

Signal-flow graph 에 의한 回路分析

論 文
17-2-2

Network analysis by signal-flow graph

金 炯 甲 *
(Hyung Kap Kim,)

[ABSTRACT]

One of the most important methods used in the modern analysis of linear networks and systems is the signal-flow graph technique, first introduced by S.J. Mason in 1953.

In essence, the signal-flow graph technique is a graphical method of solving a set of simultaneous. It can, therefore, be regarded as an alternative to the substitution method or the conventional matrix method. Since a flow-graph is the pictorial representation of a set of equations, it has an obvious advantage, i.e., it describes the flow of signals from one point of a system to another. Thus it provides cause-and-effect relationship between signals. And it often significantly reduces the work involved, and also yields an easy, systematic manipulation of variables of interest.

Mason's formula is very powerful, but it is applicable only when the desired quantity is the transmission gain between the source node and sink node.

In this paper, author summarizes the signal-flow graph technique, and stipulates three rules for conversion of an arbitrary nonsource node into a source node. Then he uses the conversion rules to obtain various quantities, i.e., network gains, functions and parameters, through simple graphical manipulations.

I. Introduction

Signal-flow graph 는 回路網을 分析 하는데 있어 今日 가장 重要하고 便利한 方法中의 하나이다. 1953年 M.I.T.의 S.J. Mason¹⁾이 發表한 以來 自動制御, 回路網分析 分野에 有用하게 쓰여져온 이 方法은 한 set의 simultaneous algebraic equation을 graph를 通하여 푸는 것이므로 從來의 matrix에 의한 解法을 代置할수 있는 것이라고 볼 수 있다. 그런데 이 方法은 matrix法과 달라 回路網(或은 system)內의 signal 或은 變數 사이의 相關關係를 釋然히 볼 수 있게 한다는 特徵이 있고 또 變數사이의 關係를 graph에 依하여 系統的으로 求하는 것이므로 操作이 比較的 簡單하여 結果的으로時 間을 恣히 節約하게 된다.

a. Signal-flow graph의 定義

Signal-flow graph는 아래에 定義되는 node와 branch로 構成된다.

nodes: node는 signal나 variable(變數)를 代表한다. 그러므로 各 node에는 變數(node variable)가 있기 마련이다.

node에 들어오는 모든 signal는 合해져서 node variable를 이룬다.

branches: Branch는 二個의 node를 連結하며 node

사이의 關係(functional relationship)를 表示한다 各 branch에 있는 矢票는 signal가 흘러가는 方向을 가르킨다. 두 node 사이의 functional relationship는 branch gain 或은 transmittance라 일컫는다.

signal-flow graph를 어떻게 그리는가를 例示하기 爲하여 아래와 같은 簡單한 方程式을 생각해 본다.

$$X_2 = t_{12} X_1 \tag{1}$$

X_1 과 X_2 는 node variable이고 t_{12} 는 node 사이의 transmittance이다. 複素數 領域에선 X_1 , X_2 그리고 t_{12} 는 모두 Laplace 變換變數 S의 函數가 될것이다. 方程式(1)에 該當하는 signal-flow graph는 아래의 Fig.1이 된다.

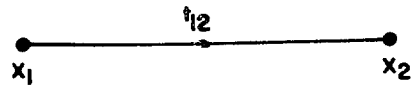


그림 1 方程式 1의 시그널플로우그래프表示
Fig. 1. SIGNAL-FLOW GRAPH REPRESENTATION OF EQ. 1

위의 flow graph를 그리는데 있어 爲先 node인 X_1 , X_2 를 點으로 表記하고 transmittance가 t_{12} 인 branch를 X_1 으로부터 X_2 로 向하게 그린다. 이는 即 X_2 가 X_1 에 어떻게 從屬(dependence) 되는가를 그림으로 表示한 것이 된다. 方程式(1)은 X_1 이 獨立變數이고 X_2 가 從屬變數임을 意味한다.

正會員 : Department of Electrical Engineering,
University of Manitoba, CANADA

Signal-flow graph를 구성하는 두개의 element는 node와 branch이다. 그런데 役割에 따라 各各 名稱이 달라진다. 假令 아래와 같은 두 개의 方程式이 주어졌다고 생각하자.

$$\begin{aligned} X_2 &= t_{12}X_1 + t_{22}X_2 + t_{32}X_3 \\ X_3 &= t_{13}X_1 + t_{23}X_2 + t_{33}X_3 \end{aligned} \quad (2)$$

위의 두개의 方程式에 該當되는 signal-flow graph는 아래와 같은 Fig.2가 된다.

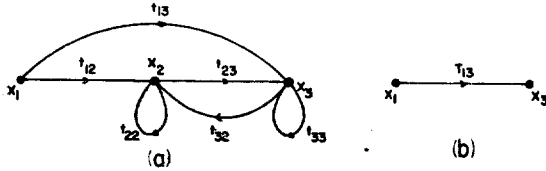


그림 2 方程式 2의 시그널플로우그래프 表示
Fig.2. SIGNAL-FLOW GRAPH REPRESENTATION OF EQ.2

- Source node: 모든 signal가 그로부터 흘러나오는 node를 말한다. Fig.2에서 X_1 이 source node가 된다.
- Sink node: 모든 signal가 그에 흘러 들어 오는 node를 말한다.
- Path: Branch가 한개 혹은 그 이상이 이어져 signal의 通路가 된것을 말한다.
- Self-loop: 한 개의 node에서 나와 同 node에 들어가는 branch를 말한다. Fig.2에서 t_{33} 와 t_{22} 가 代表하는 branch가 各各 self-loop이다.
- Feed back loop: 한개의 node에서 나와 다시 그 node에 들어가는 path를 말한다. Fig.2에서 $t_{23} t_{32}$ 로 이루어진 loop와 feed back loop이다.
- Forward path: Source node와 sink node를 運結하는 path를 말한다. Fig.2에선 t_{13} 와 $t_{12} t_{23}$ 가 代表하는 path가 各各 forward path이다.
- Path gain: 한 개의 path를 이루고 있는 branch의 transmittance의 積을 말한다.
- Loop gain: Loop를 形成하는 branch의 transmittance의 積을 말한다.

b. Mason의 公式

source node와 sink node間의 transmittance를 G로 表示한다면 Mason의 公式은 아래와 같이 表示된다.

$$G = \frac{1}{\Delta} \sum_{i=1}^n T_i \Delta_i \quad (3)$$

n=source node와 sink node사이의 forward path의 總數

$$\Delta = 1 - \sum_i T_i + \sum_{i,j} T_i T_j - \sum_{i,j,k} T_i T_j T_k + \dots$$

T_i =source node와 sink node間, i番째 forward path의 transmittance

Δ_i = T_i path를 接하는 모든 loop를 除去하고서 求한 Δ .

T_i 는 loop gain이다. product summation $\sum T_i T_j$ 等等에는 非接(non-touching) loop만 包含된다. Mason 公式은 보기와 달라 譯 쓰기 쉬운 公式이다. 例로서 Fig.2에 있어 X_1 과 X_3 사이의 gain G를 求해 보기로 하자.

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 - (t_{22} + t_{23}t_{32} + t_{33}) + (t_{22}t_{33}) \\ T_1 &= t_{13} \\ \Delta_1 &= 1 - t_{22} \\ T_2 &= t_{12}t_{23} \\ \Delta_2 &= 1 - 0 \end{aligned}$$

Mason 公式을 써서 아래와 같은 G를 求하게 된다.

$$G = \frac{t_{13}(1-t_{22}) + t_{12}t_{23}}{1-t_{22}-t_{23}t_{32}-t_{33}+t_{22}t_{33}}$$

다음엔 回路 問題를 Mason 公式을 써서 풀어 보기로 한다. 아래의 low-pass filter 回路의 voltage ratio V_2/V_1 을 求하기로 한다.

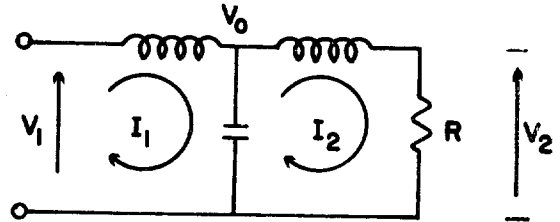


그림 3 간단한 低域필터
Fig.3. A SIMPLE LOW-PASS FILTER

Fig.4는 Eqs. (4)에 該當하는 signal-flow graph이다.

$$\begin{aligned} I_1 &= (V_1 - V_0) (1/s) \\ V_0 &= (I_1 - I_2) (1/s) \\ I_2 &= (V_0 - V_2) (1/s) \\ V_2 &= I_2 R \end{aligned} \quad (4)$$

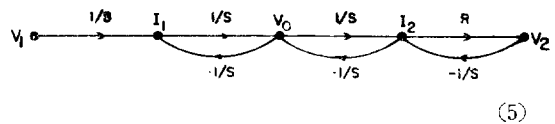


그림 4 方程式 4의 시그널플로우 그래프 表示
Fig. 4. SIGNAL-FLOW GRAPH REPRESENTATION OF EQ. 4

$$\begin{aligned} \Delta &= 1 + (2 + Rs)/(s^2) + R/s^4 \\ T_1 &= R/s^3 \\ \Delta_1 &= 1 - 0 \end{aligned}$$

$$G = R/(s^3 + 3s + R)$$

위의 問題를 푸는데 있어 Eq.(4)를 일단 쓰고 그에 따라 Fig.4를 그렸다. 그런데 大部分의 경우 方程式을 쓰는 過程은 省略하고 flow-graph를 直接 그릴 수 있다 여기서 한가지 지적해야 할 것은 flow-graph가 unique

하지 않다는 점이다. 卽 變數를 어떻게 擇하는가에 따라 各各 다른 signal flow-graph를 그리게 된다. 그러나 V_2/V_1 은 勿論 變數選定의 如何를 莫論하고 一定하다.

II. 任意的 non-source node를 source node로 轉換하는 方法

아주 便利한 Mason公式은 source와 sink node 사이에 쓸 수 있으나 non-source와 sink node에는 利用할 수 없다. 例로서 Fig.4에 있어서 V_2/V_1 은 直接公式을 써서 求할 수 있으나 其他의 函數 V_2/I_1 , V_1/I_1 , V_2/V_0 等等은 直接 求할 수 없다.

驅動點函數인 V_1/I_1 을 求하기 爲해선 I_1 이 source node가 되도록 方程式을 다시 써야할 必要가 생긴다. 이러한 不便을 除去하기 爲하여 여기서 著者는 non source를 source node로 直接 轉換하는 rule를 써서 보기로 한다.

爲先 세個의 node가 있는 signal-flow graph에서 X_1 이 source node라고 假定한다.

그러면 이 graph에 該當하는 方程式은

$$\begin{aligned} X_2 &= t'_{12}X_1 + t'_{22}X_2 + t'_{32}X_3 \\ X_3 &= t'_{13}X_1 + t'_{23}X_2 + t'_{33}X_3 \end{aligned}$$

$t'_{22}X_2$ 와 $t'_{33}X_3$ 를 各各 方程式의 左側에 移動시킨다는 것은 元來의 graph에서 self loop를 除去하는 것에 該當한다. 方程式은 아래와 같이 된다.

$$\begin{aligned} X_2 &= t_{12}X_1 + t_{32}X_3 \\ X_3 &= t_{13}X_1 + t_{23}X_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Self-loop의 除去는 모든 들어오는 signal를 $(1-t'_{jj})$ 로 나누어 줄으므로 簡單히 할 수 있으므로 이제부터 Eq.(6)과 같은 型의 方程式만을 取하기로 한다. node가 n個있는 signal-flow graph는

$$X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_{ji}X_j \quad 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

만일 k번째 node가 source node (independent variable) 라면

$$X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_{ji}X_j \quad 1 \leq i \leq n \quad i \neq k \quad (8)$$

變數가 네 個 있을 때는 아래와 같은 4 set의 方程式을 쓸 수 있는데 flow-graph를 그리면 各各 다른 source node를 갖게 된다.

$$\begin{aligned} X_1 &: \text{Source Node} \\ X_2 &= t_{12}X_1 + t_{32}X_3 + t_{42}X_4 \\ X_3 &= t_{13}X_1 + t_{23}X_2 + t_{43}X_4 \\ X_4 &= t_{14}X_1 + t_{24}X_2 + t_{34}X_3 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} X_2 &: \text{Source Node} \\ X_1 &= (1/t_{12})X_2 - (t_{32}/t_{12})X_3 - (t_{42}/t_{12})X_4 \\ X_3 &= t_{13}X_1 + t_{23}X_2 + t_{43}X_4 \\ X_4 &= t_{14}X_1 + t_{24}X_2 + t_{34}X_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} X_3 &: \text{Source Node} \\ X_1 &= (1/t_{12})X_2 - (t_{32}/t_{12})X_3 - (t_{42}/t_{12})X_4 \\ X_4 &= t_{14}X_1 + t_{24}X_2 + t_{34}X_3 \\ X_4 &= t_{14}X_1 + t_{24}X_2 + t_{34}X_3 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} X_4 &: \text{Source Node} \\ X_1 &= (1/t_{12})X_2 - (t_{32}/t_{12})X_3 - (t_{42}/t_{12})X_4 \\ X_2 &= (1/t_{23})X_3 - (t_{13}/t_{23})X_1 - (t_{43}/t_{23})X_4 \\ X_3 &= (1/t_{34})X_4 - (t_{14}/t_{34})X_1 - (t_{24}/t_{34})X_2 \end{aligned} \quad (12)$$

n node의 경우 X_1 이 source node

$$X_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n t_{ji}X_j \quad 2 \leq i \leq n \quad (13)$$

m번째 node를 source node로 轉換한다면

$$\begin{aligned} X_i &= (1/t_{i,i+1})X_{i+1} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i \\ j \neq i+1}}^n (t_{ji,i+1})/(t_{i,i+1})X_j \\ &\text{for } i=1, 2, 3, \dots, (m-1) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} X_i &= \sum_{j=1}^n t_{ji}X_j \\ &\text{for } (m+1) \leq i \leq n \end{aligned} \quad (15)$$

Eq.(14)에서 Rule 1과 Rule 2를 그리고 Eq.(15)에서 Rule 3를 얻게 된다.

Rule 1 A path touching all [the nodes between the original source node and the new source node will be inverted, and the branches in the inverted path will assume the inverse of the original transmittances.

Rule 2 Each branch (Which is not the part of the inverted path) entering a node(including the new source) in the inverted path will be lifted to the preceding node, and the transmittance of the new branch will be the negative of its original transmittance multiplied by the transmittance multiplied by the transmittance of the inverted branch it skipped over

Rule 3 Signals entering the rest of the nodes remain unaffected.

위의 세個의 rule에 依하여 이제 signal-flow graph(b), (c)와, (d)를, eqs. (10), (11), (12)를 쓰는 過程을 省略하고 直接(a)로부터 그릴 수 있다.

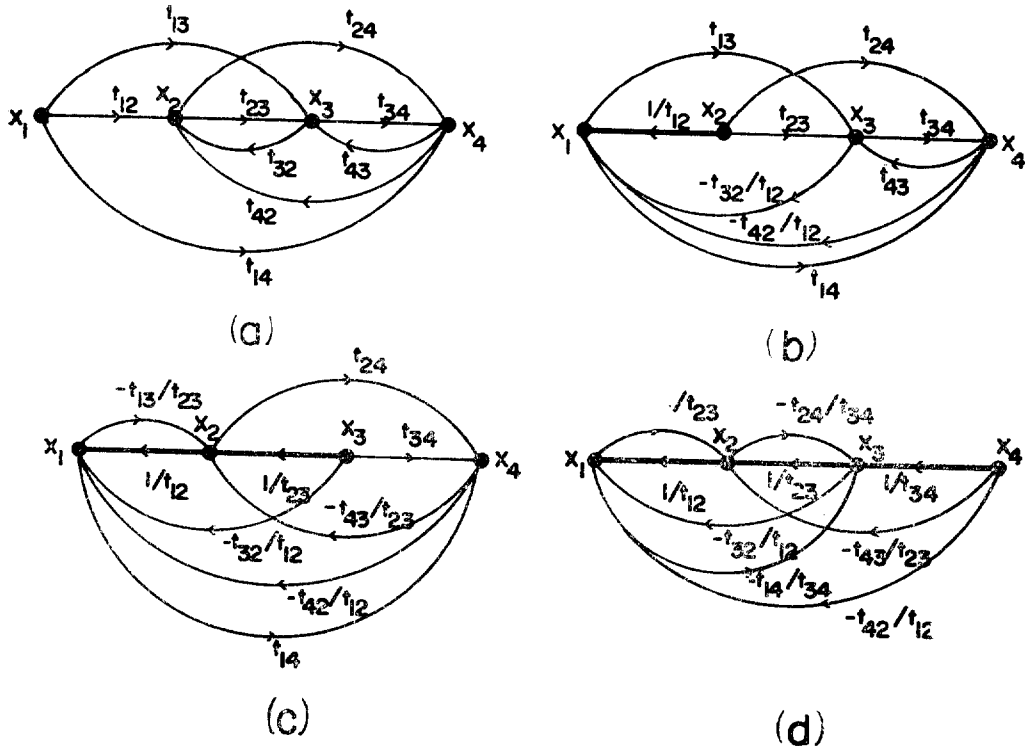


그림 5 方程式 9, 10, 11 및 12를 시그널 플로우 그래프로 表示한 것. 굵은 線은 逆轉된 path이다.
 FIG. 5. SIGNAL-FLOWGRAPHS REPRESENTING FOUR SETS OF EQUATIONS 9, 10, 11 and 12
 THE THICK LINE INDICATES AN INVERTED PATH

III. Signal-flow graph 에 依한 回路分析

前章에서 誘導한 3個의 rule 를 써서 여러가지 回路函數를 直接 求해 보기로 한다. Signal-flow graph 의 node 는 dimension 으로 電壓이나 電流이다. 그러므로 回路函數는 驅動點函數이거나 傳達函數가 되는 것이다

例 1 아래의 梯形回路에서 回路函數

$$V_2/V_1, V_2/I_1, V_1/I_1, V_2/V_0, V_1/V_0, V_2/I_2, V_1/I_2, V_1/V_2$$

等을 求하라

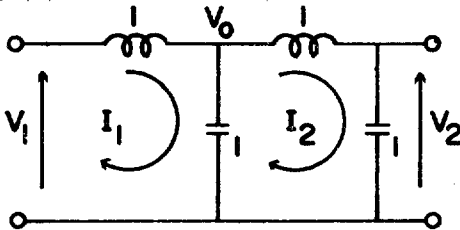


그림 6 例 1의 사다리 回路網
 FIG. 6 LADDER NETWORK OF EXAMPLE 1

解 위선 回路方程式을 쓴다

$$I_1 = V_1/s - V_0/s$$

$$V_0 = I_1/s - I_2/s$$

$$I_2 = V_0/s - V_2/s$$

$$V_2 = I_2/s$$

Fig. 7의 graph(a)는 위의 方程式에서 直接그린다. graph (b), (c), (d)와 (e)는 各: 다른 source node I_1, V_0, I_2, V_2 를 갖는데 그들은 3個의 rule에 依하여 graph (a)로 부터 直接 그리게 된다.

(a)로 부터 $V_2/V_1 = 1/(s^4 + 3s^2 + 1)$

(b)로 부터 $V_2/I_1 = 1/(s^3 + 2s)$,

$$V_1/I_1 = (s^4 + 3s^2 + 1)/(s^3 + 2s)$$

(c)로 부터 $V_2/V_0 = 1/(s^2 + 1)$,

$$V_1/V_0 = (s^4 + 3s^2 + 1)/(s^2 + 1)$$

(d)로 부터 $V_2/I_2 = 1/s, V_1/I_2 = (s^4 + 3s^2 + 1)/s$

(e)로 부터 $V_1/V_2 = s^4 + 3s^2 + 1$

其他의 函數도 求해진다.

$$V_0/I_1 = (V_0/V_2)(V_2/I_1) = (s^2 + 1)/(s^3 + 2s)$$

$$I_2/I_1 = (I_2/V_1)(V_1/I_1) = 1/(s^2 + 2)$$

IV. 結 論

第1章에 Signal-flow graph 의 用法을 說明했다. 이는 著者가 誘導한 3個의 轉換 rule(第2章)를 理解하는데 基礎가 되기 때문에 넣은 것이다.

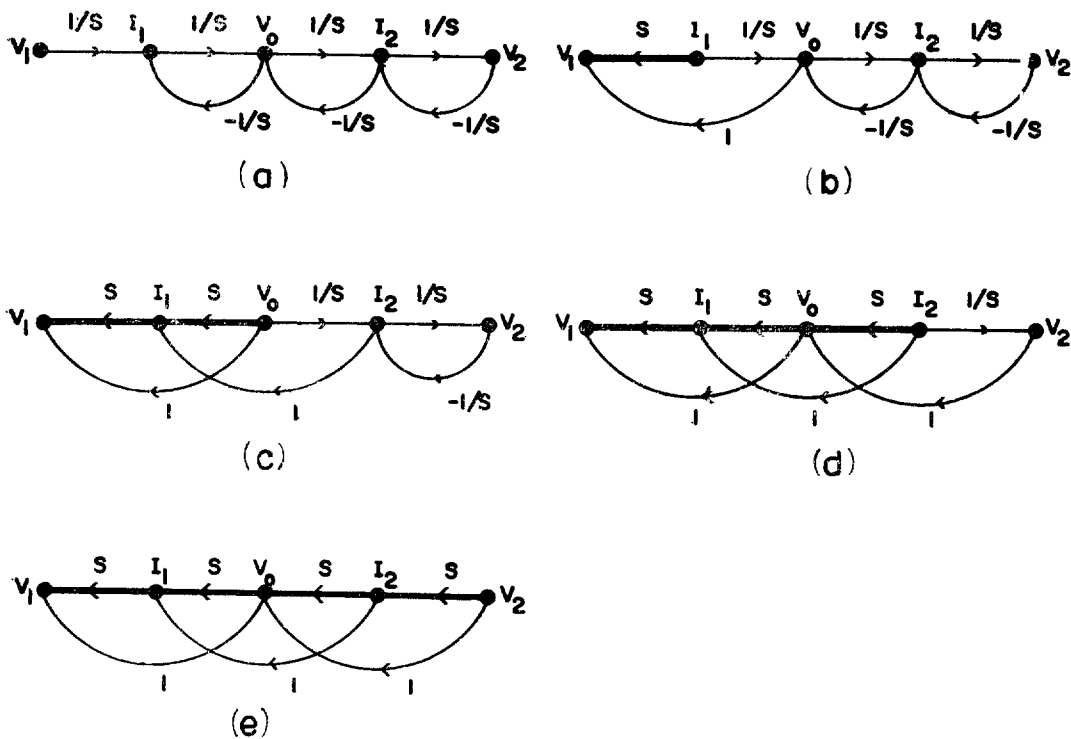


그림7. 例1에 있어서 NONSOURCE NODE 를 SOURCE NODE 로 變換한것. 굵은 線은 逆轉된 path 이다.
 Fig.7. CONVERSION OF NONSOURCE NODE INTO SOURCE NODE IN EXAMPLE 1.
 THE THICK LINE INDICATES AN INVERTED PATH

第3章에선 第2章에서 求한 rule 을 써서 여러개의 signal flow graph 를 그려 모든 回路 函數를 graph 的 操作에 依하여 直接求할 수 있다는 것을 例示 하였다.

REFERENCES

1. B. Kuo, Linear Networks and Systems. New York: McGraw-Hill, 1967.
2. H. Ruston and J. Bordogna, Electric Networks: functions, filters, analysis. New York: McGraw-Hill, 1966.
3. Y. Chow and E. Cassagnol, Linear Signal-flow

- Graphs and Applications. New York: Wiley, 1962.
4. S.J. Mason, "Feedback Theory-some Properties of Signal Flow Graphs," Proc. IRE, vol. 41, pp. 1144-1156, September, 1953.
5. S.J. Mason, "Feedback Theory-Further Properties of signal Flow Graophs," Proc. IRE, vol.44, pp. 920-926, July, 1956
6. H.K. Kim, "Conversion of an Arbitrary Nonsource Node into a Source Node in the Signal-flow Graph," IEEE Trans. on Education, Vol. E-11, No. 1, March, 1968.