AAS에 의한 삼각형의 합동

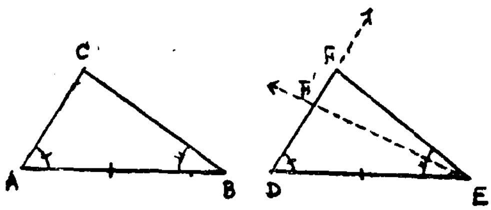
朴 漢 植

중학교 2학년에서 삼각형의 합동을 다룬다. 그런데 거기에서는 기하를 다루는 데 유크릿드의 기하의 공리계를 사용하지는 않는다. 이것은 학생들에게 이해시키기가 힘 들기 때문이다. 중학교에서 기하를 다루는 한 목적은 학생들에게 논증의 방법을 이해시키기 위해서이다. 물론 이것이 기하를 지도하는 목적의 전부는 아니다.

중학교 2학년에서 삼각형의 합동 조건을 증명하지 않고 하나의 공리처름 취급하고 출발하는 것은 위와 같은 이유에서 이다[1]. 삼각형의 합동 조건으로서 SSS합동, SAS합동, ASA합동등을 택하는데 [2], 삼각형의 육요소에서 세 요소를 택한 모아짜기에는 이 밖에도 AAS, SSA, AAA등이 있다. 이 가운데에서 AAA로서는, 곧 세 각이 같은 것으로는 두 삼각형은 합동이 되지 않는다. 이 경우는 닮은꼴이 된다. SSA의 경우는 합동이 되지 않는 경우가 생긴다[3]. 그리고 AAS의 경우는 [3]에서 보는 바와 같이 삼각형의 세 각의 합이 $2\angle R$이므로 두 각의 크기만 각 각 같으면 나머지 각의 크기는 자연히 같게 되므로 ASA의 경우와 같게 되어서 합동이 된다. 그런데 이것을 삼각형의 내각의 합이 $2\angle R$이라는 정리를 이용하지 않으면 어떻게 될까?

미국의 고등학교 실험교과서 SMSG의 기하에서는 SAS의 합동을 공리로 취급하고 ASA, SSS의 합동을 정리로서 증명하고있다[4]. 이 방법을 개설하면 다음과 같다.

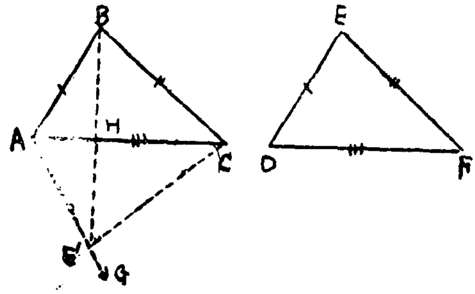
정리 6—3 (ASA 정리)[5]. 두 삼각형의 대응하는 두 각과 끼인변이 각각 같으면 두 삼각형은 합동이다.



〔증명〕*: 1. $DF'=AC$인 점 F'가 반직신 DF 상에 있다.

2. $AB=DE$, $\angle A=\angle D$
3. $\angle ABC\equiv\triangle DEF'$ ($\because$ SAS 공리)
4. $\angle ABC=\angle DEF'$
5. $\angle DEF'=\angle DEF$
6. EF와 EF'는 동일한 반직선이다.
7. $F=F'$
8. $\triangle ABC\equiv\triangle DEF$ (증명 끝)

정리 6—5 (SSS 정리)[6]. 두 삼각형의 대응하는 세 변에 각각 같으면 두 삼각형은 합동이다.



〔증명〕: 1. $\angle CAG=\angle EDF$이고 B와 G가 AC의 반대편에 있는 반직선 AG가 있다.

2. $AE'=DE$인 점 E'가 AG상에 있다.
3. $\triangle ACE'\equiv\triangle DFE$ ($\because$ SAS 공리)
4. $AB=AE'$

---

* SMSG에서 사용하는 기호가 현행 우리나라의 것과 차이가 있으므로 여기에서는 우리나라 현행 기호로 고쳐서 쓴다.

5. $BC = E'C$
6. 선분 BE' 는 AC 와 점 H 에서 만난다.
7. $\angle ABH = \angle AE'H$
8. $\angle CBH = \angle CE'H$
9. H 는 $\angle ABC$ 의 내부에 있다.
10. $\angle ABH + \angle CBH = \angle ABC$
11. H 는 $\angle AE'C$ 의 내부에 있다.
12. $\angle AE'H + \angle CE'H = \angle AE'C$
13. $\angle ABC = \angle AE'C$
14. $\angle ABC = \angle DEF$
15. $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$

【주】 SMSG 에서는 계속해서 $\angle A$ 와 $\angle D$ 가 각각 둔각인 경우에 대한 설명이 보충되어 있다.

여기서 AAS 의 경우를 증명해보자. (물론 삼각형의 내각의 합이 $2\angle R$ 이라는 정리는 이용하지 않는다). 이것에 대해서 D. Ryoti 의 재미나는 보고가 있다[7]. 이것을 소개하면 다음과 같다.

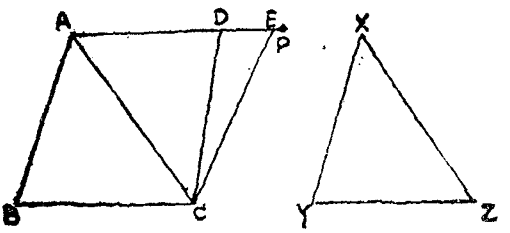
SAS, ASA 와 SSS 의 정리를 지도한 뒤에 AAS 에 대한 증명을 요구하였더니 다음의 첫째 증명과 같은 증명을 학생이 해 왔다.

그런데 일반적으로 ASA 의 증명과 비슷한 방법으로 두째 증명법으로 하는 것이 보통이다.

[첫째 증명]

가정 : $\angle CAB = \angle ZXY$
$\angle ABC = \angle XYZ$
$AC = XZ$

결론 : $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$



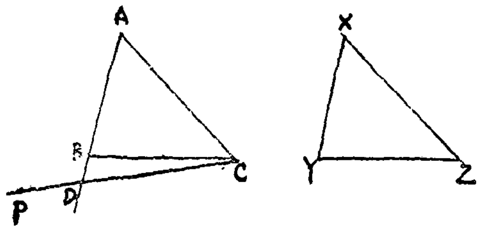
〔증명〕: 1. AC 의 B 와 반대편이 점 P 가 있어서 $\angle PAC = \angle ZXY$ 되게 하는 반직선 AP 가 있다.

2. $AD = XY$ 인 점 D 가 반직선 AP 상에 존재한다.
3. $\triangle ADC \equiv \triangle XYZ$ ($\because$ SAS 합동 정리)
4. 그러므로 $\angle ADC = \angle XYZ$
5. $AE \approx AD$ 인 점 E 가 반직선 AP 상에 있다. (D 와 E 가 같은 점임을 보일 것이다).
6. $\triangle AEC \equiv \triangle ABC$ ($\therefore$ SAS 합동 정리)
7. $\therefore \angle AEC = \angle ABC$
8. 가정에서 $\angle ABC = \angle XYZ$
4, 7 에서 $\angle ADC = \angle AEC$
9. 삼각형의 외각이 이웃하지 않는 어느 내각보다도 크므로 이것은 모순이다. 따라서 D 와 E 는 일치한다.
10. 3, 6 에서 $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$

[두째 증명]

가정 : $\angle CAB = \angle ZXY$
$\angle ABC = \angle XYZ$
$AC = XZ$

결론 : $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$



〔증명〕: 1. AC 에 대해서 B 와 같은 편에 있는 점 P 로서 $\angle ACP = \angle XZY$ 인 반직선 CP 가 있다.

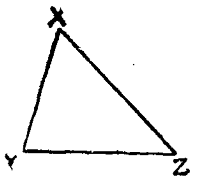
반직선 CP 와 AB 와의 교점을 D 라고 하자(다음의 보조정리를 보면 교점의 존재를 알 수 있다.) (D 와 B 가 같은 점임을 보일 것이다)

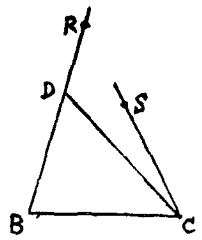
2. $\triangle ADC \equiv \triangle XYZ$ ($\therefore$ ASA 합동)
3. 그러므로 $\angle ADC = \angle XYZ$
4. 가정에서 $\angle ABC = XYZ$
5. 그래서 $\angle ADC = \angle ABC$
6. 삼각형의 외각이 이웃하지 않는 어느 내각보다 크므로 이것은 모순이다. 따라서 B 와

D는 일치한다.

7. 2에서 $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$

보조정리 $\triangle XYZ$가 주어지고 $\angle Y = RBC$, $YZ = BC$, $\angle Z = BCS$, R와 S가 BC의 같은 편에 있으면 반직선 BR와 CS는 만난다.





[증명]: 1. $XY = DB$인 점 D가 BR 상에 있다.

2. $\triangle XYZ \equiv \triangle DBC$ ($\because$ SAS 합동)

3. $\therefore \angle YZX = \angle BCD$

4. 가정에서 $\angle YZX = \angle BCS$

5. 그러므로 $\angle BCD = \angle BCS$

6. 여기서 반직선 CD와 CS는 같으므로 반직선 CS와 BR는 (점 D에서)만난다.

(서울大學校 師範大學)

참 고

[1] 박한식 : 중학교 수학 2. (서울 영지문화사. 1966) p. 121~p. 127, p. 150.

[2] Ibid, p. 122

[3] Ibid, p. 124 연구

[4] S. M. S. G : *Mathematics for high school, Geometry* (*Part* 1) (Yale University, U.S.A., 1959) p. 142~p. 165

[5] Ibid, p. 158~p. 159

[6] Ibid, p. 165

[7] Don Ryoti : "Congruency of Triangles by AAS" *The Mathematics Teacher* Vol. LIX No. 3. (1966) N.C.T.M. p. 246~p. 247.