

## 論 文

### 自由表面에 接着된 圓筒에 加해진 軸方向荷重으로 因한 應力分布 및 變位에 對한 數學的 解析 (第 1 報)

李 樂 周\*

Mathematical Analysis for the Stress Distribution and Displacement by an Axial Load in an Elastic Half-space by a Rigid Punch in the Form of a Flat-Ended Circular Cylinder Cemented to the Stress Free Surface (Part 1)

Nack-Joo Lee

#### Abstract

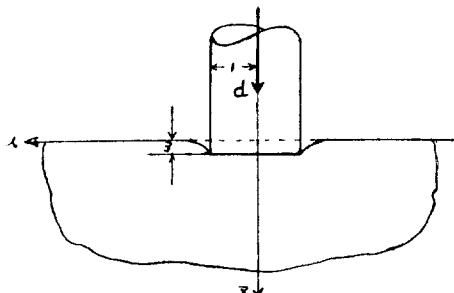
In this problem the rigid punch in the form of a flat-ended circular cylinder of unit radius is cemented to the stress free surface of an elastic half-space. An axial load  $P$  is then applied to the punch to force it into half-space to depth  $\epsilon$ . It is assumed that the adhesive between the punch and the half-space does not give way as a result of the loading. It is shown that the solution of problem can be reduced to the system of Abel type integral equations which are equation (13) and (14). It is also shown that the stress and displacement components on the portions of boundary where they are not prescribed can be expressed in terms of  $\phi(t)$  and/or  $\psi(t)$  which are introduced in equation (9) and (10). Those functions can be obtained from the solution of the system of integral equations (13) and (14).

#### 1. 緒 言

여기서 論하고자 하는 問題는 半徑 1인 剛體 圓筒이 elastic half-space의 自由表面에 接着되어 있으며, 그 接着面은 平面으로서 이 圓筒이 軸方向의 荷重으로 말미 아마 均一하게  $\epsilon$  만큼 elastic half-space 속으로 밀렸을 때 일어나는 應力分布 및 變位에 對하여 考察하고자 하는 것이다. 여기서 圓筒과 elastic-half space는 變形中에도 密着되어 있는 것으로 생각한다. 그리고 이 問題는 비틀림이 없는 對稱形 問題에 屬함은 明白하다.

#### 2. 數學的 解析

Body force가 없는 경우에 變位로 表示된 平衡方程式은 빼타풀로<sup>(1)</sup>



Fig

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u) = 0$$

단,  $\lambda$  와  $\mu$  는 half-space 를構成하는 物質의 Lamé 常數이다.

이 式은 또

$$\Delta^2 u + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla(\nabla \cdot u) = 0$$

으로도 表示되며,  $\sigma$  는 프아송의 比이다. 이의 一般解는<sup>(2)</sup>

$$\Gamma u = \nabla F + \nabla(\mathbf{R} \cdot \mathbf{G}) - 4(1-\sigma)\mathbf{G}$$

단  $\Gamma$  : 任意의 常數,

$$\nabla^2 F = 0,$$

$$\nabla^2 \mathbf{G} = 0,$$

$\mathbf{R}$  : 原點으로부터의 位置ベタ,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\underline{u} = u \hat{e}^1 + w \hat{e}^3$$

이다. 지금,

$$F = F(r, z), \quad \mathbf{G} = G(r, z) \hat{e}^3, \quad \Gamma = 2\mu$$

단  $\hat{e}^3$  :  $z$  軸方向의 單位 벡터

라고 놓으면<sup>(2)</sup>

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} = (r \hat{e}^1 + z \hat{e}^3) \cdot (G \hat{e}^3) = Z \cdot G,$$

$$2\mu u = -\frac{\partial F}{\partial r} + z \frac{\partial G}{\partial r},$$

$$2\mu w = -\frac{\partial F}{\partial z} + z \frac{\partial G}{\partial z} - (3 - 4\sigma)G$$

단,  $u$  및  $w$  는 각각  $r$  및  $z$  軸方向의 變位다.

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - 2\sigma \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial F}{\partial r} + z \frac{\partial G}{\partial r} \right] - 2\sigma \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - 2(1-\sigma) \frac{\partial G}{\partial z},$$

$$\sigma_{rz} = \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 G}{\partial r \partial z} - (1-2\sigma) \frac{\partial G}{\partial r},$$

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta z} = 0$$

여기서  $F$  및  $G$  는

$$\nabla^2 F = \nabla^2 G = 0$$

이어야 한다.

一般的으로  $\nabla^2 \varphi = 0$  에 對한 變數分離法에 依한 解는

$$(A\ln r + B)(Cz + D),$$

$$[AI_0(\alpha r) + BK_0(\alpha r)] (C\cos\alpha z + D\sin\alpha z),$$

$$[AJ_0(\alpha r) + BY_0(\alpha r)] (Ce^{-\alpha z} + De^{\alpha z}),$$

나,  $I_0$ ,  $K_0$  : 0 次의 第 2 種의 Bessel 函數

$J_0$ ,  $Y_0$  : 0 次의 第 1 種의 Bessel 函數

中의 어느 하나의 꼴을 가지나,  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq z < \infty$  이므로

$F$ 와  $G$ 에 대해서는

常數 및  $e^{-\alpha z} J_0(\alpha r)$

인 꼴을 가질 수 있을 뿐이다.

지금,

$$F(r, z) = \int_0^\infty A(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha,$$

$$G(r, z) = \int_0^\infty B(\alpha) e^{-\alpha z} J_0(\alpha r) d\alpha$$

라고 取한다. 단,  $A(\alpha)$  및  $B(\alpha)$ 는 境界條件으로부터 定해진다.

이 問題에 對한 境界條件은

$$w(r, 0) = \varepsilon, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (1)$$

$$u(r, 0) = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (2)$$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = 0, \quad 1 < r < \infty \quad (3)$$

$$\sigma_{rz}(r, 0) = 0, \quad 1 < r < \infty \quad (4)$$

이고, 變位 및 應力은 無限遠點에서 0이다.

境界條件式 (1), (2), (3) 및 (4)에  $F$  및  $G$ 를 代入하면, 이들은 각각

$$\int_0^\infty [\alpha A + (3 - 4\sigma)B] J_0(\alpha r) d\alpha = -2\mu\varepsilon, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (5)$$

$$\int_0^\infty \alpha A J_1(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (6)$$

$$\int_0^\infty [\alpha A + 2(1 - \sigma)B] \alpha J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 1 < r < \infty \quad (7)$$

$$\int_0^\infty [\alpha A + (1 - 2\sigma)B] \alpha J_1(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 1 < r < \infty \quad (8)$$

또는,

$$-\frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty [\alpha A + (1 - 2\sigma)B] J_0(\alpha r) d\alpha = 0, \quad 1 < r < \infty \quad (8)'$$

우선 境界條件 (7)은

$$\alpha A(\alpha) + 2(1 - \sigma)B(\alpha) = \int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt \quad (9)$$

라고 取하면  $\phi(t)$ 에 關係없이 滿足된다(附錄 1).

또 (8)은 뚜 같은 方法으로

$$\alpha A(\alpha) + (1 - 2\sigma)B(\alpha) = \int_0^1 \psi(t) \sin \alpha t dt \quad (10)$$

으로 取하면  $\psi(t)$ 에 關係없이 滿足된다.

(9)와 (10)으로 부터

$$B(\alpha) = \int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt - \int_0^1 \psi(t) \sin \alpha t dt \quad (11)$$

이를 (9)에 代入하면

$$\alpha A(\alpha) = -(1 - 2\sigma) \int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt + 2(1 - \sigma) \int_0^1 \psi(t) \sin \alpha t dt \quad (12)$$

(11) 및 (12)를 (5)의 左邊에 代入하면,

$$\alpha A + (3 - 4\sigma)B = 2(1 - \sigma) \int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt - (1 - 2\sigma) \int_0^1 \psi(t) \sin \alpha t dt$$

고로 (5)는

$$2(1-\sigma) \int_0^\infty J_0(\alpha r) d\alpha \int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt - (1-2\sigma) \int_0^\infty J_0(\alpha r) d\alpha \int_0^1 \phi(t) \sin \alpha t dt = -2\mu\varepsilon, \text{ for all } r$$

積分順序를 바꾸면

$$2(1-\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha - (1-2\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha = -2\mu\varepsilon, \text{ for all } r \quad (13a)$$

그런데 積分公式<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_0(\alpha r) \cos \alpha t dt &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{r^2-t^2}}, & t < r \\ 0, & t > r \end{cases} \\ \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t dt &= \begin{cases} 0, & t < r \\ \frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}, & t > r \end{cases} \end{aligned}$$

을 利用하면,  $0 \leq r \leq 1$ 에 對해서

$$\int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha t) \cos \alpha t dt = \int_0^r \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha + \int_r^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha t) \cos \alpha t d\alpha = \int_0^r \frac{\phi(t)}{\sqrt{r^2-t^2}} dt$$

똑같이 해서

$$\int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha = \int_r^1 \frac{\phi(t)}{\sqrt{t^2-r^2}} dt$$

등이 되며, 境界條件 (5)는

$$2(1-\sigma) \int_0^r \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{r^2-t^2}} - (1-2\sigma) \int_r^1 \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}} = -2\mu\varepsilon, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (13)$$

똑같은 方式으로 (12)를 (6)에 代入하면

$$-(1-2\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_1(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha + 2(1-\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_1(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha = 0, \text{ for all } r \quad (14a)$$

積分公式<sup>(3)</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^\infty J_1(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha &= \begin{cases} \frac{1}{r}, & t < r \\ \frac{1}{r} - \frac{t}{r\sqrt{t^2-r^2}}, & t > r \end{cases} \\ \int_0^\infty J_1(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha &= \begin{cases} \frac{t}{r\sqrt{r^2-t^2}}, & t < r \\ 0, & t > r \end{cases} \end{aligned}$$

을 利用하면  $0 \leq r \leq 1$ 에 對해서

$$\int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_1(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha = \frac{1}{r} \int_0^1 \phi(t) dt - \frac{1}{r} \int_r^1 \frac{t\phi(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

$$\int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_1(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha = \frac{1}{r} \int_0^r \frac{t\phi(t) dt}{\sqrt{r^2-t^2}}$$

따라서 境界條件 (6)은

$$(1-2\sigma) \int_r^1 \frac{t\phi(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}} + 2(1-\sigma) \int_0^r \frac{t\phi(t) dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = (1-2\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (14)'$$

그런데,

$$\int_0^1 \phi(t) dt = -\frac{P}{2\pi} \quad (\text{附錄 2})$$

o] 브로

$$(1-2\sigma) \int_0^1 \frac{t\phi(t)dt}{\sqrt{t^2-r^2}} + 2(1-\sigma) \int_0^r \frac{t\psi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = -\frac{P}{2\pi}(1-2\sigma), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (14)$$

(13)과 (14)로 되는 두 Abel 積分方程式을 聯立해서 풀면  $\phi(t)$  및  $\psi(t)$ 가 定해지며, 따라서  $A(\alpha)$  및  $B(\alpha)$  을 求할 수 있게 된다.

境界平面에서의 變位 : —

【1】  $w(r, 0)$ ,  $1 < r < \infty$

(13a)로 부터

$$\begin{aligned} 2\mu w(r, 0) &= - \int_0^\infty [\alpha A + (3-4\sigma)B] J_0(\alpha r) d\alpha = -2(1-\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha \\ &\quad + (1-2\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha, \quad \text{for all } r \end{aligned}$$

$1 < r < \infty$ 에 對해서는  $t < r$ 이므로

$$2\mu w(r, 0) = -2(1-\sigma) \int_0^1 \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{r^2-t^2}}$$

故로

$$w(r, 0) = -\frac{1-\sigma}{\mu} \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\sqrt{r^2-t^2}} dt, \quad 1 < r < \infty \quad (15)$$

【2】  $u(r, 0)$ ,  $1 < r < \infty$

(14a)로 부터

$$\begin{aligned} 2\mu u(r, 0) &= - \int_0^\infty \alpha A J_1(\alpha r) d\alpha = (1-2\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_1(\alpha r) \cos \alpha t d\alpha \\ &\quad - 2(1-\sigma) \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_1(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha, \quad \text{for all } r \end{aligned}$$

$1 < r < \infty$ 에 對해서는  $t < r$ 이므로

$$u(r, 0) = \frac{1-2\sigma}{2\mu r} \int_0^1 \phi(t) dt - \frac{1-\sigma}{\mu r} \int_0^1 \frac{t\phi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, \quad 1 < r < \infty$$

그런데,

$$\int_0^1 \phi(t) dt = -\frac{P}{2\pi} \quad (\text{附錄 2})$$

o] 브로

$$u(r, 0) = -\frac{1-2\sigma}{4\pi\mu r} P - \frac{1-\sigma}{\mu r} \int_0^1 \frac{t\phi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, \quad 1 < r < \infty \quad (16)$$

境界平面에서의 應力 : —

【1】  $\sigma_{zz}(r, 0)$ ,  $0 \leq r < 1$

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \int_0^\infty [\alpha A + 2(1-\sigma)B] \alpha J_0(\alpha r) d\alpha$$

(9)로 부터

$$\alpha A(\alpha) + 2(1-\sigma)B(\alpha) = \int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt$$

고로 部分積分에 依해서

$$\alpha[\alpha A + 2(1-\sigma)B] = \phi(1) \sin \alpha - \int_0^1 \phi'(t) \sin \alpha t dt.$$

이를 대입하면

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \phi(1) \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha d\alpha - \int_0^1 \phi'(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha, \text{ for all } r$$

$0 \leq r < 1$ 에 대하여서

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi'(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha &= \int_0^r \phi'(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha + \int_r^1 \phi'(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha \\ &= \int_r^1 \frac{\phi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \end{aligned}$$

故로

$$\sigma_{zz}(r, 0) = \frac{\phi(1)}{\sqrt{1-r^2}} - \int_r^1 \frac{\phi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r < 1 \quad (17)$$

[2]  $\sigma_{rz}(r, 0)$ ,  $0 \leq r < 1$

$$\sigma_{rz}(r, 0) = -\frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty [\alpha A + (1-2\sigma)B] J_0(\alpha r) d\alpha$$

(10)으로 부터

$$\alpha A(\alpha) + (1-2\sigma)B(\alpha) = \int_0^1 \phi(t) \sin \alpha t dt$$

故로,

$$\sigma_{rz}(r, 0) = -\frac{\partial}{\partial r} \int_0^\infty J_0(\alpha r) d\alpha \int_0^1 \phi(t) \sin \alpha t dt = -\frac{\partial}{\partial r} \int_0^1 \phi(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha, \text{ for all } r$$

따라서  $0 \leq r < 1$ 에 대하여서는

$$\sigma_{rz}(r, 0) = -\frac{\partial}{\partial r} \int_r^1 \frac{\phi(t) dt}{\sqrt{t^2 - r^2}}, \quad 0 \leq r < 1 \quad (18)$$

### 3. 結 言

以上의 考察로서 이 問題는 두 Abel 積分方程式을 聯立시켜 푸는 것으로歸着했으며, 이로부터  $\phi(t)$  및  $\psi(t)$ 를 求한다면, 이를 대입함으로써 境界條件으로 주어진 應力 및 變位를 境界條件에서 주어지지 않았던 領域에까지 擴大하여 求할 수 있음을 알게 됐다. 앞으로 第2報로 完結을 期約하는 바이다.

### 附 錄 1

部分積分에 依해서

$$\int_0^1 \phi(t) \cos \alpha t dt = \frac{1}{\alpha} \left[ \phi(t) \sin \alpha t \Big|_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 \phi'(t) \sin \alpha t dt \right]$$

(9)와 (7)의 左邊에 대입하고, 위 結果를 利用하면, (7)의 左邊 1, 即

$$I = \phi(1) \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha d\alpha - \int_0^\infty J_0(\alpha r) d\alpha \int_0^1 \phi'(t) \sin \alpha t dt = \phi(1) \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha d\alpha - \int_0^1 \phi'(t) dt \int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t dt$$

그런데 積分公式<sup>(3)</sup>

$$\int_0^\infty J_0(\alpha r) \sin \alpha t d\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad t < r \\ \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}}, & t > r \end{cases}$$

을 利用하면,  $1 < r < \infty$ ,  $0 \leq t \leq 1$ 의 모든  $t < r$ 인 고로

$$I = \phi(1) \cdot 0 - \int_0^1 \phi'(t) \cdot 0 \, dt = 0$$

즉, (9)와 같이 取하면  $\phi(t)$ 에 關係 없이 (7)은 恒常 滿足됨을 알 수 있다.

## 附 錄 2

$z=0$  上에 作用하는  $z$  軸方向의 合力  $P$  와 같아야 하므로

$$P = -2\pi \int_0^1 r \sigma_{zz}(r, 0) dr$$

이에 (17)을 代入하면

$$P = -2\pi \int_0^1 r dr \left[ \frac{\phi(1)}{\sqrt{1-r^2}} - \int_r^1 \frac{\phi'(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}} \right] = -2\pi \phi(1) \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2}} + 2\pi \int_0^1 r dr \int_r^1 \frac{\phi'(t) dt}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

積分順序를 바꾸면<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} P &= -2\pi \phi(1) \left[ -\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 + 2\pi \int_0^1 \phi'(t) dt \int_0^t \frac{r dr}{\sqrt{t^2-r^2}} = -2\pi \phi(1) + 2\pi \int_0^1 t \phi'(t) dt \\ &= -2\pi \int_0^1 \phi(t) dt \end{aligned}$$

故로

$$\int_0^1 \phi(t) dt = -\frac{P}{2\pi}$$

## 參 考 文 獻

1. I.S. Sokolnikoff, "Mathematical Theory of Elasticity" Mc Graw-Hill, N.Y., 1956
2. R.A. Eubanks and E. Sternberg, "On the Completeness of the Boussinesq-Papkovich Stress Functions," Journal of Rational Mechanics and Analysis Vol. 5, No. 5, 1956
3. A.W. Magnus and F. Oberhettinger, "Formulas and Theorem for the Special Functions of Mathematical Physics," Chelsea, N.Y., 1949
4. 高木貞治 "解析概論" 岩波書店