Vol. 4, No. 1, 1967. 10.

## ◇解　說◇

# 三次元線幾何學의 Tensor 取扱 II*

張　健　洙

### 4. K-空間, K-點, K-quadric.

**定義** (4-1) (a) 6個의 順序진 實數의 짝 $(c^{14}, c^{24}, c^{34}, c^{23}, c^{31}, c^{12})$를 元素로 가지는 集合이 다음 性質을 滿足할 때 이 集合을 **5次元 Klein 射影空間** 또는 **K-空間**이라 하고, K-空間의 元素를 **Klein 點** 또는 **K-點**이라 한다.

(1) $c^{ij}=-c^{ji}$

(2) $c^{ij}$는 同時에 모두는 0이 아니다.

(3) $c^{ij}$는 同次座標이다.

(4) $c^{ij}$는 射影變換에 依해서 變換된다.

(b) $c^{ij}c_{ij}=0$ $\left(c_{ij}=\frac{1}{2}i_{ijkl}c^{kl}\right)$에 依해서 定義된 4次元 quadric space를 **K-quadric**이라 한다.

(c) $c^{ij}d_{ij}=0$ 을 滿足하는 두 K-點 $c^{ij}$, $d^{ij}$는 K-quadric에 관하여 **共軛**이라 한다.

**註** $P_3$空間과 K-quadric은 다음과 같은 雙屬關係에 있다.

| $P_3$ 空 間 | K-quadric |
|---|---|
| 直　　線 | 點 |
| 만 나 는 두 直 線 | 共 軛 인 두 點 |
| 線　　束 | K — 直 線 |

### 5. Linear Line Complex.

주어진 直線 $q_{\lambda\nu}$와 만나는 모든 直線 $p^{\nu\lambda}$는 다음 관계를 滿足한다.

$$q_{\lambda\nu}p^{\lambda\nu}=0 \text{ 또는 } p_{\lambda\nu}p^{\lambda\nu}=0. \tag{5.1}$$

이 概念을 一般化 하면.

**定義** (5-1) $c_{\lambda\mu}=c_{[\lambda\mu]}$를 任意의 tensor 이라 하자.

$$c_{\lambda\nu}p^{\lambda\nu}=0 \qquad p_{\lambda\nu}p^{\lambda\nu}=0 \tag{5.2}$$

를 滿足하는 모든 直線 $p^{\lambda\nu}$의 集合을 **linear line complex** $c_{\lambda\mu}$ (간단히 **complex** $c_{\lambda\mu}$)라 부르고, $p^{\lambda\nu}$를 complex $c_{\lambda\mu}$의 **母線**이라 한다. 만일

$$c_{\lambda\nu}c^{\lambda\nu}\neq 0 \tag{5.3}$$

이면 complex general,

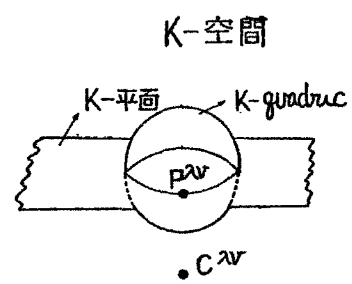
$$c_{\lambda\nu}c^{\lambda\mu}=0 \tag{5.4}$$

이면 complex special이라 말하고, 이 **境遇**에 直線 $c_{\lambda\mu}$를 complex의 **軸**이라 한다.

**註** (1) special complex $c_{\lambda\mu}$는 軸 $c_{\lambda\mu}$와 만나는 모든 直線으로 構成되어 있다.

(2) liner line complex에 屬하는 直線 $p^{\lambda\nu}$를 K-空間에서 幾何學的으로 表示해 보면 다음과 같다.

K-空間에서 $c^{\lambda\nu}$에 共軛인 點들은 K-平面상에 있으므로. $p^{\lambda\nu}$는 $c^{\lambda\nu}$와 共軛인 K-quadric 위의 點들이다. 따라서 $p^{\lambda\nu}$는 K-quadric과 K-平面의 交線위에 놓인 모든 點들이다.




* 本解說은 數學誌(Vol. 3. No. 1. 1966. 10)에 揭載했던 延世大 鄭慶泰敎授의 三次元線幾何學의 Tensor 取扱 I의 繼續이다.

**定義** (5-2) 點 $y^\mu$ 와 平面 $y_\lambda$ 가

(a) $\rho y_\lambda = c_{\lambda\mu} y^\mu$

또는 $(\rho\sigma \neq 0)$ (5.5)

(b) $\sigma y_\mu = c^{\lambda\mu} y_\lambda$

의 關係를 滿足할 때 $y^\mu$ $(y_\lambda)$를 complex $c_{\lambda\mu}$ 에 관한 極平面 $y_\lambda$ (極 $y^\mu$)의 極(極平面)이라 한다.

**定理** (5-3) (a) $c_{\lambda\mu}$ 가 general complex 면, 任意의 $y^\mu$ $(y_\lambda)$에 對應하여 極平面 $y_\lambda$ (極 $y^\mu$)가 存在한다.

(b) (5.5)b 는 (5.5)a 의 逆方程式이다.

(c) $c_{\lambda\mu}$ 가 special complex 이면, 軸 $c_{\lambda\mu}$ 위에 놓이는 極 $y^\mu$ (軸 $c_{\lambda\mu}$ 가 놓이는 極平面 $y^\lambda$)는 極平面 (極)을 갖지 않는다.

**證明** (a) 주어진 極 $y^\mu$ (極平面 $y_\lambda$)에 對하여 極平面 $y_\lambda$ (極 $y^\mu$)가 存在하지 않을 必要充分條件은 $y_\lambda = 0$ $(y^\mu = 0)$이다.

이것을 (5.5)a, (5.5)b에 代入하면 Det$(\!(c_{\lambda\mu})\!) = 0$, 따라서 (5.4)가 成立한다.

(b) $c^{\lambda\nu} c_{\lambda\mu} = \varepsilon \sqrt{c}\, \delta_\mu^\nu$ (5.6)

(但, $c = \mathrm{Det}(\!(c_{\lambda\mu})\!)$, $\varepsilon = \mathrm{sgn} I^{\omega\mu\lambda\nu} c_{\omega\mu} c^{\lambda\nu}$)

(5.5)a 에 $c^{\lambda\nu}$ 를 곱하면, (5.6)에 依해서 다음을 얻을 수 있다.

$\rho y_\lambda c^{\lambda\nu} = \varepsilon \sqrt{c}\, y^\nu$

따라서 $y_\lambda c^{\lambda\nu} = \sigma y^\nu$ $(\rho\sigma = \varepsilon\sqrt{c})$

(c) $y^\mu$ 가 直線 $c_{\lambda\mu}$ 위에 놓이면 (直線 $c_{\lambda\mu}$ 가 平面 $y_\lambda$ 위에 놓이면)

$y^\mu c_{\lambda\mu} = 0$ $(y_\lambda c^{\lambda\mu} = 0)$.

따라서

$y_\lambda = 0$ $(y^\mu = 0)$.

**定理** (5-4) (a) 極 $y^\mu$ 는 極平面 $y^\lambda$ 위에 놓인다.

(b) $y^\mu$ 를 지나는 ($y_\lambda$ 위에 놓인) $c_{\lambda\mu}$ 의 母線은, 平面이 $y_\lambda$ (頂點이 $y^\mu$) 되는 線束 $c$ 를 이룬다.

**證明** (a) (5.5)a 에 의해서

$\rho y_\lambda y^\lambda = c_{\lambda\mu} y^\mu y^\lambda = -c_{\lambda\mu} y^\mu y^\lambda = 0$

따라서 $y^\mu$ 는 $y_\lambda$ 위에 놓인다.

(b) $y^\mu$ 를 지나는 任意의 complex $c_{\lambda\nu}$ 의 母線을 $p^{\lambda\mu} = x^{[\lambda} y^{\mu]}$ 라 하자.

그러면

$0 = c_{\lambda\mu} p^{\lambda\mu} = c_{\lambda\mu} x^{[\lambda} y^{\mu]} = c_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu = \rho y_\lambda x^\lambda$.

곧 $x^\lambda$ 는 $y_\lambda$ 위에 놓인다. 따라서, $y^\mu$ 를 지나는 모든 母線은 $y_\lambda$ 위에있다.

同一한 方法으로 $y_\lambda$ 위에 놓인 $c_{\lambda\mu}$ 의 母線은 頂點이 $y^\mu$ 되는 線束 $c$ 를 이룸을 證明할 수 있다.

**定理** (5-5) 任意의 直線 $s^{\lambda\nu}$ 는 다음 性質을 滿足하는 直線 $r^{\lambda\nu}$ 를 一意的으로 決定한다: $s^{\lambda\nu}$ 와 만나는 complex $c_{\lambda\mu}$ 의 모든 母線은 $r^{\lambda\nu}$ 와도 만난다.

(a) $r^{\lambda\nu}$ 는 다음 식으로 주어진다.

$r^{\lambda\nu} = c^{\lambda\nu}(2c^{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}) - s^{\lambda\nu}(c^{\alpha\beta} c_{\alpha\beta})$. (5.7)

(b) complex $c_{\lambda\mu}$ 가 general 이면, 直線 $y^{\lambda\nu}$ 와 $s^{\lambda\nu}$ 는 그들 중의 하나가 $c_{\lambda\mu}$ 의 母線일 때 一致한다. 이 逆도 成立한다.

이 條件이 成立되지 않으면 $r^{\lambda\nu}$ 와 $s^{\lambda\nu}$ 는 만나지 않는다.

(c) complex 가 special 이면, $r^{\lambda\nu}$ 는 軸과 一致한다.

**證明** (a) $r_{\lambda\mu}$ 를

$r_{\lambda\mu} = \alpha c_{\lambda\mu} + \beta s_{\lambda\mu}$ ($\alpha, \beta$ : 媒介變數) (5.8)

로 定義하면, $r^{\lambda\nu}$ 는 交代的이므로 complex 를 나타낸다.

$c^{\lambda\mu}$ 의 母線 $p^{\lambda\mu}$ 가 $s^{\lambda\mu}$ 와 만날 *必要充分條件*은 $p^{\lambda\mu}$ 가 $r^{\lambda\mu}$ 의 母線이 되는 것이다*.

이제 $r^{\lambda\mu} r_{\lambda\mu} = 0$ 되는 $\alpha$, $\beta$ 를 구하자.

$$\begin{aligned} r^{\lambda\mu} r^{\lambda\mu} &= (\alpha c^{\lambda\mu} + \beta s^{\lambda\mu})(\alpha c_{\lambda\mu} + \beta s_{\lambda\mu}) \\ &= \alpha^2 c^{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} + 2\alpha\beta s^{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} \\ &= \alpha(\alpha c^{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} + 2\beta s^{\lambda\mu} c_{\lambda\mu}) = 0. \end{aligned}$$

$\alpha = 0$ 면 $r_{\lambda\mu} = \beta s_{\lambda\mu}$ 가 되므로 $\alpha \neq 0$. 따라서

---

* ∵ $(\Longrightarrow)$ $p_{\lambda\mu} s^{\lambda\mu} = 0$ 면, $p_{\lambda\mu} r^{\lambda\mu} = 0$.
따라서 $p_{\lambda\mu}$ 는 $\gamma^{\lambda\mu}$ 의 母線이다.
$(\Longleftarrow)$ $p_{\lambda\mu} r^{\lambda\mu} = 0$ 면, $p_{\lambda\mu} s^{\lambda\mu} = 0$.
따라서 $p_{\lambda\mu}$ 는 $s^{\lambda\mu}$ 와 만난다.

$$\alpha : \beta = 2c^{\alpha\beta}s_{\alpha\beta} : -c^{\alpha\beta}c_{\alpha\beta}$$

가 되므로 (57)을 얻을 수 있다.

(b) (5.7)에서

$$r^{\lambda\nu}s_{\lambda\nu}=2(c^{\alpha\beta}s_{\alpha\beta})^2 \qquad (5.9)$$

$s^{\lambda\mu}$가 $c_{\lambda\mu}$의 母線이 아니면 $s^{\lambda\mu}c_{\lambda\mu}\neq0$되어야 하므로

$$s_{\lambda\mu}r^{\lambda\mu}\neq0$$

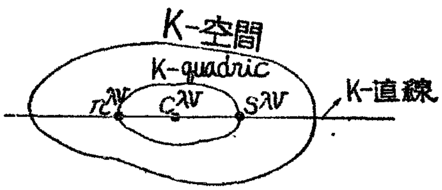
따라서 $s_{\lambda\mu}$와 $r^{\lambda\mu}$는 만나지 않는다.

(c) $c^{\lambda\mu}$가 special이면 (5.7)에서 $r^{\lambda\mu}=c^{\lambda\mu}$.

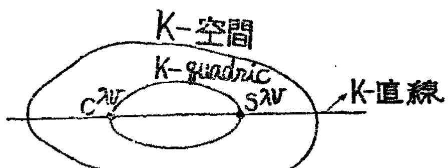
**定義** (5-6). 定理 (5-5)의 두 直線 $s^{\lambda\mu}$와 $r^{\lambda\mu}$를 complex $c_{\lambda\mu}$에 관한 **共軛極線**(간단히 **極線**)이라 한다.

**註** K-空間에서 共軛極線을 幾何學的으로 나타내면 다음의 그림과 같다.

(1) $c_{\lambda\mu}$가 general인 경우.




(2) $c_{\lambda\mu}$가 special인 경우.




## 6. Complex 束

相異한 두 real general complex $\underset{a}{c}_{\lambda\mu}$ $(a=1,2)$를 가지고 다음 scalar 量을 定義하자.

$$a_{bc}=a_{cb}\overset{\text{def}}{=}\underset{a}{c}_{\lambda\mu}\underset{b}{c}^{\lambda\mu} \ (b,c=1,2) \qquad (6.5)\text{a}$$

$$a^2\overset{\text{def}}{=}(a_{12})^2-a_{11}a_{22} \qquad (6.1)\text{b}$$

$$a\overset{\text{def}}{=}\sqrt{a^2} \qquad (6.1)\text{c}$$

**定義** (6-1) $a\neq0$일 때 complex의 集合

$$\left\{c_{\lambda\mu}\ \middle|\ c_{\lambda\mu}\overset{\text{def}}{=}\sum_{a=1}^{2}c^a\underset{a}{c}_{\lambda\mu}\right\} \qquad (6.2)$$

를 變數 $c^1$, $c^2$를 갖는 **complex 束**이라 한다.

**定理** (6-2) 束 (6.2)의 real complex $\underset{1}{c}_{\lambda\mu}$와 $\underset{2}{c}_{\lambda\mu}$를 撰擇하는 方法如何에 不拘하고

$$\alpha\overset{\text{def}}{=}\operatorname{sgn} a^2 \qquad (6.3)$$

는 一定하다.

**證明** 束 (6.2)에 屬하는 相異한 두 real complex $\underset{a}{'c}_{\lambda\mu}$를

$$\underset{a}{'c}_{\lambda\mu}=\sum_{b=1}^{2}u_a{}^b\underset{b}{c}_{\lambda\mu} \quad (a=1,2) \qquad (6.4)\text{a}$$

$$u\overset{\text{def}}{=}\operatorname{Det}(\!(u_a{}^b)\!) \qquad (6.4)\text{b}$$

로 定義하면

$$\operatorname{Det}(\!(u_a{}^b)\!)\neq0^*$$

이다.

한편

$$'a_{bc}\overset{\text{def}}{=}\underset{b}{'c}_{\lambda\mu}\underset{c}{'c}^{\lambda\mu}=\sum_{i,j=1}^{2}u_b{}^i\underset{i}{c}_{\lambda\mu}u_c{}^j\underset{j}{c}^{\lambda\mu}$$

$$=\sum_{i,j=1}^{2}u_b{}^iu_c{}^ja_{ij} \qquad (6.5)\text{a}$$

되므로

$$'a^2\overset{\text{def}}{=}('a_{12})^2-'a_{11}{}'a_{22}=(\sum u_1{}^iu_2{}^ja_{ij})^2-(\sum u_1{}^iu_1{}^ja_{ij})(\sum u_2{}^iu_2{}^ja_{ij})=u^2a^2 \quad (6.5)\text{b}$$

따라서 $\underset{a}{'c}_{\lambda\mu}$, $\underset{b}{'c}^{\lambda\mu}$가 real이고 $u_a{}^b$가 實數이므로 $u^2>0$되어 定理 (6.2)가 成立함을 알 수 있다.

**定理** (6-3) 다음 性質을 갖는 한 쌍의 直線 $\underset{1}{f}^{\lambda\nu}$, $\underset{2}{f}^{\lambda\nu}$가 一意的으로 存在한다.

(a) 束 (6.2)에 屬하는 special complex는, 이 두 直線을 各各 軸으로 가지는 두個의 complex 뿐이다.

(d) 이 두 直線은

$$\underset{1}{f}^{\lambda\nu}=\underset{1}{c}^{\lambda\nu}(a-a_{12})+\underset{2}{c}^{\lambda\nu}a_{11} \qquad (6.6)\text{a}$$

$$\underset{2}{f}^{\lambda\nu}=\underset{1}{c}^{\lambda\nu}(-a-a_{12})+\underset{2}{c}^{\lambda\mu}a_{11} \qquad (6.6)\text{b}$$

로 表示된다.

(c) 이 두 直線은 $\alpha>0$이면 real이고, $\alpha<0$이면 複素共軛이다.

(*) $\because$ $\operatorname{Det}(\!(u_a{}^b)\!)=0$이면 $\underset{1}{'c}^{\lambda\mu}=\underset{2}{'c}^{\lambda\mu}$

(d) 이 두 直線은 서로 만나지 않는다.

(e) 이 두 直線은 束 (6.2)의 모든 general complex 에 관한 共軛極線이다.

(f) 이 두 直線은 complex $\underset{a}{c}_{\lambda\mu}$ 를 撰擇하는 方法如何에 不拘하고 一意的으로 決定된다.

**證明** (a), (b) : 束 (6.2)에 屬하는 special complex 는

$$0=c_{\lambda\mu}c^{\lambda\mu}=(\overset{1}{c}\underset{1}{c}_{\lambda\mu}+\overset{2}{c}\underset{2}{c}_{\lambda\mu})(\overset{1}{c}\underset{1}{c}^{\lambda\mu}+\overset{2}{c}\underset{2}{c}^{\lambda\mu})$$

$$=(\overset{1}{c})^2a_{11}+2\overset{1}{c}\overset{2}{c}a_{12}+(\overset{2}{c})^2a_{22} \qquad (6.7)\text{a}$$

를 滿足해야 하므로

$$\overset{1}{c}:\overset{2}{c}=(\pm a-a_{12}):a_{11} \qquad (6.7)\text{b}$$

에 依하여 決定된다. 따라서 이것을 (6.2)에 代入하여 (6.6)을 얻을 수 있다.

(c) (6.6)에 依하여 明白하다.

(d) $\underset{1}{f}_{\lambda\mu}\underset{2}{f}^{\lambda\mu}=-2a_{11}a^2\overset{*}{\neq}0$ (6.8)

되므로 $\underset{a}{f}^{\lambda\mu}$ 는 만나지 않는다.

(e) (6.2)에서 $\underset{1}{c}_{\lambda\mu}$, $\underset{2}{c}_{\lambda\mu}$ 의 共通母線 $p^{\lambda\mu}$ 는 $c^{\lambda\mu}$ 의 母線이 된다.** 따라서 $p_{\lambda\mu}\underset{1}{f}^{\lambda\mu}=p_{\lambda\mu}\underset{2}{f}^{\lambda\mu}=0$ 이 되므로 $c^{\lambda\mu}$ 의 母線 $p_{\lambda\mu}$ 가 $\underset{1}{f}_{\lambda\mu}$ 와 만나면 $\underset{2}{f}_{\lambda\mu}$와도 만난다. 곧 $\underset{1}{f}_{\lambda\mu}$, $\underset{2}{f}_{\lambda\mu}$ 는 共軛極線이다.

(f) $c_{\lambda\mu}=\sum_{a=1}^{2}{}'c^{a\prime}\underset{a}{c}_{\lambda\mu}$

로 놓으면 (6.2)와 (6.4)a***에 依하여

$$\sum_{a=1}^{2}{}'c^a u_a{}^b=c^b \quad (b=1,2)$$

를 얻을 수 있다. 한편 (6.5)a 에서

$$\sum_{b,c=1}^{2}a_{bc}c^bc^c=\sum_{b,c=1}^{2}{}'a_{bc}{}'c^{b\prime}c^c \qquad (6.9)$$

되므로

(6.9)와 (6.7)a 와

$$f^{\lambda\nu}=\sum_{a=1}^{2}{}'c^{a\prime}\underset{a}{c}^{\lambda\nu}=\sum_{a=1}^{2}c^a\underset{a}{c}^{\lambda\nu}$$

에 依하여 (f)가 成立함을 알 수 있다.

## 7. Linear line congruence.

**定義** (7-1) 束 (6-2)에 屬하는 모든 complex 의 共通母線을 元素로 가지는 集合을 **linear line congruence**(간단히 congruence) 라 한다.

直線 (6.6)을 congruence 의 **軸**이라 한다.

**定理** (7-2) 위에서 定義된 congruence 는 다음과 같이 解析的으로 表示된다.

$$\underset{a}{c}_{\lambda\mu}p^{\lambda\mu}=0,\quad p_{\lambda\mu}p^{\lambda\mu}=0 \quad (a=1,2) \qquad (7.1)\text{a}$$

또는

$$\underset{a}{f}_{\lambda\mu}p^{\lambda\mu}=0,\quad p_{\lambda\mu}p^{\lambda\mu}=0 \quad (a=1,2) \qquad (7.1)\text{b}$$

**證明** 이 定理의 證明은 明白하다.

**定理** (7-3) congruence (7.1)a 는 軸 $\underset{a}{f}^{\lambda\nu}$ 와 만나는 모든 直線으로 되어 있다.

**證明** (7-1) a 와 (7.1)b 는 同等한 方程式이므로 證明은 自明하다.

**定理** (7-4) $y^\mu(y_\lambda)$를 軸 $\underset{a}{f}^{\lambda\nu}(a=1,2)$ 위에 놓이지 않는 (軸 $\underset{a}{f}^{\lambda\nu}$ 가 놓이지 않는) 點(平面)이라 하자. 그러면 $y^\mu$ 를 지나는 congruence 의 母線 $p_{\lambda\mu}$ 와 $y_\lambda$ 위에 놓인 congruence 의 母線 $q^{\lambda\nu}$ 가 各各 하나씩 存在하며, 이것들은 다음과 같이 表示된다.

$$p_{\lambda\mu}=y^\alpha y^\beta \underset{1}{f}_{\alpha[\lambda}\underset{2}{f}_{\mu]\beta} \qquad (7.2)\text{a}$$

$$q^{\lambda\mu}=y_\alpha y_\beta \underset{1}{f}^{\alpha[\lambda}\underset{2}{f}^{\mu]\beta} \qquad (7.2)\text{b}$$

**證明** $y^\mu$ 가 $\underset{a}{f}^{\lambda\nu}(a=1,2)$위에 있지 않으면 $\underset{a}{f}^{\lambda\nu}$ 와 만나면서 $y^\mu$ 를 지나는 直線은 오직 하나 밖에 없다. 이것을 $p_{\lambda\mu}$ 로 表示하면, $p_{\lambda\mu}$ 는 두 平面

$$\underset{1}{f}_\lambda\overset{\text{def}}{=}\underset{1}{f}_{\lambda\mu}y^\mu,\quad \underset{2}{f}_\lambda\overset{\text{def}}{=}\underset{2}{f}_{\lambda\mu}y^\mu$$

의 交線이므로

$$p_{\lambda\mu}=\underset{1}{f}_{[\lambda}\underset{2}{f}_{\mu]}=\underset{1}{f}_{[\lambda|\alpha|}y^\alpha\underset{2}{f}_{\mu]\beta}y^\beta$$

$$=y^\alpha y^\beta\underset{1}{f}_{\alpha[\lambda}\underset{2}{f}_{\mu]\beta}$$

* $\underset{a}{c}^{\lambda\mu}$ 가 general complex 이므로 $a_{11}\neq0$, $a^2\neq0$.

** ∵ $p^{\lambda\mu}\underset{1}{c}_{\lambda\mu}=p^{\lambda\mu}\underset{2}{c}_{\lambda\mu}=0$. 따라서 $p^{\lambda\mu}c_{\lambda\mu}=0$.

*** complex ${}'c_{\lambda\mu}$ 는 꼭 real 일 必要는 없다.