 각 項들은 加速度의 單位, 가령 in/sec², 를 갖는다. 이때 a 의 單位는 volts/(in/sec²)이다. 式 (a)는 또 k 로 나누면

$$\frac{m}{k}\ddot{x}+\frac{c}{k}\dot{x}+x=\frac{F_1}{k}+\frac{F_2}{k}\sin\omega t$$

가 되며, 各 項은 變位, in, 의 單位를 가지며, a 는 volt/in 의 單位를 갖는다. 式 (a)에 對한 回路線圖는 Fig 3·1 과 같다.

式 (a)를

$$m\ddot{x}=-c\dot{x}-kx+F_1+F_2\sin\omega t$$

로 바꾸어 쓴 다음에 回路를 생각할 것이며, 讀者는 Fig 3·1 의 回路를 쉽게 理解할 것으로 생각한다. 그러나 附言해 둘 것은 힘 F_1은 常數로서 一定한 電壓으로 表示될 것이며, computor 電壓과 potentiometer 로 얻을 수 있다. $F_2\sin\,\omega t$ 는 Fig 2.16(b)나, 또는 computor 에 이미 設備되어 있는 sine 波發生回路로 부터 얻을 수 있다. 記錄에 있어서는 記錄될 變數에 係數까지 붙여서 하게 된다. 즉 變位의 記錄을 爲해서는 POT 2 의 出力電壓 kx 를 記錄한다. 지금 k=400 lb/in 라면 kx=400 x 가 된다. 400 x 의 最大値를 나타내는 電壓을 80 volts 라고 한다면 x 를 表示하는데 $\frac{80}{400}$=0.2 volts 를 使用하는 것 보다는 80 volts 를 使用하는 것이 좋다. 그 까닭은 記錄할때 增幅하지 않아도 되기 때문이다. 지금 x_{max}=0.5 in 라면 x 代身에 400 x 를 記錄했지만 0.5in 를 80 volts 로 表示했다고 생각하여 尺度를 $S_x=\frac{80}{0.5}$=160 volts/in 로 取하면 된다.

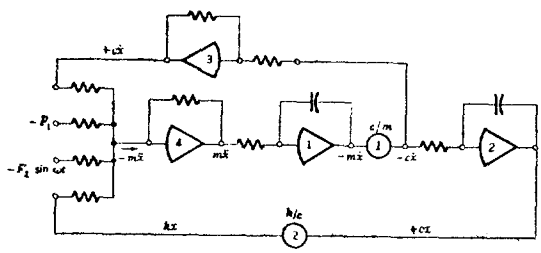

Fig 3·1

具體的인 例로서 무게가 4 lb 인 錘가 스프링常數 20 lb/in 에 依해 매달려 있으며, 스프링의 減衰効果를 無視할 수 있을 때 錘의 初期變位가 0.30 in, 初期速度가 0 인 경우를 생각하자.

$$m=\frac{W}{g}=\frac{4}{386}=0.01038\ \text{lb-sec}^2/\text{in}$$

따라서 微分方程式은

$$0.01038\,\ddot{x}+20\,x=0 \tag{b}$$

이며, 初期條件은

$$t=0 \text{ 때 } x=0.30\,\text{in}, \quad \dot{x}=0,$$

이 系의 固有振動數는

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{20}{0.01038}}=44\ \text{rad/sec}$$

또는

$$f=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{44}{2\pi}=7\ \text{cps}$$

로서 記錄하기에는 너무 빠르므로 computor 時間을 늦출 必要가 있음을 留意해 두기 바란다.

式 (b)를 다시 써서

$$0.01038\,\ddot{x}=-20\,x \qquad \text{(c)}$$

로 回路를 생각하며, 變位를 얻기 위해서는 두번 積分하여야 한다. 두번째 積分增幅器의 出力이 $20x$ 보다 커야 potentiometer 로 $20x$ 로 줄인 다음에 첫 積分增幅器로 보내져야 겠다. 따라서 各 積分增幅器에서의 $\frac{1}{RC}$의 값이 50 程度이어야 하겠다. 지금 $R=0.1, C=0.2$ 로 하면, $\frac{1}{RC}=\frac{1}{0.02}=50$ 이 되나, $C=0.2\,\mu f$ 는 普通 computor 에 있지 않으므로 困難한 問題가 되나 곧 알게되는 바와 같이 回路의 時間尺度設定으로 C 의 값을 바꾸게 된 것이므로 念慮할 必要가 없다. 지금까지는 式 (c)에 對한 回路를 생각했으며, 이것이 Fig. 3·2(a)에 圖示되어 있다.

2·4 節에서 Fig. 2.10 과 Fig. 2.11 로 說明한바와 같이 積分增幅器에서 時間을 늦추기 위해서는 RC 의 값을 크게하면 된다. 지금 computor 에서의 時間을 5 倍만큼 늦추기로 하자. 그 까닭은 Fig. 3·2 에서 AMP 1 및 AMP 2 에 쓴 $C=0.2$ 를 $0.2\times5=1.0$ 으로 바꾸게 되며, $1\,\mu f$ 의 capacitor 가 大槪의 computor 에 마련되어 있기 때문이다. 이때 Fig 3·2(a)의 回路部分은 (b)에서와 같이 되며, C 에 0.2 로 記入했든 것을 지워 없애지 말고, 그림에서와 같이 줄을 그어 지우고 그 윗쪽에 새로 定한 1 을 記入하여 놓는다. 이렇게 하므로서 우리는 computor 時間이 實際의 時間의 5 倍가 되었음을 回路圖만 보고도 알 수 있게 된다. 고로 (b)의 回路는 $f=\frac{7}{5}$ cps 로 作動하게 되며 記錄하기에 適當할 것이다. 要約해서 再言하지만 時間尺度를 바꿀 必要가 있을때는 回路中에 있는 積分回路의 RC 의 값을 全部 同一하게 했다가 C 의 값을 同一한 數로 乘除하는 것이 複雜한 回路에서 錯誤를 避할 수 있음으로 처음부터 習慣을 부치는 것이 좋으리라 생각한다.

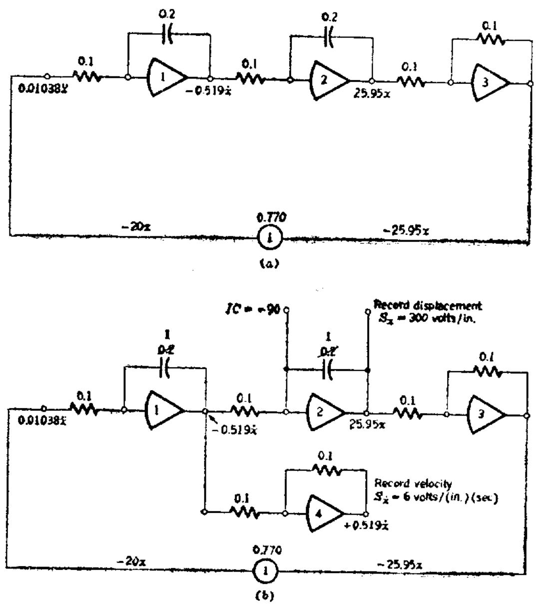

Fig. 3·2

以上과 같이 時間尺度를 定하는 것을 computor 의 時間尺度設定이라 稱하며, 다음 節에서 說明한 方程式의 時間尺度設定과 같은 結果가 얻어지며, 便利하기 때문에 前者가 많이 쓰고 있다.

다음에 振幅尺度를 定하기로 하자. $x_{max}=0.30$ in 임을 알고 있으므로 AMP 2 로 부터 始作하기로 한다. 0.3in 를 90 volts 로 나타내기로 한다면

$$S_x = \frac{90}{0.3} = 300 \text{ volts/in}$$

이며, 90 volts 로는 AMP 2를 過負荷시키지 않는다. 이때 尺度數 a는 式 (3.1)로 부터

$$a = \frac{e}{\lambda} = \frac{90}{(25.95)(0.3)} = 11.53 \text{ volts/lb}$$

AMP 3은 符號變更回路이므로 역시 最高 90 volts로 作動하게 되며, 問題가 생기지 않는다. AMP 1이 過負荷되는지를 살피기 위해서 最大速度를 推定하면

$$\dot{x} = -x_0\omega \sin \omega t$$

이므로

$$\dot{x}_{max} = x_0\omega = (0.30)(44) = 13.2 \text{ in/sec}$$

따라서, 이 速度에 對한 AMP 1의 出力電壓은 式 (3.1)로 부터

$$e_1 = a\lambda = 11.53[(0.519)(13.2)] = 79 \text{ volts}$$

이므로, AMP 1도 過負荷되지 않고, 또 出力電壓이 너무 작지도 않아서 滿足스럽다. 지금 좀더 큰 出力電壓을 AMP 1로 얻으면 誤差도 적을 것이므로 99 volts로 $0.519\dot{x}$를 나타내기로 한다면

$$S_{\dot{x}} = \frac{99}{13.2} = 7.5 \text{ volts/(in/sec)}$$

이며, 尺度數 a는

$$a = \frac{e}{\lambda} = \frac{99}{(0.519)(13.2)} = 14.5$$

이때 AMP 2로 부터의 最高 出力電壓이

$$e_2 = a\lambda = 14.5[(25.95)(0.30)] = 113 \text{ volts}$$

로서 AMP 2 및 AMP 3이 過負荷된다. 이 例로서 알 수 있는바와 같이 모든 增幅器가 過負荷되는지를 檢討할 때 까지는 尺度數 a의 값에 對한 選擇은 臨時的인 것으로 생각하여야 한다.

$a = 11.53$을 擇하기로 決定한다면 變位에 對한 記錄의 尺度는 $S_x = 300$ volts/in 이고, 速度에 對해서는

$$S_{\dot{x}} = \frac{79}{13.2} = 6 \text{ volts/(in/sec)}$$

이다. AMP 2에 初期條件 IC $= -90$ volts를 附加하므로서 回路가 完成되며 Fig 3.2(b)와 같다. 그런데 記錄에 있어서 符號가 反對이면 位相差에 혼동을 가져오기 쉬우므로 速度를 記錄하기 위해서 符號變更回路를 넣어서 $+0.519\dot{x}$를 얻도록 했다. 이로서 AMP 2 및 AMP 4의 出力電壓을 記錄하여 願하는 變位 및 速度에 對한 解를 얻게 된다.

3·2 方程式의 時間尺度設定(Time Scaling the Equations)

前節의 例에서 積分回路들의 RC의 값을 變更하므로서 computor의 時間尺度를 바꾸는 方法에 對해서 說明을 했으나, 이 節에서는 方程式에서의 時間尺度를 바꾸는 方法에 對해서 略說하겠다. 즉 獨立變數인 時間 t를

$$\tau = nt \tag{3·2}$$

단, τ = computor 時間, sec

n = 時間尺度數(time-scale factor),

t = 實際의 時間(problem time)

인 關係式으로 變數를 바꾼다. 지금 原 微分方程式을

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = F(t) \tag{a}$$

로 取하기로 한다면, 式 (3.2)의 變數變換으로 말미아마

$$a'\ddot{X}+b'\dot{X}+cX=F'(\tau) \qquad \text{(b)}$$

단. $X=f(\tau), \dot{X}=\dfrac{dx}{d\tau}, \ \ddot{X}=\dfrac{d^2x}{d\tau^2}$

이다. 이를 具體的으로 說明한다면, $x=f(t)$, $t=\dfrac{\tau}{n}$ 이므로

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{d\left(\frac{\tau}{n}\right)}=n\frac{dx}{d\tau}=nx\dot{X}$$

$$\ddot{x}=\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(n\frac{dx}{d\tau}\right)=\frac{d}{d\left(\frac{\tau}{n}\right)}\left(n\frac{dx}{d\tau}\right)=n^2\frac{d^2x}{d\tau^2}=n^2\ddot{X}$$

$$F(t)=F\left(\frac{\tau}{n}\right)=F'(\tau)$$

이다. 이들을 式 (a)에 代入하면

$$an^2\ddot{X}+bn\dot{X}+cX=F'(\tau)$$

이 되고, $an^2=a'$, $bn=b'$ 이라고 놓으면 式 (b)를 얻게 된다. 初期條件 및 最大値등도 變數變換의 結果로 말미아마 다음과 같이 된다.

$$\dot{X}(0)=\frac{\dot{x}(0)}{n}, \qquad \dot{X}_{max}=\frac{\dot{x}_{max}}{n},$$

$$\ddot{X}(0)=\frac{\ddot{x}(0)}{n^2}, \qquad \ddot{X}_{max}=\frac{\ddot{x}_{max}}{n^2}.$$

外力에 對해서는 例컨데 $F(t)=F_o \sin \omega t$ 라고 하면 다음과 같다.

$$F'(\tau)=F\left(\frac{\tau}{n}\right)=F_o \sin\frac{\omega}{n}\tau.$$

以上으로 方程式 및 所要되는 變換이 끝났는데, 回路線圖에는 n의 값을 記入해 두는 것이 좋다. 왜냐하면 computor 로의 解 $X(\tau)$를 物理的量 $x(t)$로 바꿀때 이 n의 값이 쓰이기 때문이다.

例로서 前節에서 取扱한 問題를 다시 생각해 보기로 하자. 즉

$$0.01038\,\ddot{x}=-20\,x \qquad \text{(c)}$$

$$x_{max}=0.30\text{ in}, \qquad \dot{x}_{max}=13.2\text{ in/sec}, \qquad \ddot{x}_{max}=591\text{ in/sec}^2$$

이다. 지금 $n=5$ 로 취하면

$$\tau=5\,t$$

이며, 式 (c)는

$$0.2595\ddot{X}=-20X$$

로 되고

$$X_{max}=0.30\text{ in}, \qquad \dot{X}_{max}=2.64\text{ in/sec}, \qquad \ddot{X}_{max}=23.64\text{ in/sec}^2$$

이다. 여기서의 時間은 computor 時間임은 勿論이다. 式 (c)에 對한 回路線圖가 Fig. 3·3 에 圖示되어 있다.

前節에서 computor 에 時間尺度設定을 하는 것이 本節에서 說明한 方程式에 對해서 時間尺度設定을 하는 것보다 좋다고 말했는데 具體的으로 그 理由를 살펴보면 다음과 같다.

1. Computor 를 操作하는 中間에 C의 값만을 바꾸므로서 尺度變更이 可能하고, 振幅尺度에는 全然 影響을 미치지 않는다.

2. Fig. 3·2 에서 볼 수 있는바와 같이 物理的 常數 m, k 및 c 등이 實際의 값으로 回路線圖에 나타나고

있으므로 이들에 對한 適合한 값을 찾는다든가, 設計를 目的으로 하는 경우에는 系의 特性을 나타내는 이들의 常數를 變更하므로서 나타날 應答의 變化를 쉽게 볼 수가 있다.

3. 物理的量을 表示하는 數値를 直接 取扱하게 되므로 實際의 現象을 보는 것과 같이 親近感을 느낀다.

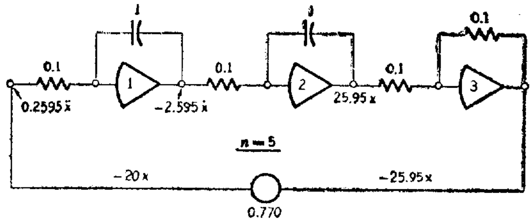

Fig. 3·3

方程式에 時間尺度設定을 하는 것이 數學的으로 깨끗이 處理되어서 理論的인 納得은 잘 가지만 上記한 理由 때문에 computor 에 時間尺度設定을 하는 方法을 많이 쓰게 된다.

次回에는 外力이나, 까다로운 拘束條件들을 simulate 하기 위한 여러가지 特殊回路 및 複雜한 系에 對해서 便利하게 使用되는 尺度設定問題에 言及하고, 끝으로 應用例를 들어보기로 하겠다.