數學教育을 爲한 非유크리드 幾何의 指導에 關한 研究

金 道 相

1. 序 論

幾何가 우리들이 사는 세계의 物體의 表現으로서 初等教育에서부터 많은 역활을 한다는 것은 잘 알고 있다. 특히 直觀幾何가 演繹科學으로서의 幾何學研究에 기초가 된다는 것은 일반으로 認定되고 있다.

Euclid 幾何는 지난 200년 동안이나 고등학교 수학에서 한 무대를 차지하고 있었다. 그런데 數學의 새로운 발전에 있어서 무엇이 가장 곤난한가하면 그것은 새로운 생각을 배우는 것이라기보다 낡은 생각을 잊는 것이다. 새로운 理論을 파악하는 것이 어렵다는 것은 낡은 理論의 사고방식으로서 새로운 이론을 배우려 하기 때문이다.

지난 150년 동안 수학의 새로운 사고 방식이 쉴사이 없이 잇달아 나타났다.

지금까지의 수학은 엄밀히 검토되고 심사되어 어떤 것은 의미가 없다든가 틀렸다든가하는 것이 發見되었다. 數學教育이 인간의 생활전반에 걸쳐 무엇인가 영향을 주는 것이 있다면 그것은 바로 이 훈련일 것이다. 우리들이 현재의 세계를 관찰하여 그 실체를 정확히 안다는 것은 극히 힘들고 우리들은 과거의 안개속에 싸여 있을 뿐이다.

Euclid가 가정하고 또한 아무말도 하지 않고 인정한 사실의 태반은 우주의 物理的인 記述로서 極히 合理的이다. 보통사람이라면 이러한 것은 인정한다. 이에 對하여 非유크리드 幾何는 수학의 새로운 사고방식의 하나로서 오랜 전통을 깨트리고 思考를 必要로 하는 科學으로서 가장 큰 영향을 준 것이다. 2,000年前 Euclid는 唯一한 絕對의 幾何學으로서 확정된 것으로 생각하였다. 마치 우리들이 神을 a god라 쓰지않고 God라고 쓰는것처럼 幾何學은 a geomtry라고 말하지않고 Geometry라고 생각하는 버릇이 있다.

여기서 本論文은 非유크리드 幾何를 高校 數學에서 指導한다면 어떠한 程度의 내용을 어떠한 方法으로 취급할 것인가라는 하나의 指導體系를 세워본 것이다. 우선 目的 및 必要性을 말하면 다음과 같다.

1) 現代數學이 數學의 構造 즉 公理的인 취급을 重視하는 傾向에 따라서 數學教育에 있어서도 幾何의 構造을 指導하는 좋은 材料가 된다.

2) 유크리드 幾何의 平行線公理는 學生들이 極히 直觀的인 당연한 事實로 認定하기 쉬울 뿐만 아니다. 公理의 數學的 意議에 대하여 깨닫기 어려으므로 이에 反對되는 公理를 採用한 幾何를 提示함으로서 直觀을 不許하고 公理에 대한 認識을 새롭게 할 수 있다.

3) 數學的으로 眞理란 무엇인가를 다시 한번 깨닫게되며 數學의 本質을 한층 더 理解할 수 있는 기회가 된다.

4) 數學의 體系를 강조하고 엄밀한 推理力과 論證的 態度을 기르는 데 유크리드 幾何에 못지않게 效果的이며, 두개의 幾何의 相異點을 比較研究하는 것이 教育的으로도 興味있는 일이다.

5) 이 幾何學은 線型微分方程式을 積分하는 수단으로 利用되며, 應用價値도 있다는 것이 알려졌다는 점이다.

그러면 그 指導方法으로서 主로 絕對幾何와 關係시커 高校 初學年의 數學을 習得한 學生은 能히 理解할 수 있는 내용으로 전개하려 한다.

特히 集合記號을 많이 使用하였고 도형의 이동은 주로 函數的 表現을 하였다. 그런데 여기서는 非유크리드 幾何中에서 雙曲的 幾何에 對

해서만 생각하려 한다.

2. Absolute Geometry (絕對幾何)

2.1 平行이 되기 爲한 充分條件

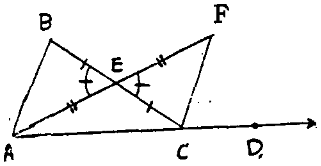
絕對幾何란 Hilbert의 5個의 公理 즉 結合, 順序, 連續, 合同, 平行線의 公理中에서 平行線의 公理를 除外한 나머지 公理를 가정하여 이루어진 幾何이다.

두 直線이 같은 平面위에 있고 만나지않으면 평행이라고 하며 직선 L과 L′가 나란하다는 것을 L//L′로 표시한다. 또한 두 線分이 나란하다는 것은 그들을 포함하는 두 直線이 평행일 때를 말한다. 한편 직선과 선분 또는 선분과 半直線인 경우에도 같은 말을 할 수 있다.

이제 다음의 定理부터 생각하자.

【定理 1】 三角形의 한 外角은 그의 內對角보다 크다.

〈증명〉 점 E를 $\overline{BC}$의 中點이라하자. 한편 A−E−F이고 $\overline{EA}\cong\overline{EF}$인 點 F를 생각하자. 그러면 △AEB와 △FEC에서 SAS 公理에 依하여 △AEB≅△FEC가 된다.

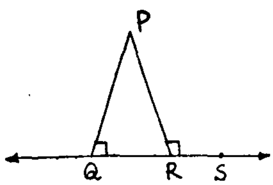


故로 ∠B≅∠BCF. 그런데 F는 ∠BCD의 內部에 있으므로 $m\angle BCF < m\angle BCD$ 따라서

$m\angle B < m\angle BCD$.

【定理 2】 직선밖의 한 點에서 그 直線에 그은 수선은 유일하다.

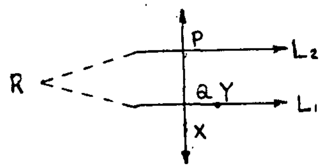
〈증명〉 P를 지나 L에 수직인 直線이 두개 있



다고 하자. 즉 두 수선의 발을 Q 및 R라 하자. 지금 S를 Q−R−S인 L의 한 點이라하자. 그러면 ∠PRS는 △PQR의 外角이고 ∠PQR은 그의 內對角이다. 이것은 定理 1에 의하여 불가능하다. 왜냐하면 ∠PQR와 ∠PRS는 모두 직각이기 때문이다. 따라서 수선은 唯一하다.

【定理 3】 두 直線이 같은 平面위에 있고 같은 직선에 수직이면 이들은 나란하다.

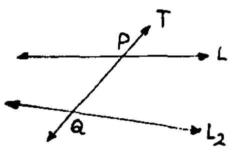
〈증명〉 L_1과 L_2가 點 Q, P에서 T와 각각 만난다고 하자. 그리고 L_1과 L_2는 평행하지않고,



R에서 만난다고 하자. 그러면 R을 지나 T에 두 수선이 있게 된다. 이것은 모순이다.

【定理 4】 한 직선과 그위에 있지않는 한 點이 있을 때 그 點을 지나 그 직선에 平行인 직선은 적어도 하나 있다.

〈증명〉 수선의 존재성에 의하여 P를 지나 L_2에 수직인 직선 T가 있다. 한편 P를 지나 T에 수직인 직선 L_1이 있다.



따라서 定理 3에 의하여 $L_1 // L_2$이다. 즉 平行인 直線은 적어도 하나 있다.

【定理 5】 두 直線과 한 횡단선이 있을 때 한 쌍의 엇각이 합동이면 두 直線은 平行하다.

증명은 귀류법으로서 定理 1을 적용하면 된다.

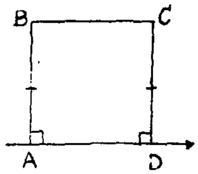
【定理 6】 한 쌍의 동위각이 같으면 평행이다.

증명은 定理 5에 依함.

2.2 Saccheri quadrilaterals(四邊形)

같은 평면위에 있고 그들중 어느 세 點도 共線

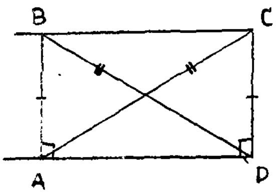
이 아닌 네 點 A,B,C,D가 있을때 線分 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$가 그들의 끝點에서만 만나면 이들의 union을 四邊形이라 부른다. 그리고 □ABCD를 나타 낸다.



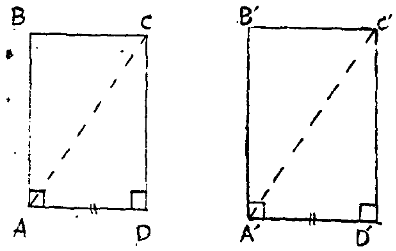
이제 ∠A와 ∠D가 직각이고 AB=CD이면, □ABCD를 Saccheri 사변형이라 한다. 또는 간단히 s.q.로 표시한다. 線分 $\overline{AD}$를 下底라 하고, $\overline{BC}$를 上底라 한다. 또 ∠A, ∠D를 下底角, ∠B, ∠C를 上底角이라 한다.

【定理 1】 s.q.의 對角線은 항상 合同이다.

〈증명〉 SAS 公理에 依하여
△BAD ≅ △CDA
따라서
$\overline{BD} \cong \overline{AC}$



【定理 2】 □ABCD와 □A′B′C′D′가 s.q. 일 때, $\overline{A'D'} \cong \overline{AD}$이고, $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$이면
$\overline{BC} = \overline{B'C'}$ ∠B≅∠B, ∠C′≅∠C이다.



〈증명〉 증명의 主要단계만 말하면 다음과 같다.

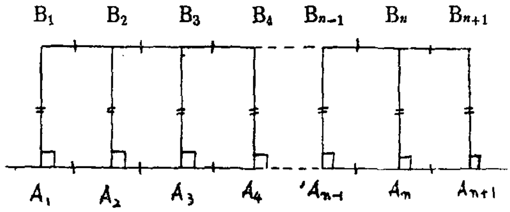
(1) △ACD≅△A′C′D′ (SAS에 의하여)
(2) ∠A≅∠A′　　(3) ∠BAC≅∠B′A′C′
(4) $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$　　(5) △ABC≅△A′B′C′
(6) ∠B≅∠B′　　(7) $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
(8) ∠C≅∠C′

위의 定理에서 s.q.는 AD와 AB에 의하여 완전히 그려질 수 있음을 말하여 준다.

한편 위의 定理를 s.q. □ABCD, □DCBA에 적용하면 ∠B≅∠C가 되므로 다음 定理을 얻는다.

즉 s.q.에서는 上底角은 合同이다. (定理 3)

【定理 4】 s.q.에서 上底는 下底보다 길거나 또는 合同이다.



〈증명〉 먼저 그림에서 $\square A_1B_1A_2B_2$를 s.q. 이라 하고 $B_1B_2 \geqq A_1A_2$를 증명하자.

주어진 s.q.에서 시작하여 連달아있는 n個의 s.q.의 列을 만든다.

즉 $A_3, \cdots\cdots, A_{n+1}$은 직선 $\overleftrightarrow{A_1A_2}$의 點들이고 $\angle B_2A_2A_3$, $\angle B_3A_3A_4, \cdots\cdots$는 모두 직각이며

$$A_1A_2 = A_2A_3 = \cdots\cdots\cdots = A_nA_n+1.$$

한편 $A_2B_2 = A_3B_3 \cdots\cdots\cdots = A_{n+1}B_{n+1}$.

정리 2에 의하여

$$B_1B_2 = B_2B_3 = \cdots\cdots\cdots = B_nB_{n+1}$$ 이 된다.

그러면 點 $B_1, \cdots\cdots, B_{n+1}$의 共線性에 關하여는 알 필요가 없지만 多角形의 부등식에 의해서 다음것을 알수 있다.

$$B_1B_{n+1} \leqq B_1B_2 + \cdots\cdots + B_nB_{n+1}.$$

그런데 右邊의 모든 距離는 B_1B_2와 같으므로

$$B_1B_{n+1} \leqq n\,B_1B_2$$

같은 原理에 의해서 다음을 얻는다.

$$A_1A_{n+1} \leqq A_1B_1 + B_1B_{n+1}B_{n+1}A_{n+1}$$
$$\leqq A_1B_1 + nB_1B_2 + A_1B_1.$$

그런데 $A_1A_{n+1} = nA_1A_2$이므로

$$nA_1A_2 \leqq nB_1B_2 + 2A_1B_1.$$

위의 부등식은 모든 n에 對하여 成立한다. 한편 위의 定理가 거짓이라면 $A_1A_2 > B_1B_2$ 즉 $A_1A_2 - B_1B_2$는 陽數가 된다. 分明히 $2A_1B_1$은 陽數이다.

$e = A_1A_2 - B_1B_2$　　$M = 2A_1B_2$이라 하자.

그러면 $e > 0$, $M > 0$인데 모든 n에 對하여

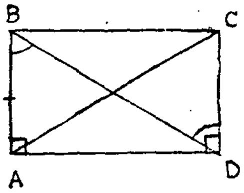
$ne \leqq M$. 이것은 Archimedes 公理에 모순된다.

2.3 三角形의 角의 合에 關한 基本 不等式

유그리드 幾何에서는 삼각형의 內角의 合이 180° 임을 잘 알고 있다. 그러나 平行線公準을 가정하지않은 경우 즉 절대기하에서는 내각의 合이 180° 보다 적거나 혹은 같다. 이 사실을 밝히기 위해서 다음 몇 가지의 예비정리를 생각하자.

【定理 1】 s.q. □ABCD 에서 $m\angle BDC \geqq m\angle ABD$

〈증명〉 BA=DC, BD=BD 임을 알고 있다.



만일 $m\angle ABD > m\angle BDC$ 이면 AD>BC. 이것은 前節의 定理 4에 모순이다. 따라서 $m\angle ABD \leqq m\angle BDC$.

【定理 2】 △ABD 가 ∠A 가 直角인 삼각형이면 $m\angle B + m\angle D \leqq 90°$

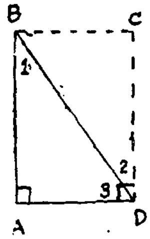
〈증명〉 □ABCD 가 s.q. 가 되는 點을 C 라하자.

그러면 $m\angle 3 + m\angle 2 = 90°$.

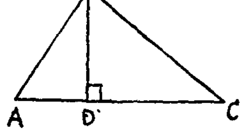
그런데 $m\angle 2 \geqq m\angle 1$

따라서 $90° - m\angle 3 \geqq m\angle 1$

즉 $m\angle 1 + m\angle 3 \geqq 90°$



【定理 3】 任意의 삼각형 ABC 에서 $m\angle A + m\angle B + m\angle C \leqq 180°$



〈증명〉 $\overline{AC}$ 를 △ABC 의 제일 긴변이라하자. B에서 $\overline{AC}$ 에 내린 수선을 $\overline{BD}$ 라 하면 D는 ∠ABC 의 內部에 있다.

그리고 △ADB 와 △BDC 는 직각 삼각형이므로

$m\angle A + m\angle ABD \leqq 90°$,

$m\angle DBC + m\angle C \leqq 90°$

따라서

$m\angle A + m\angle ABD + m\angle DBC + m\angle C \leqq 180°$

한편 $m\angle ABD + m\angle DBC = m\angle B$

즉 $m\angle A + m\angle B + m\angle C \leqq 180°$

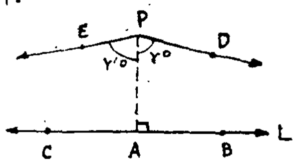
2.4 Critical function(臨界函數)

[Pasch 의 公理] △ABC 와 직선 L 가 주어졌을 때 L 가 點 A 와 B 사이에서 $\overline{AB}$ 와 만나면 L 은 또한 $\overline{AC}$ 혹은 $\overline{BC}$ 와 만난다.

[Crossbar 정리] D 가 ∠BAC 의 內部에 있으면 $\overrightarrow{AD}$ 는 $\overline{BC}$ 와 만난다.(證明은 略함)

한직선 L 과 한 外點 P 가 주어져 있을때 P 에서 L 에 그은 수선의 발을 A 라하고 L 의 다른 任意의 點을 B 라하자. 그러면 0° 과 180° 사이의 어떤 수 r 에 대하여 다음과 같이 되는 어떤 半直線 $\overrightarrow{PD}$ 가 꼭 하나 존재한다.

즉 D 는 $\overleftrightarrow{AP}$ 에 대하여 B 와 같은 쪽에 있고 $m\angle APD = r$ 이다.



분명히 어떤수 r 에 대하여 $\overrightarrow{PD}$ 는 $\overrightarrow{AB}$ 와 만나게 된다. 그러나 $r \geqq 90°$ 에 대하여는 $\overrightarrow{PD}$ 가 $\overrightarrow{AB}$ 와 만나지 않게 된다. 지금 다음과 같은 r 의 집합 k 를 생각하자. $K = \{r \mid \overrightarrow{PD} \text{ intersects } \overrightarrow{AB}\}$

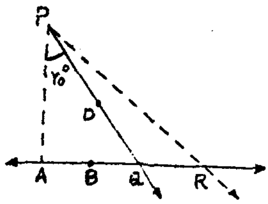
그러면 K 는 공집합이 아니고 上界를 갖는다. 따라서 K 는 上限을 가지게 되는데 이것을 r_0 라 하자. 즉 $r_0 = \sup K$

이때 수 r_0 를 P 와 AB 에 關한 critical number 라 한다. 그리고 크기가 r_0 인 ∠APD 를 $\overrightarrow{AB}$ 와 P 의 平行角이라 부른다.

【定理 1】 $m\angle APD = r_0$ 이면, $\overrightarrow{PD}$ 는 $\overrightarrow{AB}$ 와 만나지 않는다.

〈증명〉 $\overrightarrow{PD}$ 가 Q 에서 $\overrightarrow{AB}$ 와 만난다고 가정하

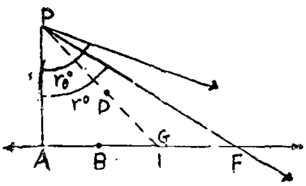
자. 한편 R는 A−Q−R인 任意의 點이라 하면



$m\angle APR > r_0$. 따라서 r_0는 K의 上限이 아니다.

이것은 모순이다. 즉 $\overrightarrow{PD}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다.

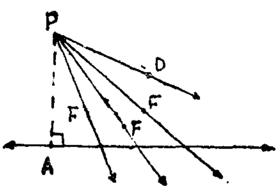
【定理 2】 $m\angle APD < r_0$이면 $\overrightarrow{PD}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만난다.



〈증명〉 $r_0 = \sup K$이고 $m\angle APD < r_0$이므로 $m\angle APD$는 R의 上限이 아니다; 그러므로 K内에 $r > m\angle APD$인 어떤 r가 있다. 이제 D′를 $m\angle APD' = r$인 점이라하자. 그러면 $\overrightarrow{PD'}$는 한점 F에서 $\overrightarrow{AB}$와 만난다.

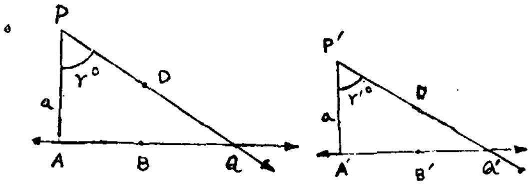
그러나 $\overrightarrow{PD}$는 $\angle APD'$의 내부에 있다. 따라서 Crossbar정리에 의하여 $\overrightarrow{PD}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만난다.

지금까지 r_0는 P와 A 및 B로 정의 되었다. 그러나 r_0는 거리 AP에만 관계된다는 것을 다음 定理에서 알수 있다.



【定理 3】 $AP = A'P'$이면 critical number r_0와 r_0'는 같다.

$K = \{r \mid \overrightarrow{PD}$ intersects $\overrightarrow{AB}\}$,



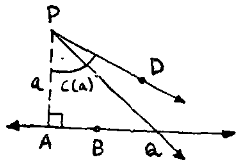
$K' = \{r \mid \overrightarrow{P'D'}$ intersects $\overrightarrow{A'B'}\}$ 라 하자.

$r \in K$ Q에서 $\overrightarrow{PD}$와 $\overrightarrow{AB}$가 만나고 Q′는 $A'Q' = AQ'$인 $\overrightarrow{A'B'}$의 점이라하자. 그러면 $m\angle A'P''Q = r_0$ 따라서 $r \in K'$. 그러므로 $K \subset K'$ 같은 方法으로 $K' \subset K$. 결국 $K' = K$.

따라서 $\sup K' = \sup K$.

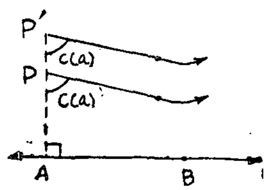
이제 함수 $AP \to r_0$가 생겼는데 이 함수를 c로 나타내고 이것을 critical function이라 부른다.

모든 $a > 0$에 대하여 $c(a)$는 $AP = a$에 대응하는 critical number를 나타낸다. 즉 $\overrightarrow{PD}$는 $m\angle APD < c(a)$ 일때는



$\overrightarrow{AP}$와 만난다. 그러나 $m\angle APD \geq c(a)$ 일때는 $\overrightarrow{PD}$가 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다. 앞으로 $c(a)$에 대하여 연구하자.

【定理 4】 $c(a)$는 a가 증가 해도 결코 증가하지 않는다. 즉 $a' > a$이면 $c(a') \leq c(a)$



〈증명〉 $a = AP$, $a' = AP'$라 하고 $\overrightarrow{PD}$를 $m\angle APD = c(a)$되게 또 $\overrightarrow{P'D'}$를 $m\angle AP'D' = c(a)$되게 택한다.

그러면 $\overrightarrow{PD}$와 $\overrightarrow{P'D'}$는 평행하다. 故로 $\overrightarrow{P'D'}$의 모든 點들을 $\overrightarrow{PD}$에 대하여 P′를 포함하는 쪽에 있다. 한편 $\overrightarrow{AB}$의 모든 點들은 $\overrightarrow{PD}$의 A를 포함하는 쪽에 있다. 따라서 $\overrightarrow{P'D'}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지

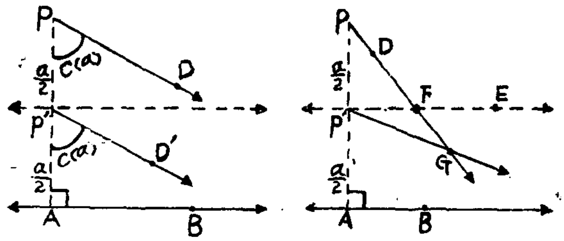
않는다.

지금 $K'=\{r|\overrightarrow{P'D'}$ intersects $\overrightarrow{AB}\}$라 하자.

한편 $c(a')=\sup K'$ 그런데 $\overrightarrow{P'D'}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않으므로 $c(a)$는 K'의 上界이다.

그리고 $c(a)$는 K'의 上限이다. 그러므로 $c(a')\leq c(a)$, Euclid의 幾何에서는 $a'>a$에 대하여 $c(a')<c(a)$는 成立치 않는다. 왜냐하면 모든 a에 대하여 $c(a)=90°$. 또한 雙曲的幾何에서는 $a'>a$일 때 $c(a')<c(a)$가 成立될 뿐만 아니라, 事實上 $a\to\infty$ 일때 $c(a)\to 0°$ 가 된다.

【定理 5】 $c(a)<90°$ 이면 $c(a/2)<90°$ 이다.



그림에서 $AP=a$ $AP'=a/2$로 주어졌다.

$m\angle APD=c(a)<90°$되게 $\overrightarrow{PD}$를 取하고 P'에서 $\overleftrightarrow{P'E}\perp\overleftrightarrow{AP}$되게한다. 만일 $\overrightarrow{PD}$가 $\overrightarrow{P'E}$와 만나지 않는다면, 〔왼편그림〕 $P'D'$가 와 AB 만나지 않은 예각 $\angle AP'D'$가 있다. 그러므로 $c(a/2)<90°$한편 $\overrightarrow{PD}$가 點 F에서 $\overrightarrow{P'E}$와 만난다고 가정 하자. 그리고 G를 P－F－G인 點이라 하면 $\angle AP'G$는 예각이다.

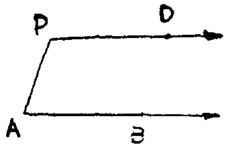
지금 i) $\overrightarrow{AB}$는 $\overrightarrow{P'G}$와 $\overline{P'G}$의 點 밖에서는 만날 수 없음이 明白하고, ii) $\overrightarrow{AB}$는 P' 또는 G도 포함치 않고, iii) $\overrightarrow{AB}$는 P'와 G' 사이의 點도 포함치 않는다. 만약 포함 한다면 Pasch의 공리에 의하여 $\overrightarrow{AB}$는 $\overrightarrow{P'F}$ 혹은 $\overline{FG}$와 만난다. 이는 모순이다. 그러므로 $\overrightarrow{P'G}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않고 $c(a/2)<90°$

【定理 6】 어떤 a_0에 대하여 $c(a_0)<90°$ 이면 모든 a에 대하여 $c(a)<90°$

〈증명〉 모든 n에 대하여 $a_n=\frac{a_0}{2^n}$ (앞의 定理에 근거하여 귀납법으로) 그러면 모든 n에 대하여 $c(a_n)<90°$ 지금 어떤 b에 대하여 $c(b)=90°$ 이라고 가정하자. $\lim_{\infty\to n} a_n=0$이므로 어떤 k에 대하여 $a_k<b$가 될 수 있다. 그런데 $c(a_k)<c(b)$. 이것은 定理 4에 모순된다.

2.5 Open triangles (開三角形) and critically parallel rays (臨界平行直線)

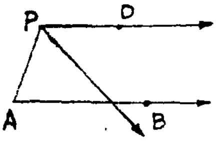
$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PD}$ 선분 $\overrightarrow{AP}$에서 어느 두개트 共線이 아니고 B와 D는 $\overleftrightarrow{AP}$의 같은 쪽에 있고 AB//PD 라 하자.



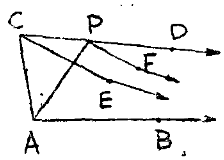
이때 $\overrightarrow{PD}\cup\overrightarrow{PA}\cup\overrightarrow{AB}$를 Open triangle이라 부르고 $\triangle DPAB$로 나타낸다.

여기서 $\overleftrightarrow{AB}//\overleftrightarrow{PD}$는 보통 의미 즉 서로 만나지 않는다는 의미에서의 평행을 뜻한다.

$\triangle DPAB$가 open triangle이고 $\angle APD$의 모든 interior ray (內半直線)가 $\overrightarrow{AB}$와 만난다고 하자. 그러면 $\overrightarrow{PD}$는 $\overrightarrow{AB}$에 critically parallel이라고 PD/AB로 쓴다.



【定理 1】 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$이고 C－P－D이면 $\overrightarrow{CD}/\overrightarrow{AB}$

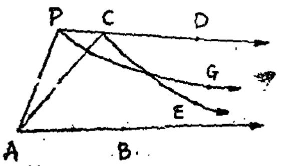


〈증명〉 $\overrightarrow{CE}$를 $\angle ACD$의 interior ray라 하고 $\overrightarrow{CE}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다고 하자. 그러면 外角定理(평행선 공준을 사용하지 않었던 §2.1의 정리 1)에 의하여 $\angle APD>\angle ACD$이다. 따라서 $\angle DPF\cong\angle DCE$인 $\angle APD$의 interior ray $\overrightarrow{PF}$가 있다. 그러므로 PF//CE. 따라서 $\overrightarrow{PF}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다.

왜냐하면 이 두 半直線은 $\overleftrightarrow{CE}$의 서로 반대편에 있기 때문에 이것을 가정 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$에 모순된다.

【定理 2】

$\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$이고 P−C−D이면 $\overrightarrow{CD}/\overrightarrow{AB}$



〈증명〉 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않은 ∠ACD의 interior ray $\overrightarrow{CE}$가 있다고 하자 F를 $\overrightarrow{CE}$−C의 任意點이라 하고 P−F−G되게 G를 택하자.

그러면 i) F는 ∠APC의 內部에 있다.

ii) $\overrightarrow{PF}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다.

iii) $\overrightarrow{FG}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다.

iv) $\overrightarrow{PF}$는 $\overrightarrow{AB}$와 만나지 않는다.

여기서 i)과 iv)는 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$인 가정에 모순된다. 두 半直線 R과 R′에서 하나가 다른것을 포함하면 equivalent라 부른다. 그리고 R−R′라 쓴다.

이때 다음 定理를 얻는다.

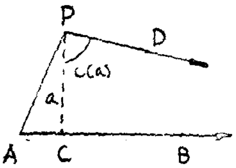
【定理 3】

R/$\overrightarrow{AB}$, R−R′이면 R′/$\overrightarrow{AB}$

【定理 4】

R_1/R_2, $R_1'-R_1$, $R_2'-R_2$이면 R_1'/R_2'

$\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$이고 C를 P에서의 $\overleftrightarrow{AB}$에 내린수선의 발이라 하고 PC=a라 하자.



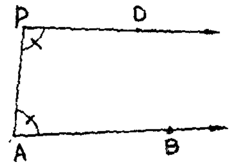
그러면 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{CB}$ 따라서 $m\angle CPD=c(a)$

그런데 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{CB}$ 따라서 $m\angle CPD=c(a)$. 그런데 $m\angle CPD=c(a)$. 그런데 $m\angle CPD=c(a)$인 ray $\overrightarrow{PD}$는 오직 하나 있다. 따라서 다음 정리를 얻는다.

【定理 5】

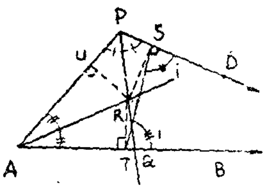
주어진 點을 지나 주어진 半直線에 對한 critically parallel line은 唯一하다.

두개의 open triangle에서 그의 邊을 만들고 있는 半直線이 同値이면 이 open triangle은 同値라 한다. 또 open triangle △PAB에서 ∠P≅∠A이면 二等邊三角形이라 부른다.

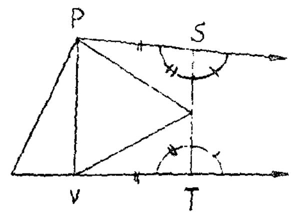


【定理 6】

$\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$이면 △DPAB는 P를 정점으로 하는 한 isosceles open triangle과 同値이다.



〈증명〉 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$이므로 ∠APD의 二等分線은 $\overrightarrow{AB}$와 點 Q에서 만난다. 한편 ∠PAB의 二等分線은 點 R에서 $\overline{PQ}$와 만난다. 지금 S,T,U를 R에서 $\overleftrightarrow{PD}$, $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AP}$에 내린 수선의 발이라하자. 그러면 RU=RT, RU=RS 따라서 RS=RT 이고



∠RST≅∠RTS 그러므로 ∠DST≅∠BTS 즉 △DSTB는 二等邊三角形이다.

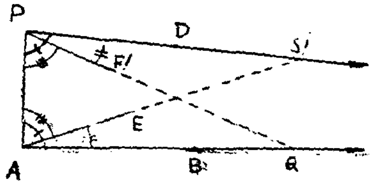
그런데 P를 頂點으로 하기 위하여는 $\overrightarrow{TB}$의 반대편 半直線 위에 TV=SP되게 V를 택하면 된다.

【定理 7】

critical parallelism은 對稱的이다. 즉 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$이면 $\overrightarrow{AB}/\overrightarrow{PD}$이다.

〈증명〉 공리 4와 6에 의하여 △DPAB를 isosceles open triangle이라고 생각해도 좋다. $\overrightarrow{AE}$를 ∠PAB의 interior ray라고 하자. 또 $\overrightarrow{PF}$를 ∠DPF≅∠BAE되는 ∠APD의 interior ray라고

하자. 그러면 $\overrightarrow{PF}$는 $\overrightarrow{AB}$와 Q에서 만난다. 결국



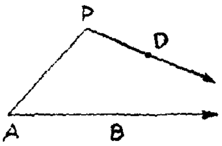
$\overrightarrow{AE}$는 $\overrightarrow{PD}$와 PS=AQ가 되는 點 S에서 만난다.

3. Hyperbolic Geometry (雙曲的幾何)

3.1 Closed Triangles and Angle Sums

유크리드 幾何와 雙曲的幾何의 平行線 公理를 critical function $c(a)$로서 表現한다면 유크리드 幾何에서는 $c(a)=90°$ 이고 雙曲的幾何에서는 $c(a)<90°$ 이 된다고 할수 있다.

지금 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$ 이면 △PDAB를 closed triangle 이라 부른다. 모든 closed triangle은 open triangle 이다.

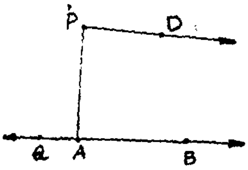


그러나 그 逆은 成立치 않는다. 왜냐하면 P를 지나 $\overleftrightarrow{AB}$에 나란한 직선이 하나 以上 있기 때문이다.

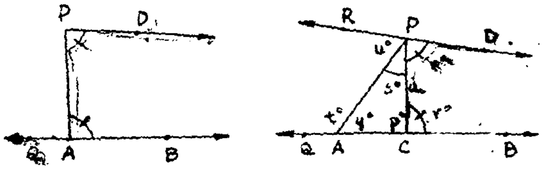
이 三角形에는 重要한 性質이 있다.

【定理 1】 外角의 定理 : HPP의 경우 모든 closed triangle에서는 外角이 內對角보다 크다. 즉 아래 그림에서 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$ 이고 Q−A−B 이면 $m\angle QAP > m\angle P$

〈증명〉 △DPAB가 二等分邊 △이면 分明하다. 왜냐하면 ∠P와 ∠PAB는 鋭角 ($\because c(a)<90°$) 따라서 ∠QAP는 鈍角이다.



△DPAB가 二等邊三角形이 아니라고 하자 그러면 2.5의 定理 6에 의하여 △DPAB는 한 isosceles open △DPCB와 同値이다 물론 이 open triangle은 closed 이다.



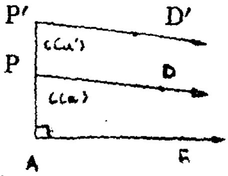
만일 C=A이면 증명할것이 없고 A−C−B인 경우에 그림에서 $p>r$ 왜냐하면 $c(a)<90°$ 한편 $p+q+s\leqq 180°$ 따라서 $t=180°-q\geqq p+s>r+s$

즉 $t>r+s$

보통 絶對幾何에서 critical function c는 非增加函數이었다. 즉 $a'>a$이면 $c(a')\leqq c(a)$. 그러나 위의 定理를 利用하면 減少函數가 된다.

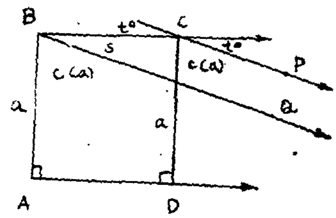
【定理 2】 HPP 下에서 critical function은 減少函數다. 즉 $a'>a$ 이면 $c(a')<c(a)$

〈증명〉 그림에서 $AP=a$ $AP'=a'$ $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{AB}$ 이고



$\overrightarrow{P'D'}/\overrightarrow{A'B'}$ 이면 $\overrightarrow{PD}/\overrightarrow{P'D'}$ 따라서 △P'D'PD는 closed triangle 이다. 그러므로 $c(a)>c(a')$

【定理 3】 HPP 下에서 s.q.의 上底角은 항상 鋭角이다.



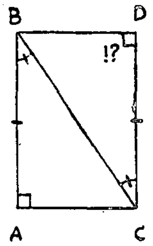
〈증명〉 그림에서 $\overrightarrow{BQ}$와 $\overrightarrow{CP}$는 B및 C를 지나서 $\overrightarrow{AD}$에 平行이다. 따라서 $m\angle ABQ=c(a)=m\angle DCP$. 그런데 closed triangle △PCBQ에서 $t>s$ 따라서 $t+c(a)>s+c(a)$

그러므로 $s+c(a)<90°$

【定理 4】 HPP 下에서 모든 直角 △ABC은 $m\angle A+m\angle B+m\angle C<180°$

〈증명〉 結論이 成立되지 않는다고 하자. 그러면 ∠A가 直角일때 ∠B와 ∠C는 餘角이다.

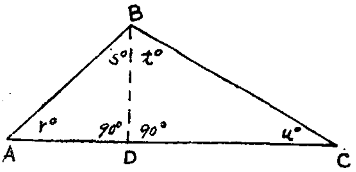
點 D를 ∠BCD≅∠ABC, CD=AB되도록 A에서 $\overleftrightarrow{BC}$의 反對쪽에 택하자.



그러면 SAS에 의하여 △ABC≅△DCB이고 □ABDC는 *s.q.*이다. 이것은 不可能하다. 왜냐하면 ∠D는 直角인 까닭이다.

【定理 5】

HPP 下에서 모든 △ABC에서는
$m\angle A+m\angle B+m\angle C<180$



〈증명〉 $\overrightarrow{AC}$를 △ABC의 제일 긴 邊이라 하고 $\overline{BD}$는 B에서 $\overleftrightarrow{AC}$에 그은 높이라 하자.

그러면 $r+s+90°<180°$

$t+u+90°<180°$

따라서 $r+(s+t)+u<180°$

즉 $m\angle A+m\angle B+m\angle C<180°$

3.2 The defect of a triangle (三角形의 除外角)

△ABC의 defect는 다음과 같이 定義한다.

$180°-m\angle A-m\angle B-m\angle C$

그리고 δ△ABC로 表示하자. HPP 下에서 任意의 三角形의 defect는 陽이며 分明히 180° 보다 적다는 것을 알 수 있다.

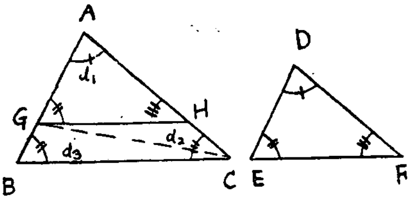
【定理 1】

△ABC에서 B−D−C이면
$\delta\triangle ABC=\delta\triangle ABD+\delta\triangle ADC$가 成立된다.

【定理 2】

HPP 下에서 相似는 合同이다. 즉
△ABC∼△DEF이면 △ABC≅△DEF

〈증명〉 $\overrightarrow{AB}$위에 AG=DE되게 G를 택하고 $\overrightarrow{AC}$



위에 AH=DF되게 H를 택한다. 그러면 SAS에 의하여 △AGH≅△DEF. 따라서 △AGH∼△ABC 만일 G=B이면 H=C이고 정리는 成立된다. 그러나 G≠B, H≠C이면 모순이 생긴다는 것을 밝히자.

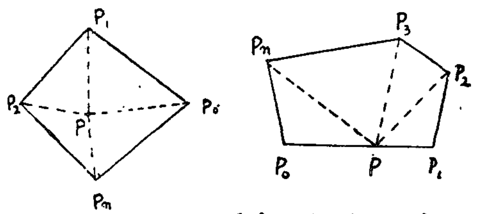
지금 △AGH, △GHC, △GBC의 defect를 d_1, d_2, d_3, 라 하자 그리고 △ABC의 defect를 d라하면 $d=d_1+d_2+d_3$ 이것은 不可能하다. 왜냐하면 △ABC∼△AGH이므로 角의 合同은 $d=d_1$임을 말하여 준다.

3.3 The defect fo a polygonal region

Triangular region T에 대응하는 三角形의 defect로서 그의 變曲的面積을 定義하고 δT로 나타낸다. 한편 polygonal region은 몇개의 三角形으로 分割 하였을때, 各 三角形의 defect의 合으로서 表示 되는데, 이 合은 region R에만 의해서 決定됨을 convex polygonal region에서 생각하자.

【定理 1】

convex polygonal region R의 內部 또는 邊위의 한점 P와 各項點을 맺은 分割에 의한 各 三角形의 defect의 合은 P의 위치에 關係없다.



〈증명〉 왼편 그림에서 defect의 合은 다음과 같다.

$(n+1)180°-(m\angle P_0+m\angle P_1+\cdots+m\angle P_n+360°)$

$=(n-1)180°-(m\angle P_0+\cdots+m\angle P_n)$

오른편 그림에서도 defect의 合은 다음과 같다.

$$n\cdot 180^\circ-(m\angle P_0+m\angle P_1+\cdots+m\angle P_n+180^\circ)$$
$$=(n-1)180-(m\angle P_0+m\angle P_1+\cdots+m\angle P_n)$$

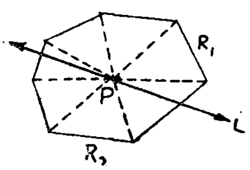
위의 두 式은 defect의 合이, 各 꼭지각의 크기에만 關係되고 點 P의 위치에는 無關係함 말하여준다.

따라서 다음의 定義를 낼수 있다.

즉 convex polygonal region R의 defect δR는 定理 1에 의하여 分割된 三角形의 defect의 合으로서 定義한다.

【定理 2】

convex polygonal region이 한 直線에 의하여 두部分으로 分割되면, union의 defect는 defect의 合과 같다.



〈증명〉 두 region을 各各 R_1, R_2라하면 $R_1\cup R_2=R$, $R_1\cap R_2\subset L$ 한편 P를 R의 內部에서 L의 任意의 點이라 하면 分明히 위 그림에서 $\delta R=\delta R_1+\delta R_2$이다.

4. Poincaré Model(포안카레의 模型)

4.1 Poincaré Model

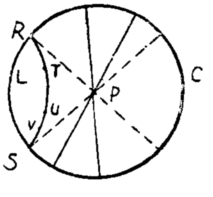
한 직선과 이 밖의 한 점을 주었을 때 그 점을 지나 그 직선에 평행인 직선이 항상 唯一하게 存在한다고만 가정할 必要는 없는 것이다. 그러한 평행선이 적어도 두 개는 存在한다고 가정할 수도 있는 것이다. 이것이 바로 Lobachevsky의 평행선 공준이다. 다시 말하면 평행선의 存在性만을 인정하고 唯一性을 否定한 것이다.

이제 雙曲的 幾何의 공준을 만족하는 Model을 만들려고 하는데 이것이 바로 Poincaré Model이다.

즉 Euclid 平面에서 定圓 C를 생각하자.

편의상 半徑은 1로 한다.

한편 E를 C의 內部라 하자. 이때 L-circle이란 C와 直交하는 圓 C′를 의미한다.



여기서 두 원이 直交한다. 함은 그들의 交點에서의 接線이 直交함을 말한다.

따라서 L-plane의 點이라면 것은 C의 內部 E가 될 것이다. 또한 L-line이란 (i) E와 L-circle과의 intersection 또는 (ii) E와 C의 直徑과의 intersection을 의미한다.

한편 E의 모든 두 點은 반드시 하나의 L-line 위에 있게 된다.

이제 우리가 생각할 새로운 幾何의 點과 直線이란 무엇을 의미하는지를 알게되었다. 다음에는 距離와 角의 크기를 定義할 必要가 있다.

지금 먼저 그림에서 4點 R, S, T, U,를 생각할 때 R와 S는 L-plane의 點이 아니고 Euclid 平面의 點이다. 이제 T와 U를 지나는 L-line은 唯一한데 이 L-line이 點 R과 S에서 圓 C와 만난다는 것이다. 여기서 새로운 거리 $d(T,U)$를 정의하는데, 이미 定義된 네개의 거리 TS, TR, US, UR를 사용한다.

즉 공식 $d(T,U)=\left|\log\dfrac{TR/TS}{UR/US}\right|$

이때 분명히 다음이 成立된다. 즉 한점 U를 고정시켰을때 L의 모든 점 T에 대하여 $f(T)=\log\dfrac{TR/TS}{UR/US}$라 하자. 사실상 $f(T)$는 $d(T,U)$이다.

그러면 하나의 函數 $f: L\to R$을 얻는다.

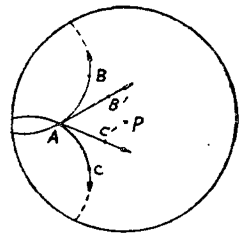
f는 L에 對한 座標系를 나타내게 된다.

또 V를 L의 다른 한 점 이라하자.

그러면 $f(V)=\dfrac{VR/VS}{UR/US}$이다.

이제 $x=f(T)$, $y=f(V)$라 하면 다음 關係가 成立된다. $\left|x-y\right|=\left|\log\dfrac{TR/TS}{UR/US}-\log\dfrac{VR/VS}{UR/US}\right|$

$=\left|\log\dfrac{TR/TS}{VR/VS}\right|$ 따라서 $|x-y|=d(T,V)$ 이것은 새로운 함수가 좌표의 公理를 만족한다는 것을 의미한다.



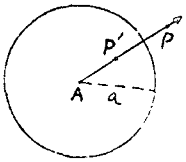
다시 角의 크기를 정의하는데는 왼편 그림과 같이 接線을 사용하여 $m\angle BAC$를 $\angle B'AC'$의

크기로 정의한다.

4.2 Inversions of a punctured plane

Euclid平面 E의 點과 A를 中心으로 하는 圓 C를 생각할때 set E—A를 punctured plane이라고 한다. C에 관한 E—A의 inversion이란 다음과 같이 定義된 하나의 함수 f:E—A←→E—A이다.

즉 E—A의 點 P에 대하여 $P'=f(P)$을 $AP'=\frac{a^2}{AP}$



이 되는 $\overrightarrow{AP}$의 點이라 하자.

【定理 1】

P∈C이면 $f(P)=P$이다.

【定理 2】

P가 C의 內部에 있으면 $f(P)$는 C의 外部에 있다. 그 逆도 成立된다.

【定理 3】

모든 P에 대하여 $f(f(P))=P$

〈증명〉 $f(P)$는 $Af(P)=\frac{a^2}{AP}$인 $\overrightarrow{AP}$의 점이다.

따라서 $f(f(P))$는 같은 半直線의

$Af(f(P))=\frac{a^2}{Af(P)}=\frac{a^2}{a^2/AP}=AP$인 점이다.

그러므로 $f(f(P))=P$.

【定理 4】

L가 A를 지나는 직선이면
$f(L-A)=L-A$

여기서 $f(L-A)$는 P∈L−A에 대하여 $f(P)$의 集合을 의미한다. 一般으로 R⊂E—A이면

$f(K)=\{P'=f(P)\,|\,P\in K\}$

이제 直角좌표와 極좌표를 A를 原點으로 하여 사용하려한다.

極좌표의 長點은 反轉을 간단히 나타낼 수 있다는 것이다.

즉 f : E−A⇆E−A

$f:(r,\theta)\leftrightarrows(s,\theta)$ 여기서 $s=\frac{a^2}{r}$

直角좌표에서는 $P=(x,y)=(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$

$f(P)=(u,v)=(s\cos\theta,\ s\sin\theta)$

한편 $s^2=u^2+v^2$, $r^2=x^2+y^2$

【定理 5】

K가 E−A의 한 直線이면 $f(K)$는 punctured circle이다.

〈증명〉 K를 $x=b\,(b>0)$라 하자.

즉 極方程式은 $r\cos\theta=b\ (b>0)$

이제 $r=\frac{a^2}{s}$이라 놓으면 $f(K)$는 $\frac{a^2}{s}\cos\theta=b$ $(s\neq0)$인 graph이다. 이것은 $s^2=\frac{a^2}{b}s\cos\theta$이므로 $u^2-\frac{a^2}{b}u+v^2=0\ (u^2+v^2\neq0)$이다.

따라서 $f(K)$는 中心 $(a^2/2b,\ 0)$ 半徑이 $a^2/2b$인 punctured circle이다.

한편 모든 punctured circle L는 어떤 직선 K에 대하여 $f(K)$와 같기 때문에 $f(L)=f(f(K))=K$ 따라서 다음 정리를 얻는다.

【定理 6】

L이 punctured circle이면 $f(L)$은 E−A의한 직선이다.

결국 f에서 punctured line은 punctured line로 옮겨가고 직선은 punctured circle로 옮겨가며 逆도 成立된다.

【定理 7】

M가 E−A의 한 circle이면 $f(M)$은 E−A의 한 circle이다.

〈증명〉 M는 $x^2+y^2+Ax+By+C=0\ (C\neq0)$인 圓이다.

즉 $r^2+Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C=0$

그런데 $r=\frac{a^4}{s^2}$라 놓으면 $f(M)$은 다음의 方程式의 Graph이다.

즉 $\frac{a^4}{s^2}+A\cdot\frac{a^2}{s}\cos\theta+B\cdot\frac{a^2}{s}\sin\theta+C=0$

$\therefore\ a^4+Aa^2s\cos\theta+Ba^2s\sin\theta+C\cdot s^2=0$

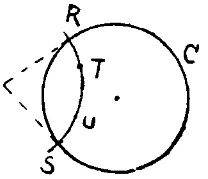
$a^4+Aa^2u+Ba^2v+C(u^2+v^2)=0$

결국 $u^2+v^2+\frac{Aa^2}{c}u+\frac{Ba^2}{c}v+\frac{a^2}{c}=0$

따라서 $f(M)$은 한 circle이고 punctured가 아니다. 왜냐하면 $a^2/c\neq0$이기 때문이다.

4.3 Preservation of the cross ratio under inversions

Poincare model 에서의 거리의 정의를 다시 생각하자.



$$d(\mathrm{T,U})=\left|\log\frac{\mathrm{TR/TS}}{\mathrm{UR/US}}\right|$$

그런데 4點 R,S,T,U의 複比는 (R,S,T,U)로 나타내고 $(\mathrm{R,S,T,U})=\dfrac{\mathrm{TR/TS}}{\mathrm{UR/UR}}$이다. 一般으로 $(\mathrm{P_1,P_2,P_3,P_4})=\dfrac{\mathrm{P_1P_3/P_2P_3}}{\mathrm{P_1P_4/P_2P_4}}$

다음 定理는 punctured plane E−A의 點 A를 中心으로 하는 원에 關한 inversion을 f라 하면 f는 복비를 보존한다는 것을 나타낸다.

定理 1】
$\mathrm{P}_i'=f(\mathrm{P}_i)$이면
$(\mathrm{P_1, P_2, P_3, P_4})\doteq(\mathrm{P_1', P_2', P_3', P_4'})$

〈증명〉 P_i의 極座標를 (r_i, θ_i)라 하면

$$\mathrm{P}_i\mathrm{P}_j{}^2=r_j{}^2+r_i{}^2-2r_ir_j\cos(\theta_i-\theta_j)$$

그런데 $\mathrm{P}_i'=(\mathrm{S}_i, \theta_i)=(\dfrac{a^2}{r_i}, \theta_i)$이므로 따라서

$$(\mathrm{P_1, P_2, P_3, P_4})^2=\frac{[r_1{}^2+r_3{}^2-2r_1r_3\cos(\theta_1-\theta_3)]}{[r_1{}^2+r_4{}^2-2r_1r_4\cos(\theta^1+\theta_4)]}\times\frac{[r_2{}^2+r_4{}^2-2r_2r_4\cos(\theta_2-\theta_4)]}{[r_2{}^2+r_3{}^2-2r_2r_3\cos(\theta_2-\theta_3)]}$$

한편 $(\mathrm{P_1', P_2', P_3', P_4'})^2$

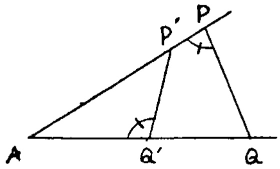
$$=\frac{[\frac{a^4}{r_1{}^2}+\frac{a^4}{r_3{}^2}-2\frac{a^4}{r_1r_3}\cos(\theta_1-\theta_3)]}{[\frac{a^4}{r_1{}^2}+\frac{a^4}{r_4{}^2}-2\frac{a^4}{r_1r_3}\cos(\theta_1-\theta_4)]}\times\frac{[\frac{a^4}{r_2{}^2}+\frac{a^4}{r_4{}^2}-2\frac{a^4}{r_2r_4}\cos(\theta_2-\theta_4)]}{[\frac{a^4}{r_2{}^2}+\frac{a^4}{r_3{}^2}-2\frac{a^4}{r_2r_3}\cos(\theta_2-\theta_4)]}$$

여기에서 分母, 分子에 $\dfrac{r_1{}^2r_2{}^2r_3{}^2r_4{}^2}{a^4}$을 곱하면 첫째번 분수식으로 된다.

4.4 Preservation of augular measure under inversions

§2.2에서 角의 像은 反轉下에서 반드시 角은 아님을 나타낸다. 즉 E−A의 모든 角은 적어도 한邊이 non punctured line이 되어야 하고 또 non punctured line의 像은 항상 punctured circle이다.

【定理 1】
A,P,Q가 共線이 아니고 $\mathrm{P}'=f(\mathrm{P})$
$\mathrm{Q}'=f(\mathrm{Q})$이면 $m\angle\mathrm{APQ}=m\angle\mathrm{AQ'P'}$



〈증명〉 $\triangle\mathrm{PAQ}$와 $\triangle\mathrm{Q'AP}$를 생각하자.

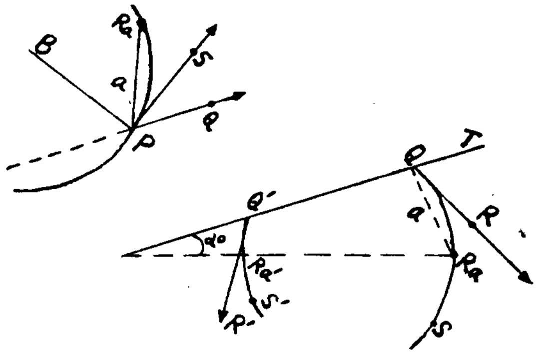
$\angle\mathrm{A}$는 共通이고 $\mathrm{AP'}=\dfrac{a^2}{\mathrm{AP}}$, $\mathrm{AQ'}=\dfrac{a^2}{\mathrm{AQ}}$

이므로 $\mathrm{AP\cdot AP'=AQ\cdot AQ'}=a^2$. 따라서

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AQ'}}=\frac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP'}}$$

그러므로 SAS相似定理에 依하여 $\triangle\mathrm{PAQ}\sim\triangle\mathrm{Q'AP'}$ 즉 $\angle\mathrm{APQ}$와 $\angle\mathrm{AQ'P'}$는 對應角이고 서로 같다.

아래 그림에서 $\lim\limits_{a\to0} m\angle\mathrm{R}_a\mathrm{PQ}=m\angle\mathrm{SPQ}$ 임을 들고 다음 것을 생각하자.



$\widehat{\mathrm{Q'S'}}$를 $\widehat{\mathrm{QS}}$의 像이라하자. 즉 $\widehat{\mathrm{Q'S'}}=f(\widehat{\mathrm{QS}})$

또 $\overrightarrow{\mathrm{Q'R'}}$를 Q'에서의 接線이라하자.

그러면 $\angle\mathrm{AQ'R'}\cong\angle\mathrm{TQR}$이라 할 수 있다.

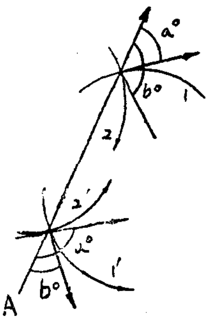
이것을 증명하기 위하여 $m\angle\mathrm{TQR}_a$과 $m\angle\mathrm{AQ'R}_a'$는 定理 1에서 생각한바 있는 것이

라는 것에 주목하면 $\lim_{\alpha\to 0}[m\angle TQR_\alpha - m\angle AQ'R_\alpha']$
$= m\angle TQR - m\angle AQ'R'$

$\therefore\ m\angle TQR = m\angle AQ'R'$

一般으로 두 개의 만나는 圓에 대하여도 마찬가지 임을 다음 그림에서 알 수 있다.

결국 다음 정리를 얻을 수 있다.



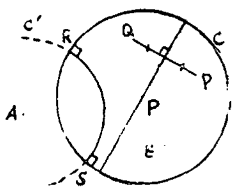
【定理 2】

反轉下에서 對應하는 接線角은 合同이다.

즉 $\widehat{AB}$와 $\widehat{AC}$가 크기 r인 접선각을 가지는 弧이면 $f(\widehat{AB})$와 $f(\widehat{AC})$도 크기 r인 접선각을 가진다. 같은 방법으로 弧와 線分 또는 線分과 線分에서도 마찬가지다.

4.5 Reflections across L-lines in the Poincaré model

L가 中心을 지나지 않는 직선인 경우는 Q와 $f(Q)$가 L에 關한 refleection of E across L이라 치은 E의 C'에 關한 反轉이다.



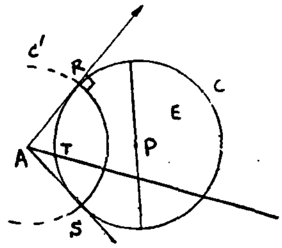
지금 f가 C'에 關한 反轉이면 $f(E)=E$ 임을 생각하기 위하여 다음 몇 가지 定理를 생각하자.

【定理 1】

$f(C)=C$

〈증명〉 $f(C)$는 圓이다. 이 圓은 R과 S에서 만난다.

이유는 $f(R)=R$, $f(S)=S$이기 때문이다.



그런데 前節의 定理 2에 依하여 $f(C)$와 C'는 직교한다. 그러나 C'와 R, S에서 직교하는 圓은 C밖에 없다. 따라서 $f(C')=C$

【定理 2】

$f(E)=E$

〈증명〉 X를 E의 任意點이라 하자.

그러면 $\overrightarrow{AX}$는 T와 U에서 C와 만난다. 그런데 $f(C)=C$이므로 $U=f(T)$, $T=(fU)$ 그러나 反轉은 A에서 出發하는 半直線에서 betweennes를 保存한다.

따라서 $f(\overline{TU})=\overline{TU}$이고 $f(x)\in E$ 결국 $f(E)\subset E$ 逆으로 $E\subset f(E)$를 밝히기 위하여 $f(E)\subset E$에서 $f(f(E))\subset f(E)$ 그런데 $f(f(E))=E$이므로 $E\subset f(E)$ 결국 $f(E)=E$

【定理 3】

M가 L-line이면 $f(M)$도 역시 L-line이다.

〈증명〉 M는 $E\cap D$이다. 여기서 D는 C와 直交하는 圓이거나 혹은 C와 直交하는 직선이다. 지금 $f(D)$는 C와 直交하는 직선이거나 圓이다. D'를 對應하는 完全한 直線 또는 圓이라 하자. $D'=f(D)$ or $D'=f(D)\cup A$ 그러면 $f(M)=f(D)\cap E=D'\cap E$ 따라서 $f(M)$도 한 L-line이다.

以上의 定理에서 다음 定理를 요약할 수 있다.

【定理 4】

f를 L-line에 依한 E의 reflection이라 하자. 그러면

(1) f는 1對1 對應 $E\leftrightarrow E$이다.

(2) f는 點 사이의 non-Euclidean distance를 不變케 한다.

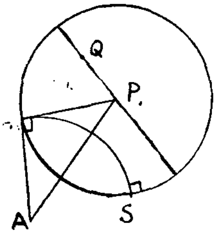
(3) f는 L-lines을 不變케 한다.

(4) f는 L-angles를 不變케 한다.

4.6 Uniqueness of the L-line through two points

P를 圓 C의 中心이라 하고 Q를 E의 다른 한

點이라 하면 P와 Q는 오직 한 직선 위에 있다. [Euclidean place에서의 straight line P는 제二種의 L-line 위에 있을 수 없다. 왜냐하면 △ARP는 直角 三角形이고 AP가 빗변이므로 $\overline{AP}$가 제일 길기 때문이다.]



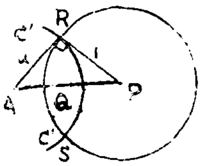
즉 E의 두 점을 지나는 직선은 그 中 한 點이 中心 P인 경우에는 唯一함이 分明하다. 그러나 항상 唯一함을 證明하기 위하여 먼저 다음 定理를 생각하자.

[定理 1]

E의 各 點 Q에 對하여 $f(Q)=P$가 되는 reflection f가 있다.

〈증명〉 c'에 關한 反轉 f가 $f(Q)=P$ 되도록 한다면 $AP=\frac{a^2}{AQ}$이 된다.

편의상 $PR=1$이라 하고 $QP=k$라 놓으면



$AP=x$라 할 때 等式 $AP\cdot AQ=a^2$에 의하여

$$x(x-k)=x^2-1$$

즉 $x=\frac{1}{k}$

그런데 Q는 E안에 있으므로 $k<1$임을 알 수 있다. 따라서 $k>1$이고 A는 C의 外部에 있다.

즉 C'는 A를 中心으로 하고 C와 直交하는 圓이라고 하면 $E\cap C'$에 關한 reflection이 바로 求하는 것이다.

[定理 2]

Poincaré Model에서 모든 두 點은 꼭 하나의 L-line 위에 있다.

〈증명〉 Q와 R를 E의 點이라고 하고 f를 $f(Q)=P, f(R)=R'$되는 reflection이라 하자 그러면 P와 R'는 L-line L위에 있다.

따라서 Q와 R는 L-line $f(L)$위에 있다.

만일 Q와 R를 지나는 두 개의 L-line L_1, L_2가 있다고 하면 $f(L_1)$과 $f(L_2)$는 P와 R'를 포함하는 서로 다른 L-line이 된다. 이것은 不可能하다.

5. 結 論

以上에서 絕對幾何와 雙曲的幾何및 Poincaré Model을 取扱하였는데 앞으로 Riemann 幾何에 對한 指導問題도 생각할 必要가 있으며 非유그리트 幾何의 歷史的인 發展도 紹介될 필요가 있다. 以上의 內容을 實際 指導함에 있어 用語上의 문제를 비롯하여 많은 難點도 있을 것이며 特히 練習問題와 아울러 補充할 內容도 있게 될 것이다

요컨데 지금까지의 敎育課程中에 실리지않은 分野인 만큼 實驗段階가 必要하며 얼마만큼 學生에게 理解시킬수 있고 얼만만큼 敎育的으로 도움이 되느냐하는 문제는 아직 未知數다.

本 論文은 단지 하나의 試案으로서 提示할뿐 이러 敎師들의 비판을 받아야 할 것이다.

外國에서는 이에 對한 指導硏究가 많은데, 우리나라에서도 많은 硏究가 있기를 바란다.

References

1. Edwin E. Moise; Elementary Geometry from an Advanced Stand Point. Reading Mass.; Addison-Wesley Inc. 1963
2. Wesley W. Maiers; "Introduction to Non-Euclidean Geometry." The Mathematics Teacher, LVII (Nov. 1964) Wahsington; N.C.T.M.
3. L.O. Kattsoff; "Problems in presenting Non-Euclidean Geometry to High School teachers." The Mathematics Teacher, LIII (Nov. 1960) Washington; N.C.T.M.
4. John Wesley Yong; Lectures on Fundamental concepts of Algebra and Geometry, 1911
5. W.W. Sawyer; Prelude to Mathematics, Harmondsworch, Middlesex, Penguin Books Ltd, 1943.
6. Kenneth B. Henderson et al; Modern Geometry its structure and function, New York; McGraw-Hill 1962.

7. D.M.Y. Sommerville: Elements of Non-Euclidean, Geometry, New York; Dover publications, Inc. 1945.
8. 橫地淸外; 科學化를 [illegible] 數學教育, 東京, 誠文堂 新光社 1964.
9. 李星憲; 世界 數學史, 서울; 教學社 1961.
10. 遠山啓; 數學 教育辭典, 東京; 共立社 1964.

Summary

In accordance with the tendency of Modern Mathematics laying emphasis on Mathematical structure, that is, on axioms, it is necessary for students to be interested in structure of Geometry on Mathematics Education.

In fact, it is of importance not only to obtain new ideas but also to forget old ones in the development of Mathematics.

Most students do not understand the Mathematical significance of axioms, and do not know what Mathemetical truth is.

Now Non-Euclidean Geometry offers opportunity to understand the essence of Mathematics better, and is no less effective than Euclidean Geometry in training student in logical inference.

This thesis is a study with regard to what should be taught and how student should be guided at High school Mathematics.

Chiefly Hyperbolic Geometry is discussed in connection with Abosolute Geometry.

As Non-Euclidean Geometry has not appeared in our curriculum, some experiments are required before putting it into actual curriculum to find out how much students understand and how much pedagogically useful it can be.

This is only a presentation of a tentative plan, which needs to be criticized by many teachers.

(弘益大學)

第3回 「大學入試 數學問題 懇談會」 開催 案內

本會는 大學入試 問題의 檢討와 高校의 數學教育과의 關聯에 對하여도 硏究를 推進할 것이며, 下記의 要領으로 大學의 出題委員을 招請하여 採點後의 感想, 高校數學에의 希望等의 意見을 中心으로 여러분의 大學出題에 對한 要望等 廣範圍한 問題를 놓고 懇談會를 開催할 豫定입니다. 關係會員의 多數參席으로 이 懇談會를 通하여 數學教育에 進一步 있도록 協調하여 주시옵기 仰望합니다.

1. **日 時** 1966年 3月 中旬 下午 1時
2. **場 所** 서울大學校 師範大學 小講堂
3. **參加會費** 100원: 當日 受付에 納付 但 本會會員은 無料
   參加者에게는 高大·서울大·延大·梨花女大·서울教育大 數學問題를 配付
4. **出席하는 大學** 高大·서울大·延大·梨花女大·서울教育大
5. **懇談會內容** ① 大學入試 數學科 問題의 出題 方針과 採點所感. 高校 數學教育에 對한 要望事項
   ② 大學入試 數學科 問題에 對한 質疑 및 出題에 對한 要望事項

備 考 本會會員이 아닌 분의 參席도 歡迎합니다.

1965年 12月 30日

韓 國 數 學 教 育 會