

Z-變換法에 의한 第1型位置 써어보메카니즘의 解析

The Analysis of the Type-1 Positioning Servomechanism by the Z-transform Method

韓 萬 春* · 林 光 宣**
(Man Choon Han, Kwang Sun Lim)

[ABSTRACT]

A typical type-1 positioning servomechanism is theoretically analyzed as a multirate sampled-data system which contains two or more signals sampled at different rates by the Z-transform method. And also it is analyzed as a continuous system by using the Yonsei 101 Electronic Analog Computer.

Comparing the solution of the multirate sampled data system with that of the continuous system to a step input, it is concluded that the response time of the output of the multirate sampled-data system is reduced by a multirate controller, the ripple between samples is lessened and all the transients are diminished within one period.

1. 序 論

Z變換法의 概念의 嚆矢는 DeMoivre가 Z變換과 實質의 으로 같은 發生函數를 確率理論에 紹介했던 1730年 代로 올라갈 수 있으므로 새로운 것이 아니다. 그후 1812年 Laplace는 發生函數의 概念을 널리 使用했고 1949年 H.L. Seal은 確率理論에 發生函數를 應用한 史의 一覽을 發表하였다. 最近 디지털電子計算機가 널리 使用됨으로써 Z變換法은 더욱 發展되고 廣範圍로 應用되게 되었다.

흘러들어오는 信號나 情報가 不連續的인 不連續系統을 理解하기 위해서 最近에 새로운 系統解析方法이 많이 發展되었다. 最近에 發展되는 디지털電子計算機에 適用되고 피드백 制御系統에서 重要한 位置를 차지하는 샘플데이터 制御系統은 信號가 한點 또는 여러 點에 一定한 時間 間隔을 두고 供給되는 系統을 말한다. 即 두 連續信號사이에는 아무 情報도 받지 않는 系統이다. 連續制御系統은 샘플데이터 制御系統의 特別한 境遇, 即 샘플링週期T가 零으로된 境遇라고 생각할 수 있다. 샘플데이터 制御系統의 應用은 넓고 多樣하나 大體로 다음의 두가지로 나눌 수 있다.

- 1) 情報가 샘플로만 되어있는 系統
- 2) 連續制御系統이지만 故意로 샘플링情報를 取하는

系統

本稿에서는 가장 普遍的인 第1型 位置써어보메카니즘에 對해서 多比率 샘플데이터에 依한 디지털 制御器를 決定하여 求한 理論解와 延世101相似型電子計算機에 依한 連續解를 比較하고 디지털 制御器를 適用함으로써 補償이 容易함을 研究 檢討하고자 한다.

2. 系統解析의 Z變換法

A. 不連續函數와 Z變換의 定義

不連續한 時間 即 nT 에서만 信號가 있는 不連續系統을 생각한다. 그림 1에서 不連續函數 $f(0T), f(1T), f(2T), \dots, f(nT), \dots$ 는 $t=nT$ 에서 連續函數 $f(t)$ 의 값을 나타낸다. 여기서 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ T 는 샘플링週期이다. 이와같은 不連續系統의 解析은 Z變換法으로

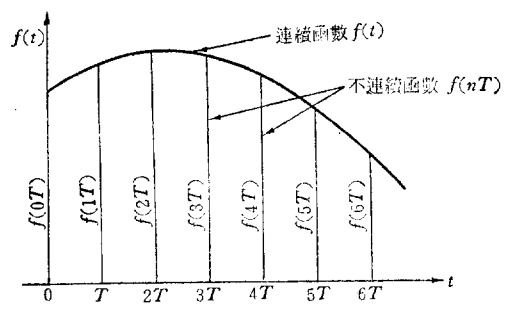


그림 1 不連續函數와 連續函數

*正會員: 延世大學校理工大學電氣工學科.
**正會員: 延世大學校電氣工學科

할수 있다. T 를 一定한 陽數라하고 $t \geq 0$ 인 境遇에 函數 $f(t)$ 가 定義된다고하면 $f(t)$ 의 z 變換은 다음과같은 複素數 z 의 函數이다.

$$g[f(t)] = F^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)z^{-n} \dots\dots\dots(1)$$

여기서 $|z| > \frac{1}{\rho}$, $\rho =$ 級數의 收斂半徑

記號 g 는 $f(t)$ 의 z 變換을 表示한다.

連續函數 $f(t)$ 에서 $f(nT)$ 의 값만 使用되므로 z 變換은 事實上 數列 $\{f(nT)\}$ 로 定義된다.

B. Laplace 變換과 Z 變換과의 關係

어떤 函數 $f(t)$ 의 Laplace 變換은 다음과 같이 定義된다.

$$F(s) \triangleq \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \dots\dots\dots(2)$$

여기서 (複素數 s 의 實數部) $> \delta_0$

$\delta_0 = f(t)$ 의 絕對收斂의 橫線

Laplace 逆變換은 다음과 같은 Bromwich의 積分에 依해서 表示된다. 即

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds \dots\dots\dots(3)$$

여기서 $c > \delta_0$, $t > 0$ 이다. 式(3)은 $s = x + jy$ 인 複素數平面에서 $s = c$ 인 直線을 따라 積分할 수 있다. 이때 實數 c 는 모든 特異點이 直線 $s = c$ 의 왼쪽에 놓이도록 擇한다. 式(3)의 積分은 等高積分으로 求할 수 있다.

$$\frac{1}{2\pi j} \int_c F(s)e^{st} ds \dots\dots\dots(4)$$

여기서 c 는 그림 2의 等高이다.

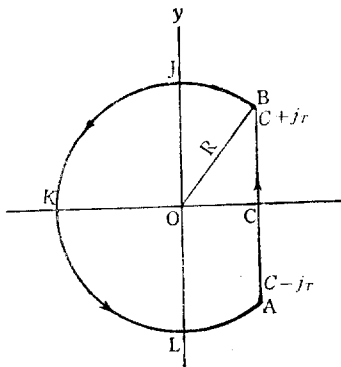


그림 2 Bromwich의 等高積分

이 等高는 Bromwich 等高라고 하는데 直線 AB와 原點 O가 中心이고 半徑이 R인 圓의 弧 BJKLA로 되어있다. 弧 BJKLA를 τ 로 表示하면 式(3)에서

$$f(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-jT}^{c+jT} F(s)e^{st} ds$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_c F(s)e^{st} ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau} F(s)e^{st} ds \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_c F(s)e^{st} ds \right\} \\ &= F(s)의 極點에서의 F(s)e^{st}의 留數의 和 \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

그런데 다음과 같은 積分變換으로 $F(s)$ 로부터 直接 $F^*(z)$ 을 求할수 있다.

$$F^*(z) \triangleq g[F(s)] \dots\dots\dots(6)$$

그림 1의 函數 $f(nT)$ 는 面積 $hf(nT)$ 인 矩形펄스의 合으로 생각할수 있다. 여기서 h 는 矩形펄스의 幅이다. $\delta(t-nT)$ 는 單位面積을 갖는 펄스의 極限으로 생각되므로 函數 $f(nT)$ 는 近似的으로 $\sum hf(nT)\delta(t-nT)$ 로 된다. $f(nT)$ 를 펄스의 列, 即 $f(0)\delta(t)$, $f(1T)\delta(t-T)$, $f(2T)\delta(t-2T)$, $\dots\dots f(nT)\delta(t-nT)$ 로 바꾸기 위해서는 스케일因子 $1/h$ 이 必要하다.

그러므로 샘플 取한 函數 $f(nT)$ 를 임펄스函數 $f^*(t)$ 로 代置할수있다. 이와같이 임펄스函數의 定義는 $t=0^+$ 에서 完全한 임펄스가 일어난다고 假定하면

$$f^*(t) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\delta(t-nT) \dots\dots(7)$$

式(7)의 Laplace 變換을 求하기 위해서

$$\delta(t) = 0, t \neq 0, \int_a^b \delta(t) dt = 1 \quad a < 0 < b \dots\dots\dots(8)$$

$$\mathcal{L}[\delta(t-kT)] = \int_0^{\infty} \delta(t-kT)e^{-st} dt = e^{-kTs} \dots\dots(9)$$

式(8)과 (9)의 關係를 利用하면

$$F^*(s) \triangleq \mathcal{L}[f^*(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)e^{-nTs} \dots\dots\dots(10)$$

式(10)에서 e^{TS} 를 z 로 置換하면 $f(t)$ 의 z 變換이 됨을 알수 있다. 그러므로

$$F^*(z) = F^*(s) \Big|_{s=T^{-1} \ln z} \dots\dots\dots(11)$$

여기서 $\sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-nT) = \delta_T(t)$ 로 나타내면 z 變換과 Laplace 變換사이의 關係가 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} F^*(z) \Big|_{z=e^{sT}} F^*(s) &\triangleq \mathcal{L}[f^*(t)] \\ &= \mathcal{L}[f(t)\delta_T(t)] \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

그런데 위의 Laplace 變換에 다음의 Convolution 定理를 式(12)에 利用하면

$$\mathcal{L}[f(t)g(t)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p)G(s-p) dp \dots\dots(13)$$

式(12)는

$$\begin{aligned} F^*(s) &= F^*(z) \Big|_{z=e^{sT}} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} dp \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

여기서 $F(p) = F(s) \Big|_{s=p} = \mathcal{L}[f(t)] \Big|_{s=p}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-e^{-TS}} &= 1 + e^{-TS} + e^{-2TS} + \dots\dots + e^{-nTS} + \dots\dots \\ &= \mathcal{L}[\delta_T(t)] \end{aligned}$$

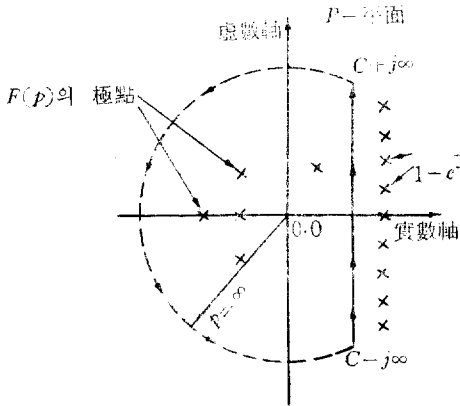
그러므로 $F^*(z)$ 와 $F^*(s)$ 사이에는 다음의 關係가 成立

된다.

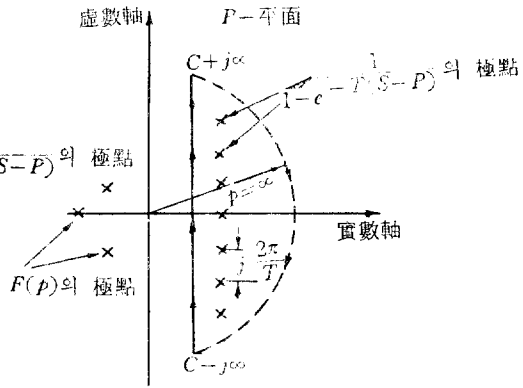
$$F^*(z) \triangleq \mathcal{Z}[F^*(s)] = \frac{1}{2\pi j} \left[\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} dp \right] e^{Ts} = z \dots (15)$$

$F(z)$ 를 計算하기 위해서 $F(s)$ 의 分母의 s 次數가 分子보다 2次높다고하면 式(14)의 積分徑路는 積分의 極點을 包含하거나 通過하지 않는 解析帶에 놓인다. 式(15)의 線積分徑路는 P -平面的 오른쪽 半平面에 있는 $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ 의 極點을 時計方向으로 包含할 수도 있고 $F(p)$ 의 極點을 反時計方向으로 包含할 수도 있다. 그림 3의 (a)와 같이 P -平面的 왼쪽 半平面을 따라 式(14)의 積分을하면 無限半圓上의 積分은 零이므로 다음과 같아 된다.

$$F^*(z) \Big|_{e^{ST}=z} = \frac{1}{2\pi j} \oint F(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} dp \dots (16)$$



(a) p -平面的 왼쪽 半平面에서의 積分徑路



(b) p -平面的 오른쪽 半平面에서의 積分徑路

그림 3 積分 徑路

만일 $F(s)$ 가 單極을 가지면 Cauchy의 積分은 閉徑路안에 있는 極點의 留數의 總和로 된다. 即

$$F^*(z) = \sum_{B(p)의根} \frac{A(p)}{B'(p)} \times \frac{1}{1-e^{-Ts}e^{pT}} \text{의 留數} \Big|_{z=e^{Ts}} \dots (17)$$

여기서 $F(p) = F(s)|_{s=p} = \frac{A(p)}{B(p)}$

$B(s)|_{s=p}=0$ 이 單根단을 가질때 다음과 같이 된다.

$$F^*(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(S_n)}{B'(S_n)} \times \frac{1}{1-e^{TS}z^{-1}} \dots (18)$$

여기서 S_1, S_2, \dots, S_n 은 $B(s)=0$ 의 單根이며

$$B'(S_n) = \frac{dB}{dS} \Big|_{S=S_n} \text{이다.}$$

式(14)의 積分은 그림 3의 (b)와 같이 p -平面的 오른쪽 半平面에 있는 $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ 의 極點만을 包含하는

等高積分에 依해서도 計算할 수 있다. 그러므로 式(14)은 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$F^*(s) = \mathcal{L}[f^*(t)] = \frac{1}{2\pi j} \oint F(p) \frac{1}{1-e^{-T(s-p)}} dp \dots (19)$$

式(19)는 Cauchy의 定理에 該當하는 留數의 總和의 負의 값과 같다.

$F^*(s) = -(\text{積分徑路에 包含된 極點에서의 積分의 留數의 總和})$

C. 擴張된 Z變換

不連續系統의 여러가지 應用面과 特히 制御系統에 디지털 電子計算機를 使用時에 샘플링 瞬間사이의 出力은 대단히 重要하다. 하이브리드系統에서는 出力이 連續函

數이므로 z 變換法은 適合하지 않지만 z 變換을 모든 瞬間에 系統의 應答을 나타내도록 擴張할 수 있다.

上述한 z 變換은 擴張된 z 變換의 特別한 境遇로서 샘플테이터 制御系統에 擴張된 z 變換을 應用하는것은 連續制御系統에 Laplace變換을 應用하는 것과 같다. 擴張된 z 變換은 $t=nT (n=0, 1, 2, 3, \dots)$ 以外에서 $f(t)$ 의 값을 얻기 위해서 그림 4와 같이 橫擬遲延 ΔT 만큼 函數 $f(t)$ 를 遲延시키는 것이다. Δ 를 0과 1사이에서 變化시키면 $t=(n-\Delta)T, n=0, 1, 2, 3, \dots, \leq \Delta \leq 1$ 에 對해서 $f(t)$ 의 모든 點을 얻을 수 있다. 그러나 無限半圓上의 積分의 收斂을 確實히 하기 위해서 即 無限半圓의 積分의 값이 없어지도록 變數를 다음과 같이 變化시킬 必要가 있다.

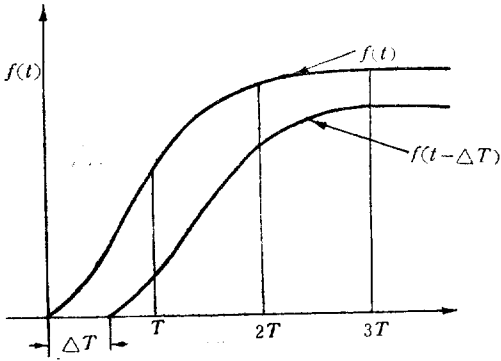


그림 4 $t=nT$ 인 瞬間外의 $f(t)$ 값을 얻기 위해 模擬 delay 된 出力

$$\Delta = 1 - m, \quad 0 \leq m < 1$$

그러므로 $t = (n-1+m)T, n=0, 1, 2, \dots, 0 \leq m < 1$ 따라서 $f(t)$ 의 擴張된 z 變換은 다음과 같이 定義된다.

$$F^*(z, m) \triangleq z_m [f(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} [f(n-1+m)T] z^{-n} \quad 0 \leq m < 1 \dots (20)$$

式(20)과 (7)에서

$$F^*(z, m) \Big|_{z=e^{sT}} \triangleq F^*(s, m) = \mathcal{L}[f^*(t, m)] = \mathcal{L}[f(t-T+mT)\delta_T(t)], \quad 0 \leq m < 1 \dots (21)$$

위의 式(21)은 다음과 같이 쓸 수도 있다.

$$F^*(z, m) \Big|_{z=e^{sT}} = \mathcal{L}[f(t-T+mT) \times \delta_T(t-T)] = e^{-Ts} \mathcal{L}[f(t+nT) \times \delta_T(t)] \quad 0 \leq m < 1 \dots (22)$$

Laplace 變換의 Convolution 定理로 부터

$$F^*(z, m) \Big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{2\pi j} Z^{-1} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{m p T} \frac{1}{1 - e^{-T(s-p)}} dp \quad 0 \leq m < 1 \dots (23)$$

다음에 $F(s)$ 가 正則 特異點을 가진다고 하고 왼쪽 半平

面內에서 積分하면 式(23)은

$$F^*(z, m) = Z^{-1} \sum_{F(p)의 極點} \frac{F(p) e^{m p T}}{1 - e^{p T} z^{-1}} \quad 的 留數 \quad 0 \leq m < 1 \dots (24)$$

3. 샘플데이터系統에 Z變換法의 應用

A. 샘플링 過程

샘플데이터 系統의 特徵은 데이터가 펄스의 列로 一定한 時間 間隔을 두고 系統의 한곳이나 여러곳에 나타나는 것이다. 連續데이터를 이러한 펄스의 列로 바꾸는 過程을 샘플링 過程이라하며 그림 5의 샘플러로서 나타낼 수 있다.

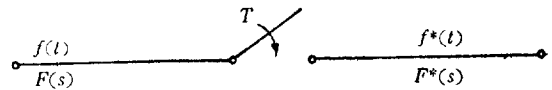


그림 5 샘플링 作用의 表示

그림 5는 連續函數 $f(t)$ 가 每 T 秒마다 瞬間的으로 닫혀지는 스위치를 通過함을 보여준다. 스위치가 닫혀져 있는 時間은 連續系統의 時定數보다 대단히 짧다. 그러나 實地의 샘플링 作用에서는 샘플러가 짧지만 有限한 時間동안 닫힌 狀態로 머물러 있는 것을 무시할 수 없다. 이러한 條件下에서 스위치가 닫힌 有限한 時間 h 동안에 出力의 振幅은 函數 $f(t)$ 의 振幅變化와 같지만 다른 時間에는 零이다.

그림 6은 이런 샘플링 作用을 나타낸다. 샘플러한 函數 $f^*(t)$ 는 有限한 時間 h 의 샘플의 列로 나타나는데 이 過程은 샘플링 函數 $p(t)$ 와 데이터 지닌 函數 $f(t)$ 와의 곱으로 생각된다.

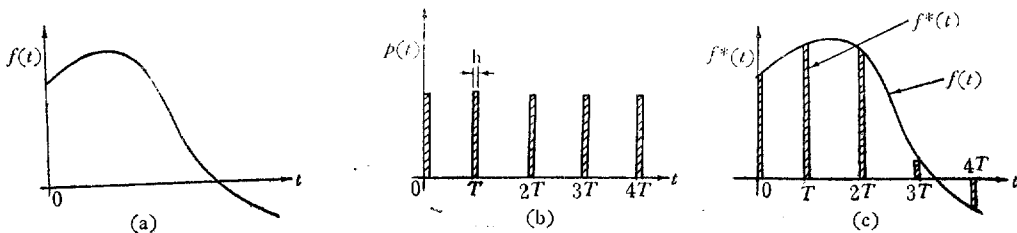


그림 6 有限한 샘플링 作用

即 이것은 搬送波 $p(t)$ 가 信號函數 $f(t)$ 에 依해서 變調 되는 變調過程과 같다.

$$f^*(t) = f(t)p(t) \dots\dots\dots(25)$$

샘플週期 T 는 一定하고 $p(t)$ 는 週期函數이므로 $p(t)$ 를 다음과 같이 Fourier 級數로 展開可能하다.

$$p(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_k e^{2\pi Kt/T} \dots\dots\dots(26)$$

$$\text{그러므로 } f^*(t) = \sum_{K=-\infty}^{\infty} C_k f(t) e^{j2\pi Kt/T} \dots\dots\dots(27)$$

샘플取한 函數 $f^*(t)$ 와 連續函數 $f(t)$ 의 Fourier 變換을 比較하기 위하여

$$\mathcal{F}[e^{jt}f(t)] = F(j\omega - \lambda) \dots\dots\dots(28)$$

여기서 $F(j\omega)$ 는 $f(t)$ 의 Fourier 變換이다. 그러므로

$$F^*(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k F\left[j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right] \dots\dots\dots(29)$$

여기서 $F^*(j\omega)$ 는 $f^*(t)$ 의 Fourier 變換이다. $F^*(j\omega)$ 는 Weighted Spectra 의 疊으로 되어 있으나 各 Weighed Spectra 는 Weighting 係數 C_k 와 置換偏角 $j\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$ 을 除外하고는 中央에 있는 項과 같다. 即 샘플링 過程의 效果로서 信號 스펙트럼에 比例하고 $2\pi k/T$ 만큼 週期가 移動된 假스펙트럼의 列이 생긴다. 이러한 스펙트럼은 原信號와 매우 다르므로 우리가 必要한 原데이터를 찾아야 하며 中央의 信號스펙트럼은 低周波 필터로서 얻을 수 있다. 주어진 스펙트럼을 完全히 通過시키지 必要없는 스펙트럼은 받아들이지 않는다는 點에서 이 필터는 優秀하지만 주어진 周波數보다 위에 있는 成分을 包含하지 않는 限 信號스펙트럼을 完全히 얻을 수 없으며 이와같은 不完全한 信號回復은 系統의 出力에 ripple을 發生케 한다. 入力信號를 回復시키기 위해서는 샘플링 周波數가 入力信號의 가장 큰 周波數成分의 2 倍보다 크거나 같아야 한다. 特別한 샘플링 瞬間에 샘플이 函數 $f(t)$ 의 크기를 나타내는 數字의 形態로 되는 디지털 系統에서 스위칭 函數의 振幅 h 는 無限히 작아진다. 스위칭 函數의 一般의인 形態는 임펄스 即 델타 函數 $\delta(t)$ 이므로

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \delta_T(t) \dots\dots\dots(30)$$

여기서 $\delta(t - nT)$ 는 時間 nT 에서 單位面積의 임펄스를 나타낸다. 그러므로 샘플 取한 函數 $f^*(t)$ 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$f^*(t) = f(t) \delta_T(t) \dots\dots\dots(31)$$

B. 샘플데이터系統의 傳達函數

① 單比率 系統

그림 7에서 線型系統의 出力은 時間의 連續函數이나 샘플取해진 出力을 얻기 위해서 入力샘플러와 同時에 作

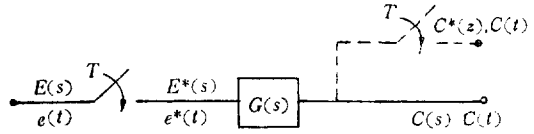


그림 7 一般의인 線型샘플러의 系統

用하는 假샘플러가 出力側에 있다고 假定한다.

그림 8에서 어떤 샘플瞬間 $t = nT$ 에서 系統의 임펄스 應答은 $t = 0$ 에서 $t = nT$ 되는 모든 瞬間에 임펄스 應答을 疊함으로 얻어진다.

$$\begin{aligned} C_{(nT)} &= e_{(0T)}g_{(nT)} + e_{(1T)}g_{(n-1)T} + \dots \\ &\quad + e_{(mT)}g_{(n-m)T} + \dots + e_{(nT)}g_{(0T)} \\ &= \sum_{m=0}^n e_{(mT)}g_{(n-m)T} \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

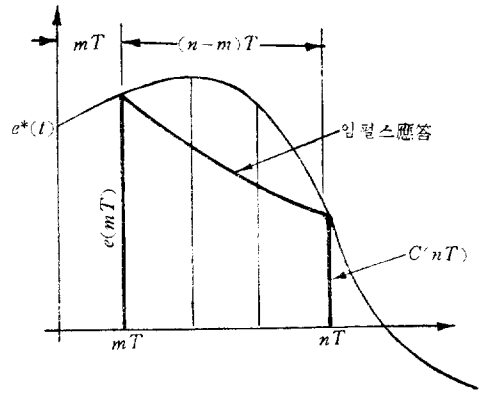


그림 8 線型 샘플러 系統의 임펄스 應答

$n - m > 0$ 인 境遇는 $g_{(n-m)T} = 0$ 이므로

$$C_{(nT)} = \sum_{m=0}^n e_{(mT)}g_{(n-m)T} \dots\dots\dots(33)$$

$$C^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{(nT)} z^{-n} \dots\dots\dots(34)$$

그러므로

$$C^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n e_{(mT)}g_{(n-m)T} z^{-n} \dots\dots\dots(35)$$

$K = n - m$ 으로 놓으면

$$C^*(z) = \sum_{K=-m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e_{(mT)}g_{(KT)} z^{-m} z^{-K} \dots\dots\dots(36)$$

$K < 0$ 인때 $g_{(KT)} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} C^*(z) &= \sum_{K=0}^{\infty} g_{(KT)} z^{-K} \sum_{m=0}^{\infty} e_{(mT)} z^{-m} \\ &= E^*(z) \times G^*(z) \dots\dots\dots(37) \end{aligned}$$

擴張된 z 變換을 取하면

$$C^*(z, m) = E^* \times G^*(z, m) \dots\dots\dots(38)$$

式(37)과 (38)의 基本的인 關係로부터 어떤 線型系統의 傳達函數도 求할 수 있다.

② 多比率 系統

그림 9에서 入力 $E(s)$ 는 週期 T 로 샘플이 取해져 連續系統 $G(s)$ 에 印加되고 $G(s)$ 의 出力은 週期 T/n 로 增加된 比率로 샘플이 取해져 $C(z_n)$ 로 나타나는데 線型系統 $G(s)$ 의 임펄스 應答을 合해서 連續的인 出力 $C(t)$ 는 다음과 같이 求할수 있다.

$$C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)g(t-kT) \dots\dots\dots(39)$$

出力側 샘플러를 通過한 샘플의 값은 $t=l\frac{T}{n}$ ($l=0, 1, 2, 3, \dots$)인 瞬間에 式(39)의 값과 같다. 即

$$C(l\frac{T}{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)g(l\frac{T}{n}-kT) \dots\dots\dots(40)$$

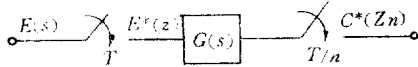


그림 9 느린 入力와 빠른 出力 샘플링을 가진 多比率 系統

出力의 z_n 變換은 다음과 같이 定義된다.

$$\begin{aligned} C^*(z_n) &= \sum_{l=0}^{\infty} C(l\frac{T}{n})z_n^{-l} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e(kT)g(l\frac{T}{n}-kT)z_n^{-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \sum_{l=0}^{\infty} g(l\frac{T}{n}-kT)z_n^{-l} \dots\dots(41) \end{aligned}$$

$l-nk=j$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} C^*(z_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) \sum_{j=-nk}^{\infty} g(j\frac{T}{n})z_n^{-(j+nk)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e(kT) (z_n^n)^{-k} \sum_{j=0}^{\infty} g(j\frac{T}{n})z_n^{-j} \\ &= E^*(z_n^n) \times G^*(z_n) \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

3. 多比率 制御器를 가진 피드백 系統의 傳達函數

그림 10은 多比率 制御器를 가진 系統의 블럭線圖

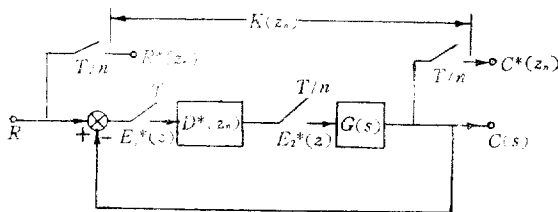


그림 10 多比率 制御器를 가진 系統의 블럭線圖

이다.

$$E_1^*(z) = R^*(z) - C^*(z) \dots\dots\dots(33)$$

式(32)의 結果를 利用하면

$$C^*(z_n) = E_1^*(z_n^n) D^*(z_n) G^*(z_n) \dots\dots\dots(34)$$

式(33)과 (34)에서 $E_1^*(z)$ 를 消去하기 위해서 式(34)를 z 變換한다.

$$\begin{aligned} C^*(z) &\triangleq y[C^*(z_n^n)] = y[E_1^*(z_n^n) D^*(z_n) G^*(z_n)] \\ &= E_1^*(z) y[D^*(z_n) G^*(z_n)] \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

여기서 $C^*(z)$ 는 多比率 z 變換 $C^*(z_n)$ 에 該當하는 單比率 z 變換이다. 式(35)를 式(33)에 代入해서 $E_1(z)$ 를 풀면

$$E_1(z) = \frac{R^*(z)}{1 + y[D^*(z_n) G^*(z_n)]} \dots\dots\dots(36)$$

式(36)을 式(34)에 代入하면

$$C(z_n) = \frac{R^*(z_n^n) D^*(z_n) G^*(z_n)}{1 + y[D^*(z_n) G^*(z_n)]} \dots\dots\dots(37)$$

式(37)의 擴張된 Z 變換을 取하면

$$C(z, m) = \frac{R^*(z_n^n) D^*(z_n) G^*(z_n m)}{1 + y[D^*(z_n) G^*(z_n)]} \dots\dots\dots(38)$$

여기서 $y[G^*(z_n)] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} G^*(z_n e^{j2\pi k/n})$ 의 關係를 써서 式(38)의 $y[D^*(z_n) G^*(z_n)]$ 의 값을 求할수 있다.

4. 第1型 位置셔어보메카니슴과 多比率 샘플데이터에 依한 理論解

A. 第1型 位置셔어보메카니슴의 傳達函數

그림 11은 基本的인 第1型셔어보메카니슴의 블럭線圖를 表示한다.

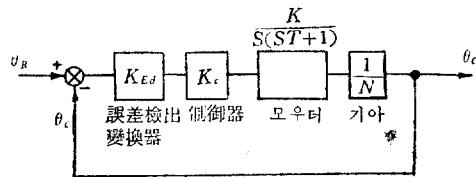


그림 11 第1型 位置셔어보메카니슴

여기서 制御器의 利得 K_c 만이 便利한 變數로 된다. 速度-늦음誤差를 基準으로 할때 必要한 定常狀態의 利得은

$$\begin{aligned} \frac{W_R}{E_{SS}} &= K_N = \frac{K_c K_{Ed} K}{N} \text{으로 規定되며} \\ K_c &= \frac{W_R}{E_{SS}} \times \frac{N}{K \cdot K_{Ed}} \end{aligned}$$

여기서 W_R =最大入力角速度

E_{SS} =定常狀態의 許容速度-늦음誤差

定常狀態에서 利得이 1이고 電動機의 時定數 τ 도 1인 경우를 생각하면 그림 11은 그림 12와 같이 된다.

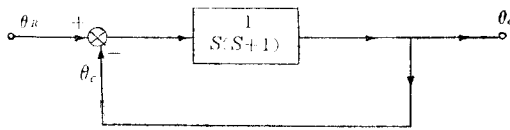


그림 12 一般的인 位置써어보메카니즘

B. 多比率 制御器의 決定

그림 9에서 有限한 整定時間을 갖도록 即 모든 過渡應答이 한週期 T內에서 끝나도록 加速因子 n을 選擇할수 있다. 이러한 方法은 어떤 有限한 整定時間을 갖기 위한 設計에도 適用되지만 ripple을 없애기 위해서는 過渡應答을 한週期 T에서 끝내도록 加速因子를 決定하여야 한다. 그림 9에서 系統出力의 變換은

$$C^*(z_n) = E_1^*(z_n) \times D^*(z_n) \times G^*(z_n) \dots (39)$$

만일 E₁에 單하나의 펄스가 나타나도록 n을 取하면 式(39)는

$$C^*(z_n) = r_o D^*(z_n) G^*(z_n) \dots (40)$$

여기서 r_o는 制御器에 供給된 誤差샘플의 값이다. 만일 入力이 單位階段入力이라면 r_o는 1이다, ripple 없는 應答을 위한 傳達函數 G(s)의 單比率 系統은 全연스 傳達函數 K̂*(z_n)을 가진다. 單比率 系統의 出力은

$$\hat{C}^*(z_n) = R^*(z_n) \hat{K}^*(z_n) \dots (41)$$

만일 이 두 系統의 出力이 같다면 式(39)와 (40)에서 多比率 制御器의 펄스傳達函數는

$$D^*(z_n) = \frac{R^*(z_n)}{r_o} \times \frac{\hat{K}^*(z_n)}{G^*(z_n)} \dots (42)$$

만일 T秒後에 過渡項이 없어진다면 式(42)로 주어진 出力은 n 샘플이 지나서 定常狀態에 達한다. ripple이 없는 階段應答을 얻기 위하여는 式(41)을 펄스 傳達函數의 項으로 表示할 수 있다.

$$G^*(z_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_n^{-i}}{\sum_{j=0}^k \beta_j z_n^{-j}} \dots (43)$$

β₀ ≠ 0 이라면 K̂*(z_n) × G*(z_n)의 모든 零點을 包含하고 定常狀態에서 K(1) = 1 이므로

$$\hat{K}^*(z_n) = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i z_n^{-i}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \dots (44)$$

式(44)와 (43)의 分子係數의 上極限은 n으로 取한다. K̂*(z_n)의 次數는 出力이 定常狀態에 到達하는데 必要한 펄스의 數를 決定하며 G*(z_n)의 分子多項式의 次

數와 같다. 式(43)과 (44)를 式(42)에 代入해서 R*(z_n)에 單位入力の z_n變換을 取하면 制御器펄스의 傳達函數는

$$D^*(z_n) = \frac{\sum_{j=0}^k \beta_j z_n^{-j}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i (1 - z_n^{-1})} \dots (45)$$

c. 擴張된 Z變換法에 의한 理論解

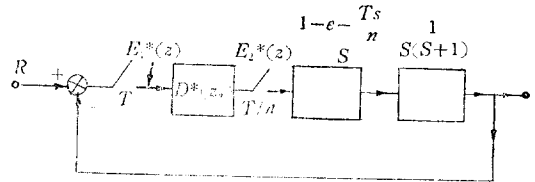


그림 13 디지털 制御器를 가진 第1型 位置 써어보메카니즘의 블록線圖

連續要素의 傳達函數는

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \times \frac{1}{s(s+1)} \dots (46)$$

이 系統의 펄스 傳達函數는 두개의 零點을 가지므로 n=2이다. 만일 T=2秒로 定하면

$$G^*(z, m) = \frac{(1 - z^{-1})}{z} \sum_{G(s)의 極點} \frac{e^{mPT}}{p^2(p+1)(1 - e^{PT}z^{-1})} \text{의 留數}$$

$$G^*(z, m) = \frac{(1 - z^{-1})}{z} \left[\frac{d}{dp} \left\{ \frac{e^{mPT}}{(p+1)(1 - e^{PT}z^{-1})} \right\} \right]_{p=0} + \frac{e^{mPT}}{p^2(1 - z^{-1}e^{PT})} \Big|_{p=-1} = \frac{(z-1)}{z^2} - \frac{mTe^{mPT}(p+1)(1 - z^{-1}e^{PT})}{(p+1)^2(1 - z^{-1}e^{PT})^2} \Big|_{p=0} + \frac{(z-1)}{z^2} \times \frac{e^{-m}}{(1 - z^{-1}e^{-1})}$$

$$= \frac{(z-1)}{z^2} \left[\frac{m(1 - z^{-1}) - \{(1 - z^{-1}) - z^{-1}\}}{(1 - z^{-1})^2} + \frac{e^{-m}}{(1 - z^{-1}e^{-1})} \right]$$

$$= \frac{(m-1 + e^{-m})z^2 + (2.368 - 1.368m - 2e^{-m})z}{z(z-1)(z-0.368)}$$

G*(z) = lim_{m→0} G(z, m) 이므로

$$G^*(z) = \frac{0.368z + 0.264}{(z-1)(z-0.368)} \dots (47)$$

式(45)와 (47)에서

$$D^*(z_2) = \frac{(1 - z_2^{-1})(1 - 0.368z_2^{-1})}{0.368(1.718)(1 - z_2^{-1})}$$

$$= \frac{1-0.368z_2^{-1}}{0.632} \dots\dots\dots(48)$$

$$C^*(z_n) = \frac{R^*(z_n)D^*(z_n)G^*(z_n)}{1+\gamma[D^*(z_n)G^*(z_n)]}$$

$$D^*(z_2)G^*(z_2) = \frac{0.368}{0.632} \left[\frac{z_2+0.718}{z_2(z_2-1)} \right]$$

$$\gamma[D^*(z_2)G^*(z_2)] = \frac{1}{2} \times \frac{0.368}{0.632} \left[\frac{(z_2+0.718)}{z_2(z_2-1)} + \frac{(0.718-z_2)}{z_2(z_2+1)} \right] = \frac{1}{(z_2^2-1)}$$

m=0 일 때

$$C^*(z_2) = \frac{\frac{z_2^2}{(z_2^2-1)} \times \frac{0.368(z_2+0.718)}{0.632z_2(z_2-1)}}{1 + \frac{1}{(z_2^2-1)}}$$

$$= \frac{0.582z_2+0.418}{z_2^2-z_2}$$

$$= 0.582z_2^{-1} + z_2^{-2} + z_2^{-3} + z_2^{-4} + \dots\dots\dots$$

n	0	1	2	3
t=nT	0	1sec	2sec	3sec
C(nT)	0	0.582	1	1

表 1 t=nT에서의 出力値

m=0.5 일 때

$$G^*(z_2 \cdot 0.5) = \frac{0.10653z_2^2 + 0.47094z_2 + 0.05453}{z_2(z_2-1)(z_2-0.368)}$$

$$C^*(z_2 \cdot 0.5) = \frac{\frac{z_2^2}{(z_2^2-1)} \times \frac{(z_2-0.368)}{0.632} \times \frac{0.10653z_2^2 + 0.47094z_2 + 0.05453}{z_2(z_2-1)(z_2-0.368)}}{1 + \frac{1}{(z_2^2-1)}}$$

$$= \frac{0.10653z_2^2 + 0.47094z_2 + 0.05453}{0.632z_2^3 - 0.632z_2^2}$$

$$= 0.1685z_2^{-1} + 0.914z_2^{-2} + z_2^{-3} + z_2^{-4} + \dots\dots\dots$$

n	0	1	2	3
t=nT-0.5	0	0.5sec	1.5sec	2.5sec
C(n, 0.5)T	0	0.1685	0.914	1

表 2 t=nT-0.5에서의 出力値

그림 18-C는 이들의 값을 나타내는 것이다.

5. 進相補償에 의한 相似型電子計算機의 解와 디지털 制御器를 사용한 擴張된 z變換法에 의한 理論解와의 比較

A. 應答曲線에 의한 系統의 定數算出

그림 14는 一般의 2階系統에서 減幅比ζ와 最大오버슈우트와의 關係를 나타낸다.

그림 12의 基本系統의 解를 相似型電子計算機로서 求

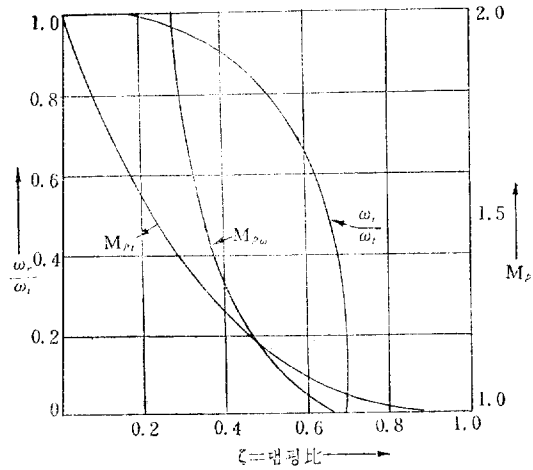


그림 14 2階 系統의 特性

한 그림 18-a에서 M_{PT}=1.15였고 그림 14에서 M_{PT}=1.15일 때 ζ=0.51임을 알 수 있다.

固有周波數 ω_n은

$$\omega = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_n \text{에서}$$

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi f_t}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi \times \frac{1}{7.3}}{0.86} = 1$$

여기서 f_t는 過渡振動周波數이며 記錄曲線으로부터 振動週期가 7.3秒임을 알 수 있다. 그림 12의 基本系統에 進相피드백 補償回路를 附加하였을 때의 블럭線圖는 그림 15와 같고 內部루우프의 傳達函數는

$$G'_o(s) = \frac{G_o}{1+G_oF} = \frac{1}{s(1+s+h)} \dots\dots\dots(49)$$

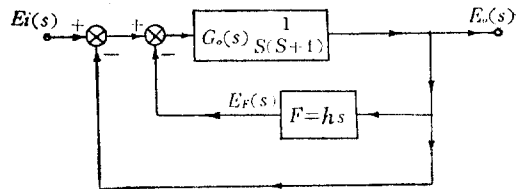


그림 15 補償된 系統의 블럭線圖

全體系統의 傳達函數 G'_c(s)는

$$G'_c(s) = \frac{1}{s^2 + (h+1)s + 1} \dots\dots\dots(50)$$

補償前後의 傳達函數는 本質의 으로 같은 型式을 가지며 特性方程式의 s의 係數만 變化한다. 2階傳達函數의 基本型의 特性方程式은 다음과 같다.

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \dots\dots\dots(51)$$

s의 係數는 $2\zeta\omega_n$ 으로서 系統의 넵핑을 支配하는 唯一한 項이므로 式(50)의 特性方程式과 式(51)에서 다음이 成立한다.

$$2\zeta\omega_n = h + 1 \dots\dots\dots(52)$$

이 式(52)에서 系統의 利得은 不變이며 ω_n 은 定數이므로 ζ 는 h 단의 函數이다. 系統의 過渡應答特性을 改善하기 위하여 넵핑比 ζ 을 0.8로 할때 $h=0.6$ 으로 補償된 全體系統의 傳達函數 $G_c'(s)$ 는 다음과 같다.

$$G_c'(s) = \frac{1}{s^2 + 1.6s + 1} \dots\dots\dots(53)$$

B. 計算機의 結綫

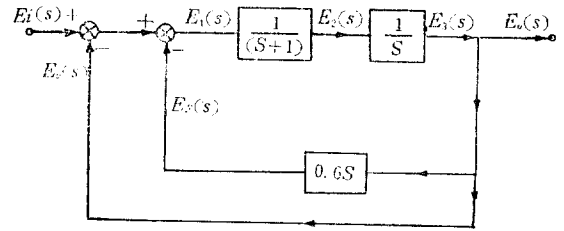


그림 16 補償된 系統의 블럭 線圖

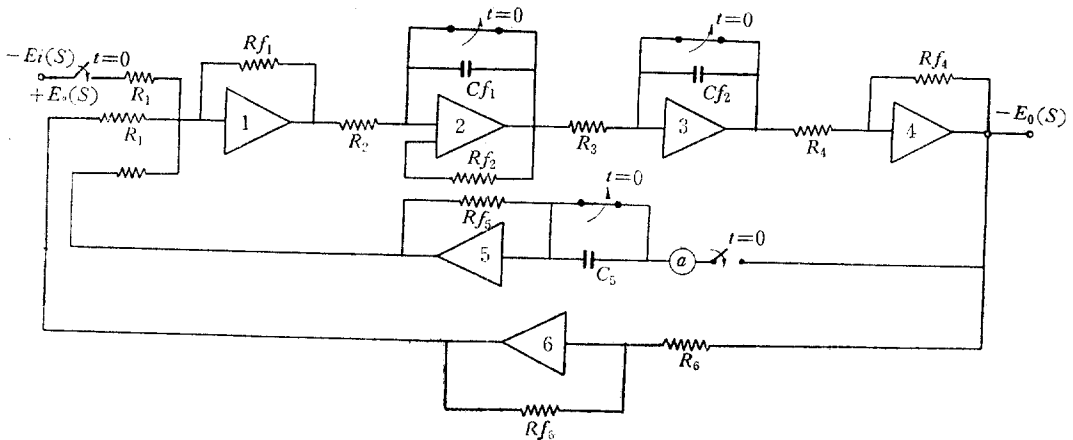


그림 17 計算機 結綫圖

$$E_1(s) = E_i(s) - E_o(s) - E_f(s) \dots\dots\dots(54-a)$$

$$E_2(s) = \frac{1}{s+1} E_1(s) \dots\dots\dots(54-b)$$

$$E_3(s) = \frac{1}{s} \times E_2(s) \dots\dots\dots(54-c)$$

$$E_f(s) = 0.6s E_o(s) \dots\dots\dots(54-d)$$

式(54)에서 (a)는 加算器로서, (b)는 遲相傳達函數로서 (c)는 積分器로서, (d)는 微分器로서 結綫된다. 이때 그림 17에서 演算素子와 係數포텐시오메터와의 關係는 다음과 같다.

$$E_1(s) = -\frac{R_{f1}}{R_1} [E_i(s) - E_o(s) - E_f(s)] \dots\dots\dots(55-a)$$

$$E_2(s) = -\frac{R_{f2}/R_2}{C_{f2}R_{f2}S+1} \times E_1(s) \dots\dots\dots(55-b)$$

$$E_3(s) = -\frac{1}{R_3C_{f3}} \times \frac{1}{s} \times E_2(s) \dots\dots\dots(55-c)$$

$$E_f(s) = -a_5 C_5 R_{f5} S E_o(s) \dots\dots\dots(55-d)$$

윗式의 各 係數와 式(54)의 各 係數를 같게 놓으면 다음과 같다.

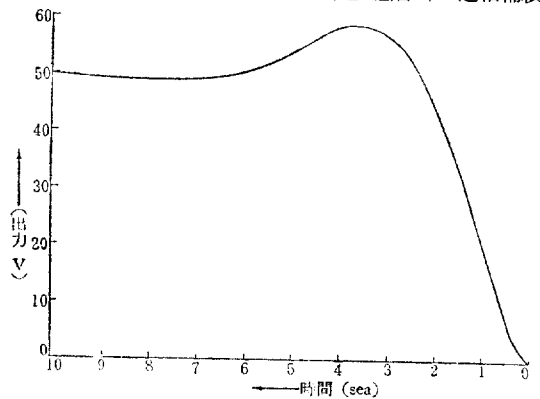
$$\frac{R_{f1}}{R_1} = 1 \quad \frac{R_{f2}}{R_2} = 1 \quad C_{f2}R_{f2} = 1 \quad \frac{1}{C_{f3}R_3} = 1$$

$$a_5 C_5 R_{f5} = 0.6$$

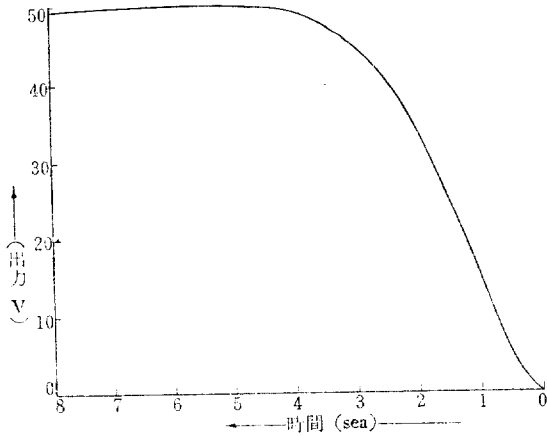
위의 條件을 滿足하도록 演算素子와 係數포텐시오메터의 값을 定하였으며 그림 17의 第4, 第6 增幅器는 符號變換의 目的으로 連結하였다.

c. 記 錄

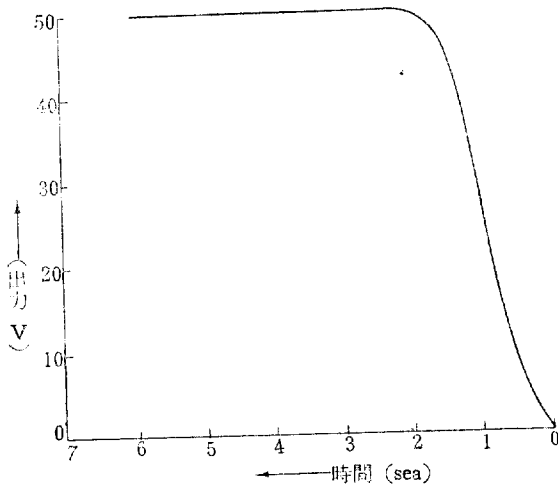
基本系統의 階段變位入力에 對한 應答과 進相補償回



a. 基本系統의 應答



b. 補償된 系統의 應答



c. Z變換法에 依한 理論解

그림 18 記錄值와 理論解

를 사용하여 뎀핑비 $\zeta=0.8$ 로 補償된 系統의 階段變位入力에 對한 應答를 延世 101 相似型電子計算機를 使用하여 記錄한 것이 그림 18의 (b)이다. 階段變位入力을 50 Volts로 하였고 記錄器의 記錄速度는 2cm/sec이며 振幅은 1V/cm이다.

6. 結果考察

써어보系統에 階段變位入力을 加하였을때 過渡特性의 尺度는 應答速度, 最大오버슈우트(M_{PT})등인데 이들을 比較하면 表 3과 같다.

最大오버슈우트와 整定時間은 基本系統에서 $M_{PT}=1.15$, $t_s=7.84$ sec 였고 進相補償器를 使用하여 뎀핑비 $\zeta=0.8$ 로 하였을때 $M_{PT}=1.008$, $t_s=5$ sec 였고 z變換法에 依한 多比率制御器를 補償器로 使用한 경우 $M_{PT}=1$ $t_s=2$

	基本系統	디지털 制御器를 使用한 系統	進相補償된 系統
時定數(T)	1.96sec	0.5sec	1.25sec
整定時間 t_s (sec)	7.84sec	2sec	5sec
最大오버슈우트(M_{PT})	1.15	1	1.008

表 3 過渡特性比較

sec로 改善되었음을 보여준다.

7. 結 論

2階 傳達函數를 가진 써어보系統에서 微分피드백을 使用하여 系統의 過渡應答를 改善할 수 있는데 補償回路로 多比率制御器를 使用한 샘플레이터 系統의 解를 얻기 위해서 z變換法으로 求한 理論解와 延世101相似型電子計算機를 使用하여 얻은 連續解와 比較하면 T 秒의 間隔으로 誤差信號를 받아서 $\frac{T}{n}$ 秒의 間隔으로 信號를 供給하는 多比率制御器때문에 出力의 整定時間이 減少되고 모든 過渡項이 한 週期內에서 끝날수 있도록 制御器를 決定할 수 있음을 보였다.

(1968年 4月 10日 接受)

參 考 文 獻

1. 韓萬春; 延世 101 Analog computer의 發展 延世論叢 第四輯 1966年.
2. E.I Jury; Theory and Application of the Z-transform Method, John Wiley & Sons, Inc., New York Chapter 1, 1964年
3. E. I Jury Sampled-data Control Systems, John Wiley & Sons, Inc., New York Chapter I. II. 1958年
4. John R. Ragazzini & Gene F. Franklin; Sampled-data Control Systems; McGraw-Hill Book Co., Inc. New York Chapter 9. 1958年
5. E. I Jury; Contribution to the Modified Z-transform; J.Franklin Inst., Vol. 270, Aug. pp. 118~129 1960年