<論 說>

피 타 고 라 스 의 수

김 주 봉

직각 3각형의 세 변을 각각 a, b, c 라고 할 때 방정식

$$a^2+b^2=c^2 \qquad ①$$

은 유명한 "피타고라스의 정리"를 나타내고 있다.

지금 방정식 ①을 만족하는 a, b, c 의 정수값이 존재하고 있음은 $(3,4,5)$에서 $3^2+4^2=5^2$ 이 성립하므로 쉽게 알 수 있다. 이와같은 방정식 ①의 정수해를 "피타고라스의 수"라고 하며 이런 수들을 찾는 방법을 생각해 보자.

지금 ①의 정수해(a, b, c)가 정해졌다고 하면 (an, bn, cn)도 $(an)^2+(bn)^2=(cn)^2$ 을 만족하므로 역시 ①의 정수해가 될 것이다. 예를들면 $(3,4,5)$의 각 수를 2배한 $(6,8,10)$은 $6^2+8^2=10^2$ 이 성립하므로 이 수들도 방정식 ①의 정수해가 되며 $(3n, 4n, 5n)$으로 표시되는 모든 수는 "피타고라스의 수"가 되어, 이것을 구한다는 것은 흥미있는 일이 아니므로 그 중에서 "기본해"를 구하려는 것이다. 여기서 "기본해"라 함은 $(3,4,5)$와 같이 (a, b, c) 세 수사이에 공약수를 갖지 않는 것을 의미한다. 그런데 재미있는 사실은 (a, b, c)가 방정식 ①의 기본해라고 하면,

i) (a, b, c)의 어느 두 수도 서로 소이다.

왜냐하면 a와 b가 서로 소가 아니고 공약수 t를 갖는다고 하면

$$a=ta_1, \quad b=tb_1$$

로 표시되며, 이것을 ①에 대입하면

$$(ta_1)^2+(tb_1)^2=c^2$$

곧 $t^2(a_1{}^2+b_1{}^2)=c^2$.

이것은 c^2 은 t^2 으로 나누어짐을 말하며 c는 t를 약수로 가지므로 (a, b, c)는 공약수 t를 갖고 있으므로 기본해라는 가정에 어긋난다.

따라서 a와 b는 서로 소이다.

마찬가지로하여 b와 c, c와 a도 서로 소임을 밝힐 수 있다.

위의 사실에서 (a, b, c)의 어느 두 수가 동시에 짝수가 될 수 없음을 알게 된다. 그러므로 만일 있다고 하면 짝수는 하나에 한한다.

ii) (a, b, c)중 홀수는 두 개인 데 그 중 하나는 항상 c이다.

왜냐하면 a와 b가 동시에 홀수라고 하면 $a=2l+1$, $b=2m+1$로 쓸 수 있고, 이것을 ①에 대입하면

$$c^2=a^2+b^2=4(l^2+m^2+l+m)+2$$

가 되고 이것은 c가 짝수가 됨을 의미한다.

따라서 (a, b, c)세 수는 동시에 홀수일 수는 없다.

그런데 a와 b가 홀수이고, c가 짝수라고 하면 c^2은 4의 배수가 되어야 하는 데, 윗 식은 c^2을 4로 나누면 2가 남는다는 것을 가르키고 있다. 이것은 모순이다.

따라서 c는 짝수가 될 수 없다.

이로서 (a, b, c)중 c는 항상 홀수이며 a와 b의 어느 하나는 짝수가 되겠다.

지금 a, b중 홀수를 a, 짝수를 b로 정한다고 하면 앞의 $(3,4,5)$에서 $a=3$, $b=4$, $c=5$가 된다.

다음에 방정식 ①을

$$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a) \qquad ②$$

와 같이 변형하면, $c+a$와 $c-a$는 두 홀수의 합과 차로서 어느 것이나 짝수이므로 $\dfrac{a+c}{2}$, $\dfrac{c-a}{2}$는 모두 정수이며 동시에 서로 소인 두 수가 된다.

왜냐하면 공약수 t를 갖는다고 하면

$$\frac{a+c}{2}=tf, \quad \frac{c-a}{2}=tg$$

로 쓸 수 있으므로

$$\frac{c+a}{2}+\frac{c-a}{2}=c, \quad \frac{c+a}{2}-\frac{c-a}{2}=a$$

에서 $c=t(f+g)$, $a=t(f-g)$로서 a와 c는 공약수 t를 갖게되므로 a와 c가 서로 소이라는 가정에 모순된다. 따라서

$\frac{c+a}{2}$와 $\frac{c-a}{2}$는 서로 소이다.

지금 ②식의 양변을 4로 나누면

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2} \qquad ③$$

이 되고 b, $c+a$, $c-a$는 모두 짝수이므로 ③식의 양변은 모두 정수가 된다. 이것은 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$인 제곱수가 서로 소인 두 인수 $\frac{c+a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$의 곱으로 나타 내어 짐을 의미한다. 그런데

$$\frac{b}{2}=p^{\alpha}\cdot q^{\beta}\cdot r^{\gamma}\cdots$$

로 소인수분해 된다고 하면

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=p^{2\alpha}\cdot q^{2\beta}\cdot r^{2\gamma}\cdots=\frac{c+a}{2}\cdot\frac{c-a}{2}$$

이므로 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$의 소인수는 $\frac{c+a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$의 어느 쪽에든지 나누어 들어 있어야 하며, 또한 $\frac{c+a}{2}$와 $\frac{c-a}{2}$는 서로 소이므로 $p^{2\alpha}$은 $\frac{c+a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$의 어느 한쪽에만 포함되어야 한다. 마찬가지로 $q^{2\beta}$, $r^{2\gamma}$, …도 모두 어느 한쪽에만 속하게 된다. 이로부터

$$\frac{c+a}{2}=m^2, \quad \frac{c-a}{2}=n^2 \qquad ④$$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2=m^2n^2 \qquad ⑤$$

로 바꾸어 쓸 수 있다. 이때 m^2, n^2은 서로 소이므로 m과 n도 역시 서로 소인 두 수이겠다.

①에서 $\quad b=2mn \qquad ⑥$

④에서 $\quad c=m^2+n^2$

$\qquad a=m^2-n^2 \qquad ⑦$

이 얻어지며 c와 a는 홀수이므로 m^2과 n^2중의 어느 하나는 짝수이고 다른 하나는 홀수이다.

따라서 m과 n도 그 하나는 짝수이고, 다른 하나는 홀수가 되겠다.

왜냐하면 m과 n이 동시에 짝수이거나 홀수라고 하면 m^2과 n^2의 합과 차는 동시에 짝수가 되기 때문이다. (이 후에는 하나가 홀수이고, 다른 하나가 짝수인 두 수를 "홀짝인 두 수"라고 부르자.)

위에서 방정식 ①의 기본해 (a,b,c)는 서로 소이고 또 홀짝인 두 수 m,n을 사용하여 ⑥과 ⑦의 형태로 쓸 수 있음을 알게 되었다.

예를 들면 $a=3$, $b=4$, $c=5$에서

$$m^2=\frac{5+3}{2}=4, \quad n^2=\frac{5-3}{2}=1$$

$\therefore\ m=2,\ n=1$

$\therefore\ b^2=4=2\cdot 2\cdot 1=2mn$

으로 된다.

앞에서는 방정식 ①의 기본해 (a,b,c)에서 출발하여 m과 n을 정하는 과정이었다. 다음엔 그 역으로 서로소이며 홀짝인 두 수 m과 n $(m>n)$에서 ⑥, ⑦에 의하여 세 수 (a,b,c)를 만들었을 때, 이 세 수가 방정식 ①의 기본해가 된다는 것을 증명하자. 곧

$$(m^2-n^2)^2+(2mn)^2=(m^2+n^2)^2$$

이 성립하므로 ①이 만족한다.

또 m,n은 서로 홀짝인 두 수이므로 (a,b,c)는 2를 공약수로 갖지 않는다. 뿐만아니라 이들 수는 홀수인 공약수를 가질 수 없다. 왜냐하면 만일 홀수인 공약수를 갖는다고 하면 홀수인 소수 (2를 제외한 소수)를 공약수로 갖게 되므로

$c=pc_1$, $a=pa_1$으로

④에서 $2m^2=a+c=p(a_1+c_1)$

$\qquad 2n^2=c-a=p(c_1-a_1)$

이 되어 $2m^2$과 $2n^2$은 p를 약수로 갖게되고, 또 $p\neq 2$이므로 m^2과 n^2은 p로 나누어 진다. 이것은 m과 n이 서로 소라는 가정에 모순되므로 (a,b,c)는 홀수인 공약수를 갖지 않는다.

따라서 (a,b,c)는 방정식 ①이 기본해이다.

지금 ⑥, ⑦을 이용하여 몇 개의 "피타고라스의 수"를 만들면 다음과 같다.

$m=2$, $n=1$ (3, 4, 5)

$m=3$, $n=2$ (5, 12, 13)

$m=4$, $n=1$ (15, 8, 17)

$m=4$, $n=3$ (7, 24, 25)

n 변 m	1			2			3			4			5			6		
	b	a	c	b	a	c	b	a	c	b	a	c	b	a	c	b	a	c
2	*4	3	5															
3	6	8	10	*12	5	13												
4	*8	15	17	16	12	20	*24	7	25									
5	10	24	26	*20	21	29	30	16	34	*40	9	41						
6	*12	35	37	24	32	40	〔36	27	45〕	48	20	52	*60	11	61			
7	14	48	50	*28	45	53	42	40	58	*56	33	65	70	24	74	*84	13	85
8	*16	63	65	32	60	68	*48	55	73	64	48	80	*80	39	89	96	28	100
9	18	80	82	*36	77	85	54	72	90	*72	65	97	90	56	106	〔108	45	117〕
10	*20	99	101	40	96	104	*60	91	109	80	84	116	〔*100	75	125〕	120	64	136

$m=5,\ n=2$ (21, 20, 29)

$m=5,\ n=4$ (9, 40, 41)

....

다음엔 m 과 n 의 복잡한 조건들을 붙이지 않고 $m>n$ 인 모든 자연수에 대하여 표를 만들면 위의 표와 같다.

위 표를 살펴보면 $(2mn,\ m^2-n^2,\ m^2+n^2)$에 의하여 수많은 파타고라스의 수를 얻을 수 있다. 특히 표에 *표를 한 것이 기본해임을 알 수 있고, 그 배열을 보면 무엇인가 일정한 규칙으로 되어 있는 것을 발견하게 되며, 〔 〕로 표시한 것처럼 기본해가 아닌것이 있다. 물론 이것은 3과 6과 같이 서로 소인 두 수가 아니므로 기본해가 아닌 것은 명백하다.

지금 이 표를 이용하여 새로운 기본해를 구하는 식을 만들어 보자.

(1) 제 1열에서 *표를 골라보면

4, 8, 12, 16, 20, …, $(4n)$

3, 15, 35, 63, 99, …, $(4n^2-1)$

5, 17, 37, 65, 101, …, $(4n^2+1)$

(2) 제 2열에서

12, 20, 28, 16, …, $4(2n+1)$

5, 21, 45, 77, …4; $n(n+1)-3$

13, 29, 53, 85, …, $4n(n+1)+5$

(3) 각열의 가장 위의 것에서

4, 12, 24, 40, 60, …, $2n(n+1)$

3, 5, 7, 9, 11, …, $2n+1$

5, 13, 25, 41, 61, …, $2n(n+1)+1$

....

$(4n,\ 4n^2-1,\ 4n^2+1)$,

$(4(2n+1),\ 4n(n+1)-3,\ 4n(n+1)+5)$,

$(2n(n+1),\ 2n+1,\ 2n(n+1)+1)$

....

등과 같은 새로운 해의 공식을 유도해 낼 수 있다. (물론 제 3열, 제 5열, … 에서 만들어 진 것에는 기본해가 아닌 것도 어떤 규칙적으로 들어 있다). 그런데 이 공식들은 한 개의 수만을 대입하여 구할 수 있는 장점을 갖고 있으나, 모두가 어떤 일정한 조건만을 나타내는 것으로 (예를 들면 (1)은 빗변과 홀수변과의 차가 2인 것, (2)는 빗변과 홀수변과의 차가 8인것, (3)은 빗변과 짝수변과의 차가 1인 것 등) $(m^2-n^2, 2mn, m^2+n^2)$에 포함되어 있는 것 뿐이다.

이밖에도 이 표를 잘 살펴보면 재미있는 사실들을 알게되며 앞에서 ①의 정수해를 구한 과정에서의 조건들과 일치하고 있음을 알게 된다.

(덕수상업고등학교)