論 文 67—4—2—4

導電性支柱에 平行한 半波長 Dipole Antenna의 電流分布

(The Distribution of Radiation Current on a Halfwave Dipole Antenna and its Conductive Supporter)

朴 樫 基
(Park, Choung Kee)

要 約

導電性支柱가 '안테나'의 放射에 주는 영향을 고찰하기 위하여 Dipole '안테나'를 導電性支柱에 매우 가까히 놓고 勵振하였을 경우의 電流의 分布를 解析 및 實測하였으며 兩者가 잘 一致함을 確認하였다.

ABSTRACT

On clarifing radiations from antenna, it is necessary to consider the contribution of the current distribution on the conductive supporter.

The expression has not only analized the total radiative current distribution on the dipole antenna and its conductive supporter, in case when the former was placed closely and in parallel to the latter, but also shown the results of practical experiment.

1. 序 論

안테나를 架設할때에는 碍子를 通해서 支線으로 매든가 鐵柱위에 固定하든가 해야 한다. 波長이 길때에는 支線 한토막의 길이가 波長에 비해서 매우 짧든가 直線形鐵塔自體가 안테나로 使用되어 버리는 관계로 別로 문제가 되지 않으나 VHF나 UHF 이상이 되면 가령 鐵柱의 높이가 放射될 電波의 數波長길이에 능히 이를수 있다. 이러한 경우 垂直鐵柱에 平行해서 垂直偏波用 '안테나'를 고정한다면 支持物인 鐵柱위에도 電流가 分布하게되어 放送電磁波는 '안테나'上의 電流分布만에 의해서 決定되는 것이 아니라 이 鐵柱上의 電流分布의 영향도 받을 것 이다. 이 鐵柱上의 電流分布가 만약에 '안테나' 自體上의 電流分布보다 크다면 放射電磁界는 '안테나' 보다도 鐵柱에 의해서 主로 결정된다고 할수 있을 것이다.

이와같이 '안테나'로 부터의 電波의 放射를 제대로 알려면 그 '안테나'系의 一部分인 支持物위에 어떤位相과 크기의 電流가 分布하게 되는가를 알아야 한다.

漢陽大學校 工科大學 教授, 工學博士

실제의 支持物의 形態에는 直線形 鐵柱를 비롯하여 自動車 '안테나'에 대해서는 自動車의 車體 飛行機用 '안테나'에 대한 飛行機의 機體등 매우 複雜多端하나 우선 半波長 '다이폴·안테나'를 導電性의 圓筒形支持物에 平行하게 놓은 가장 간단한 경우의 電流分布를 解析 및 實測하였다.

解析에 있어서는 便宜上 圓筒形支持物로서 그 徑이 半波長 '다이폴'의 그것과 같고 그 길이가 $3/2\lambda$인 것을 취하였으며 解析의 結果는 實驗과 잘 一致하였다.

2. 理論的解析

그림1과 같은 '안테나'系의 大地에 대한 imag를 생각하고 各部分의 電壓電流를 unbalance 分

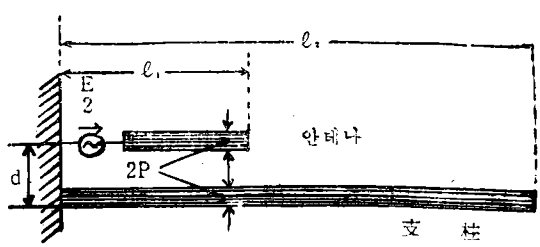


그림1 안테나와 支柱

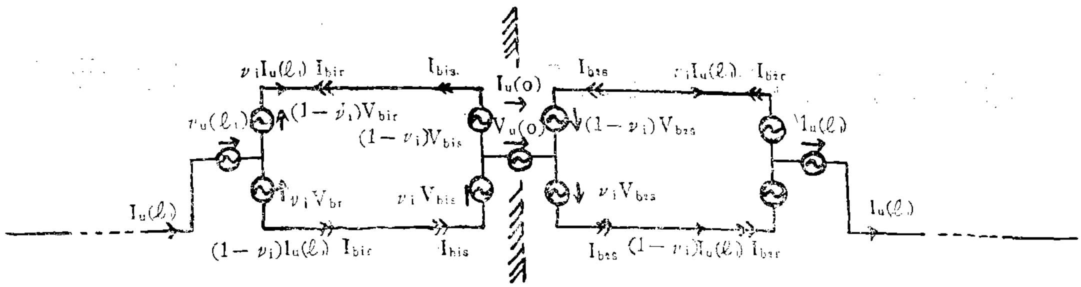


그림2 不連續點에서의 電壓, 電流의 分解

(즉 radiative分 또는 零相分)과 balance分 (또는 正相分)으로 分解하여서[1] 나타내면 그림2와 같이 된다.[2]

그림2에서 ν_i는 unbalance分의 電流中 안테나쪽을 흐르는 電流에 대한 電流配分率 $I_u(o)$는 中央部分을 흐르는 總 unbalance 電流, $I_u(\ell_1)$은 中央에서 왼쪽 또는 오른쪽으로 ℓ_1 만큼 떨어진 點을 흐르는 總 unbalance 電流, I_b는 balance分電流, $V_u(o)$는 中央에 나타나는 unbalance 分電壓, $V_u(\ell_1)$은 兩가에 나타나는 unbalance分電壓들임. 또한 그림에서 二重矢印의 各 I_{bs} I_{br}은 각각 送端의 balance分電流 및 受端의 balance分電流임.

그림1과 2를 비교하고 境界條件을 참작함으로서 中央部에서

$$\left.\begin{aligned}-(1-\nu_i)V_{b1s}+V_u(0)-(1-\nu_i)V_{b2s}=E\\ \nu_i V_{b1s}+V_u(0)+\nu_i V_{b2s}=0\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

但 給電電壓 $\frac{E}{2}$에 대한 image 電壓 $\frac{E}{2}$를 合하여서 E가 되는 것 임.

또 兩不連續點에서

$$V_u(\ell_1)=\nu_i V_{b1r}\qquad(2)$$

의 관계를 얻는다. 한편 電流連續의 條件에 의하여

$$\begin{aligned}I_u(\ell_1)&=(1-\nu_i)I_u(\ell_1)+I_{b1r}\\&=(1-\nu_i)I_u(\ell_1)+I_{b2r}\end{aligned}\qquad(3)$$

(1)의 두식에서

$$-V_{b1s}-V_{b2s}=E$$

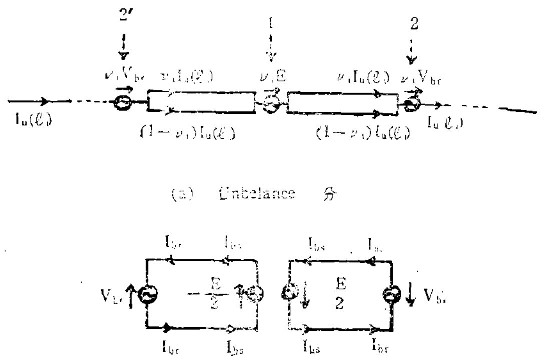
$$V_u(0)=-\nu_i(V_{b1s}+V_{b2s})=\nu_i E$$

따라서 左右가 對稱이라고 하면

$$\left.\begin{aligned}V_{b1s}&=V_{b2s}=-E/2\\V_{b1r}&=V_{b2r}=V_{br}\\V_u(\ell_1)&=\nu_i V_{br}\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

여기서 고찰의 편의상 위에서 얻은 unbalance 分과 balance分을 각각 딴그림에 나타내면 그림3과 같다.

그림3 (a)에서 點1,2間의 相互 admittance를 y_{12}, 中央에 대해서 對稱인 두點(가령 點2,2')에 給電하였을때의 給電 admittance를 y_{20}라하면 電流는 다음 식처럼 표시[3]된다.



(a) Unbalance 分

(b) Balance 分

그림3 Unbalance 分 電壓, 電流와 balance分의 電壓, 電流

$$\begin{aligned}I_u(\ell_1)&=y_{12}V_u(o)+y_{20}V_u(\ell_1)=y_{12}\nu_i E\\&+y_{20}\nu_i V_{br}=\nu(y_{12}E+y_{20}V_{br})\end{aligned}\qquad(5)$$

또 (3)式으로 부터

$$I_{b1r}=I_{b2r}(=I_{br})=\nu_i I_u(\ell_1)\qquad(6)$$

임으로 (5), (6) 식에서

$$I_{br}=\nu_i^2(y_{12}E+y_{20}V_{br})\qquad(7)$$

한편 그림3의 (b)에서 傳送線路의 公式을 사용하여

$$\begin{aligned}-\frac{E}{2}&=V_{br}cos\beta\ell_1+jw_bI_{br}sin\beta\ell_1\\&=V_{br}cos\beta\ell_1+j\nu_i^2w_b(y_{12}E+y_{20}V_{br})sin\beta\ell_1\end{aligned}$$

但 W_b는 안테나와 支柱로 구성되는 平行線路의 特性임피던스 이며

$$W_b=120en\frac{d}{r}$$

r은 導線의 半지름, d는 두線의 間隙임.

여기서 點1에 존재하는 $\nu_i E$와 點2 및 2'에 존재하는 한雙의 $\nu_i V_{br}$에 의하여 흐르는 unbalance 分電流를 그림4와 같이 $I^a(x)$ 및 $I^b(x)$로 표시한다면 이들은 文獻 (2) 또는 (3)에 의하여

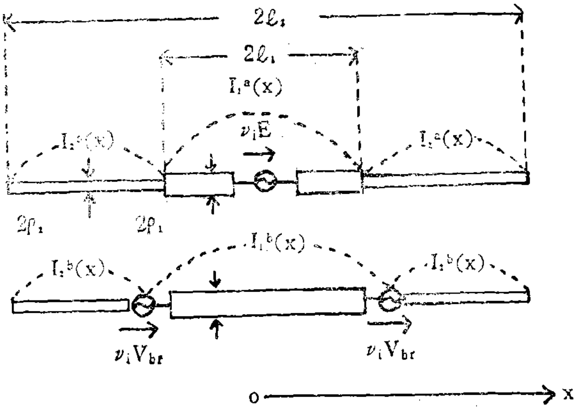


그림4 Unbalance電流의 細分

ρ_1: 二本線路分의 等價임피던스(ρ_e) $=\sqrt{\rho_2 d}$

$$\left.\begin{aligned}
&I_1{}^a(x)=K\nu E\{-\sin\beta(\ell_2-\ell_1)\cos\beta(\ell_1-x)\\
&\quad-\cos\beta(\ell_2-\ell_1)\sin(\ell_1-|x|\}\\
&I_2{}^a(x)=K\nu E\{-\sin\beta(\ell_2-|x|)\}\\
&I_1{}^b(x)=K2\nu V_{br}\{-\cos\beta x\cdot\sin\beta(\ell_2-\ell_1)\}\\
&I_2{}^b(x)=K2\nu V_{br}\{-\cos\beta\ell_1\sin\beta\ (\ell_2-|x|)\}\\
&K=j\frac{1}{60}\frac{1}{\Omega_1\sin\beta\ell_1\sin\beta(\ell_2-\ell_1)-\Omega_2\cos\beta\ell_1\cos\beta(\ell_2-\ell_1)-\alpha_1}\\
&\text{但 }\beta=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

그림4에서 平行線路를 구성하는 導線이 대우 가늘며 두 導線의 中心間 간격 d가 過히 크지않아서 $\rho_1=\sqrt{\rho_2 d}$와 ρ_2의 크기의 差가 過히 크지 않다면 $\frac{1}{\rho}$의 對數에 비례하는

$$\Omega_1=2I_n\frac{2\ell_2}{\rho_1},\quad \Omega_2=2I_n\frac{2\ell_2}{\rho_2}$$

는

$$\Omega_1\fallingdotseq\Omega_2=2I_n\frac{2\ell_2}{\rho_2}(=\Omega)$$

로 간주할수 있다. 이와같은 안테나 系中에서 $\ell_1=\frac{1}{4}\lambda$, $\ell_2=\frac{3}{4}\lambda$의 경우를 생각 한다면

$$\left.\begin{aligned}
&V_1=\frac{E}{2},\ V_2=\frac{V_{br}}{2},\ \ell_2-\ell_1=\frac{\lambda}{2}\\
&\sin\beta\ell_1=1,\ \cos\beta\ell_1=0\\
&\sin\beta(\ell_2-\ell_1)=0,\ \cos\beta(\ell_2-\ell_1)=-1
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

따라서 $I^b(x)=o$ 이 되어버림으로 $I^b(x)$ 쪽만의 近似度를 한층 올리면[(4)]

$$\left.\begin{aligned}
&I_1{}^b(x)=K2\nu_i V_{br}\{-\sin\beta(\ell_2-\ell_1)\cos\beta x\\
&\quad+(\frac{h_{22}}{\Omega}\sin\beta\ell_1-\frac{k_{22}}{\Omega}\cos\beta\ell_1)\cos\beta x\}\\
&I_2{}^b(x)=K2\nu_i V_{br}\{-\cos\beta\ell_1\sin\beta(\ell_2-\ell_1)\\
&\quad-\frac{f_{22}}{\Omega}\sin\beta(\ell_1-|x|)-\frac{\cos\beta\ell_1}{\Omega}(k_{22}\cos\beta x\\
&\quad-h_{22}\sin\beta|x|)\}
\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

그런데 (9), (10) 및 (8)式의 관계에서

$$K=\frac{-j}{60\alpha_1}$$

$$V_{br}=-\frac{1+j2\nu_i{}^2W_b y_{12}}{j\nu_i{}^2W_b y_{20}}\cdot\frac{E}{2}$$

$$=-\frac{4+j2W_b y_{12}}{jW_b y_{20}}\cdot\frac{E}{2}\qquad(12)$$

임으로 결국

$$I_1{}^a(x)=\frac{-j}{60\alpha_1}\cdot\frac{E}{2}\{-\sin\beta(\ell_2-\ell_1)\cos\beta(\ell_1-x)-\cos\beta(\ell_2-\ell_1)\sin\beta(\ell_1-|x|)\}$$

$$=\frac{-j}{120\alpha_1}\sin\beta(\ell_1-|x|)E\qquad(13)$$

$$I_2{}^a(x)=\frac{-j}{60\alpha_1}\cdot\frac{E}{2}\{-\sin\beta(\ell_2-|x|)\}$$

$$=\frac{j}{120\alpha_1}\sin\beta(\ell_2-|x|)E\qquad(14)$$

$$I_1{}^b(x)=\frac{-j}{60\alpha_1}2\cdot\frac{V_{br}}{2}\{-\sin\beta(\ell_2-\ell_1)\cos\beta x+(\frac{h_{22}}{\Omega}\sin\beta\ell_1-\frac{k_{22}}{\Omega}\cos\beta\ell_1)\cos\beta x\}$$

$$=\frac{4+j2W_b y_{12}}{120\alpha_1\Omega W_b y_{20}}h_{22}\cos\beta x\cdot E\qquad(15)$$

$$I_2{}^b(x)=\frac{-j}{60\alpha_1}2\frac{V_{br}}{2}\{-\cos\beta\ell_1\sin\beta(\ell_2-\ell_1)-\frac{f_{22}}{\Omega}\sin\beta(\ell_1-|x|)-\frac{\cos\beta\ell_1}{\Omega}(k_{22}\cos\beta x-k_{22}\sin\beta|x|)\}$$

$$=-\frac{4+j2W_b y_{12}}{120\alpha_1\Omega W_b y_{20}}f_{22}\sin\beta(\ell_1-|x|)\cdot E\qquad(16)$$

(13)式과 (15)式에서

$$I_1(x)=I_1{}^a(x)+I_1{}^b(x)$$

$$=\frac{1}{120\alpha_1}\{-j\sin\beta(\ell_1-|x|)+\frac{4+j2W_b y_{12}}{\Omega W_b y_{20}}h_{22}\cos\beta x\}E\qquad(17)$$

(14)式과 (16)式에서

$$I_2(x)=I_2{}^a(x)+I_2{}^b(x)$$

$$=\frac{1}{120\alpha_1}\{\sin\beta(\ell_2-|x|)$$

$$-\frac{4+j_2W_b y_{12}}{\Omega W_b y_{20}}\cdot f_{22}\sin\beta(\ell_1-|x|)\}E \quad (18)$$

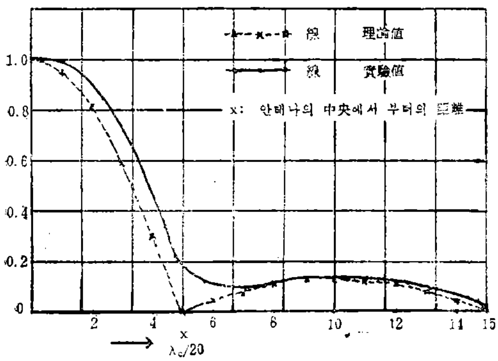
y_{20}, y_{12}, α_1, h_{22}, f_{22}, k_{22}의 값에 관해서는 附錄을 參照할것

3. 理論計算例 및 實驗結果

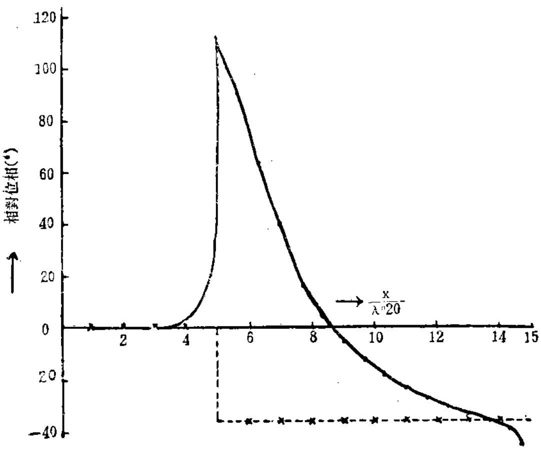
$f_0=500Mc$, $\ell_1=15cm(=\frac{1}{4}\lambda)$, $\ell_2=45cm$ $(=\frac{3}{4}\lambda)$, $\rho=4mm$, $d=3cm(=\frac{1}{20}\lambda)$의 경우에 대하여 계산한 결과는 다음과 같다.

$W_b=241.79\ ohm$

$$\Omega \fallingdotseq 2\ell_n\frac{2\ell_2}{\rho_2}=2\times 2.3026\times \ell og\frac{90}{0.4}=10.83$$



(a) 相對振幅



(b)相對位相

그림5 Radiation에 寄與하는 電流分布의 理論 및 實驗

$$-\frac{4+j2w_b y_{12}}{\Omega w_b y_{20}}\cdot f_{22}\sin\beta\{(\ell_1-|x|\}E$$

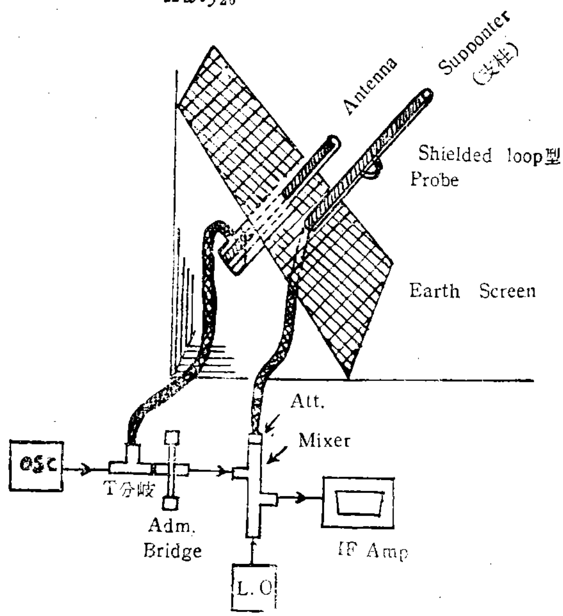


그림 6 實驗裝置

$\alpha_1=0.7590-j1.7583$

$\alpha_2=4.9072-j5.4195$

$\gamma_1=\gamma_2=0,$

$h_{22}=0.72201-j1.42106$

$f_{22}=0.03701-j0.33719$

$\delta'=-1.49248-j2.14691$

$\beta_1'=-0.72201+j1.42106$

$\beta_2'=2.29307+j18.71989$

$y_{20}=0.00029\underline{/26°59'}=(0.258+j0.132)m\mho$

$y_{12}=0.00383\underline{/-109°1'}=-(1.248+j3.621)m$

$$\frac{I_1(x)}{E}=(0.00399-j0.00172)\sin\beta(\ell_1-|x|)+(0.04603-j0.0259)\cos\beta x \quad (19)$$

$$\frac{I_2(x)}{E}=(-0.00399+j0.00172)\sin\beta(\ell_2-|x|)-(0.00721-j0.00862)\sin\beta(\ell_1-|x|) \quad (20)$$

다음에 x의 값을 $\frac{1}{20}\lambda$씩 증가하였을 때의 $I_1(x)$, $I_2(x)$의 값을 (19)식과 (20)식에 의하여 계산하여 그래프를 그린바 그림5의 點線과 같이 되었으며 이것은 同圖實線으로 표시되어 있는 測定實驗結果와 잘 一致하였다. 단 그림5에 있어 中央에서 $\frac{1}{4}\lambda$ 거리 (즉 $x=15cm$) 點의 位相 변동이 크게 나타난것은 이 부분에서 傳達 mode가 변화하고 있는한편 사실상 안테나上의 電流

値와 支柱上의 電流値의 差로서 全放射電流分布를 얻고 있기 때문이라고 생각함.

電流分布의 實測은 그림6과 같이 假想的支柱를 固定하여 안테나의 給電을하고 admittance bridge를 사용하여서[5] 하였다. 그림6의 shielded loop型 probe로 안테나 上의 電流値 (이하에서는 A로 나타냄)와 支柱上의 電流値 (이하에서는 B로 나타냄)를 測定하였고 中央에서 $\frac{\lambda}{4}$ 地點까지는 A+B로 또 $\frac{1}{4}\lambda \sim \frac{3}{4}\lambda$ 사이에 대해서는 B로 放射電流를 나타내었다.

4. 結 論

本硏究에 의하여 放射電流分布를 理論的으로 解析한값과 그 實測値와는 비교적 잘 一致하였으며 실제로 支柱에 흐르는 電流値는 처음에 예상한것 처럼 큰 것이 아니었다는 것을 알수 있었다. 이와같은 結果가 실제 안테나系의 動作理解에 도움이 되고 그의 設計에도 參考가 될것이라고 생각한다.

附 錄

α_1 및 α_2에 관해서는 文獻(3)을 參照하되 다음과 같음

$$\alpha_1=\frac{1}{2}[\cos\beta\ell_2\{C(4\beta\ell_2)-2C(2\beta\ell_2)\}$$
$$-\sin\beta\ell_2(4\beta\ell_2)]+\frac{j}{2}[\cos\beta\ell_2\{S(4\beta\ell_2)$$
$$-2S(2\beta\ell_2)\}+\sin\beta\ell_2C(4\beta\ell_2)]$$

$$\alpha_2=-\int_{-\ell_2}^{\ell_2}\frac{\{F_1(\xi)-F_1(\ell)\}e^{-j\beta(\ell_2-\xi)}}{\ell_2-\xi}\,d\xi$$

또한 β_1', β_2'는 文獻(2)에 의하여

$$\beta_1'=-\{\sin\beta\ell_1(f_{22}+h_{22})-\sin\beta\ell_2(f_{21}+h_{21})$$
$$-\cos\beta\ell_1(g_{22}+k_{22})+\cos\beta\ell_2(g_{21}+k_{21})\}$$

$$\beta_2'=(k_{22}+g_{22})(f_{21}+h_{21})-(f_{22}+h_{22})(k_{21}+g_{21})$$

$$\gamma_1=f_{12}\sin\beta(\ell_2-\ell_1)$$

$$\gamma_2=-(k_{21}\cos\beta\ell_2-h_{21}\sin\beta\ell_2-k_{22}\cos\beta\ell_1$$
$$+h_{22}\sin\beta\ell_1)\cos\beta\ell_1$$

$$f_{22}+h_{22}=\frac{\cos\beta\ell_2}{2}[\{C(4\beta\ell_2)-2C(2\beta\ell_2)\}$$
$$+j\{S(4\beta\ell_2)-2S(2\beta\ell_2)\}]$$
$$-\frac{\sin\beta\ell_2}{2}[S(4\beta\ell_2)-jC(4\beta\ell_2)]$$

$$f_{21}+h_{21}=-\{\cos\beta\ell_1-\cos\beta\ell_2\}\ln\frac{\ell_2^2-\ell_1^2}{\ell_2^2}$$
$$+\frac{1}{2}[\cos\beta\ell_1\{C(2\beta(\ell_1+\ell_2))+C(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$
$$-\sin\beta\ell_1\{S(2\beta(\ell_1+\ell_2))-S(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$
$$-2\cos\beta\ell_2\{C(\beta(\ell_1+\ell_2))+C(\beta((\ell_1+\ell_1))\}]$$
$$+\frac{j}{2}[\cos\beta\ell_1\{S(2\beta(\ell_1+\ell_2))+S(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$
$$+\sin\beta\ell_1\{C(2\beta(\ell_1+\ell_2))-C(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$
$$-2\cos\beta\ell_2\{S(\beta(\ell_1+\ell_2))+S(\beta(\ell_2-\ell_1))\}]$$

$$g_{22}+k_{22}=-\frac{1}{2}\cos\beta\ell_2[S(4\beta\ell_2)-2S(2\beta\ell_2)$$
$$-jC(4\beta\ell_2)+j2C(2\beta\ell_2)]-\frac{1}{2}\sin\beta\ell_2[C(4\beta\ell_2)$$
$$+jS(4\beta\ell_2)+4\ln\frac{1}{2}]$$

$$g_{21}+k_{21}=-\{\sin\beta\ell_1-\sin\beta\ell_2\}\ln\frac{\ell_2^2-\ell_1^2}{\ell_2^2}$$
$$-\frac{\cos\beta\ell_1}{2}[S(2\beta(\ell_1+\ell_2))+S(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$-2S(2\beta\ell_1)-jC(2\beta(\ell_1+\ell_2))-jC(2\beta(\ell_2$$
$$-\ell_1))+j2C(2\beta\ell_1)]$$
$$-\frac{\sin\beta\ell_1}{2}[C(2\beta(\ell_1+\ell_2))-C(2\beta(\ell_2-\ell_1))+jS$$
$$(2\beta(\ell_1+\ell_2))-jS(2\beta(\ell_2-\ell_1))-j2S(2\beta\ell_1)-2$$
$$C(2\beta\ell_1)+4\ln\frac{\ell_1}{\ell_2+\ell_1}]$$
$$-\sin\beta\ell_2[C(\beta(\ell_1+\ell_2))+C(\beta(\ell_2$$
$$-\ell_1))+jS(\beta(\ell_1+\ell_2))+jS(\beta(\ell_2-\ell_1))]$$

$$k_{22}=\sin\beta\ell_1\{C(\beta(\ell_1+\ell_2))-C(\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$+\ln\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2+\ell_1}+jS(\beta(\ell_2+\ell_1))-jS(\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$
$$-\frac{\cos\beta\ell_2}{2}\{S(4\beta\ell_2)-S(2\beta(\ell_1+\ell_2))$$
$$-S(2\beta(\ell_2-\ell_1))-jC(4\beta\ell_2)+jC(2\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$+jC(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}-\frac{\sin\beta\ell_2}{2}\{C(4\beta\ell_2)$$
$$+2C(2\beta\ell_2)-C(2\beta(\ell_2+\ell_1))-C(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$+2\ln\frac{\ell_2^2-\ell_1^2}{4\ell_2^2}+jS(4\beta\ell_2)+j2S(2\beta\ell_2)$$
$$-jS(2\beta(\ell_2+\ell_1))-jS(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$

$$k_{21}=-\{\sin\beta\ell_1-\sin\beta\ell_2\}\ln\frac{\ell_2^2-\ell_1^2}{\ell_2^2}$$
$$-\frac{\cos\beta\ell_1}{2}\{S(2\beta(\ell_2+\ell_1))+S(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$-S(4\beta\ell_1)-jC(2\beta(\ell_2+\ell_1))-jC(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$+jC(4\beta\ell_1)\}-\frac{\sin\beta\ell_1}{2}\{C(2\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$-C(2\beta(\ell_2-\ell_1))-C(4\beta\ell_1)-2C(2\beta\ell_1)$$
$$+4\ln\frac{2\ell_1}{\ell_2+\ell_1}+jS(2\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$-jS(2\beta(\ell_2-\ell_1))-j2S(2\beta\ell_1)-jS(4\beta\ell_1)\}$$
$$-\sin\beta\ell_2\{C(\beta(\ell_2+\ell_1))+C(\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$+jS(\beta(\ell_2+\ell_1))+jS(\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$

$$h_{22}=\cos\beta\ell_1\{C(\beta(\ell_2+\ell_1))-C(\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$+\ln\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2+\ell_1}+jS(\beta(\ell_2+\ell_1))-jS(\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$
$$-\frac{\cos\beta\ell_2}{2}\{C(2\beta(\ell_2+\ell_1))-C(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$-C(4\beta\ell_2)+2C(2\beta\ell_2)$$
$$+2\ln\frac{\ell_2-\ell_1}{\ell_2+\ell_1}+jS(2\beta(\ell_2+\ell_1))-jS(2\beta(\ell_2$$
$$-\ell_1))-jS(4\beta\ell_2)+j2S(2\beta\ell_2)\}$$

$$-\frac{\sin\beta\ell_2}{2}\{S(4\beta\ell_2)+S(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$-S(2\beta(\ell_2+\ell_1))-jC(4\beta\ell_2)-jC(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$+jC(2\beta(\ell_2+\ell_1))\}$$
$$h_{21}=-\{\cos\beta\ell_1-\cos\beta\ell_2\}\ell_n\frac{\ell_2^2-\ell_1^2}{\ell_2^2}$$
$$-\frac{\cos\beta\ell_1}{2}\{C(4\beta\ell_1)-C(2\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$-C(2\beta(\ell_2-\ell_1))-2C(2\beta\ell_1)+jS(4\beta\ell_1)$$
$$-jS(2\beta(\ell_2+\ell_1))-jS(2\beta(\ell_2-\ell_1))$$
$$-j2S(2\beta\ell_1)\}$$
$$-j\frac{\sin\beta\ell_1}{2}\{C(4\beta\ell_1)-C(2\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$+C(2\beta(\ell_2-\ell_1))+jS(4\beta\ell_1)-jS(2\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$+jS(2\beta(\ell_2-\ell_1))\}-\cos\beta\ell_2\{C(\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$+C(\beta(\ell_2-\ell_1))+jS(\beta(\ell_2+\ell_1))$$
$$+jS(\beta(\ell_2-\ell_1))\}$$

단 위에서

$$C(x)=\int_0^x\frac{1-\cos\xi}{\xi}d\xi=\gamma+\ell_n(x)-Ci(x)$$
$$\gamma=0.57722$$
$$S(x)=\int_0^x\frac{\sin\xi}{\xi}d\xi=Si(x)$$

參考文獻

(1) 内田, 虫明著 Corona社出版
超短波空中線

(2) The Antenna Constructed by Parallel Wires by NAGAI SATO and UCHIDA on the REP of the Research Inst of Electrical Comm TOHOKU University JAPAN
B—(Elect Comm) Vol. 12 No. 2 1960

(3) YAGI-UDA Antenna by Mushiake, Marusen Co.

(4) 內田, 佐藤, 永井 平行線에 의하여 구성되는 空中線 (補遺)
日本電氣通信學會雜誌 1959年 12月 第42巻 12號 p. (14) 1174

(5) A method of amplitude and phase measurements in the VHF-UHF band by G. D Monteath, D. J. Whythe, K. W. T Hughes
[PIEE] March1960 Vol. 107 p150~154]