開立法에 對한 研究

金 英 植

一般的으로 開立法은 開平法 보다 훨씬 힘든 문제이다. 지금 1에서 9까지의 자연수에 대한 세제곱수를 조사하여 보면 다음과 같다.

자연수(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
세제곱수(n^3)	1	8	27	64	125	316	343	512	729

또 任意數의 세제곱근의 자리수는 그 수를 소수점을 기준으로 위로 세 자리씩 끊어 나가 생긴 마디 수와 같음은 제곱근에서의 경우와 동일한 관계로써 곧 推理된다. 보기를 들면 53 975 853 632·793 21의 세제곱근의 자리수는 53⋮975⋮853⋮632·793⋮21로 보아 소수점 위로 네자리의 수임을 알수 있다.

그러면 一般的인 境遇로써 任意數 K의 세제곱근이 소수점위 k자리의 수이며 그 값이$(a+b+c+\cdots+s)$라 할 때, 이 關係는 다음 式으로 表示할 수 있다.

即 $K=(a+b+c+d+\cdots+s)^3$ ①

단. $a=\alpha\cdot 10^{k-1}$, $b=\beta\cdot 10^{k-2}$, $c=\gamma\cdot 10^{k-3}$, $d=\delta\cdot 10^{k-4},\cdots,s=\sigma\cdot 10^{k-s}$

또 $\leqq\alpha\leqq 9$인 양의 整數이고,

$0\leqq\beta,\gamma,\delta,\cdots,\sigma\leqq 9$인 陽의 整數로 정한다.

지금 ①式의 右邊을 展開시키되 다음 要領에 依據하여 施行하면

$$
\begin{aligned}
K=&\{a^3\}+\{3a^2b+3ab^3+b^3\}\\
&+\{3a^2c+3b^2c^2+3ac^2+3bc^2+c^3+6abc\}\\
&+\{3a^2d+3b^2d+3c^2d+3ad^2+3bd^2+3cd^2+d^3\\
&\quad+6abd+6acd+6bcd\}+\cdots\cdots\\
&+\{3(a^2+b^2+c^2+\cdots\cdots+r^2)s+3(a+b+c+\cdots\\
&\quad+r)s^2+s^3+6abs+6(a+b)cs+6(a+b+c)ds\\
&\quad+\cdots\cdots+6(a+b+c+\cdots\cdots+q)rs\}\\
=&K_a+K_b+K_c+K_d+\cdots+K_s
\end{aligned}
$$

단 K_a; a만으로써 되어 있는 項

K_b; 이미 出現된 a와 b의 混成項 또는 단순히 b만으로 이루어지는 項의 합

K_c; 이미 出現된 a,b와 c의 混成項 또는 단순히 c만으로 이루어지는 項의 합

K_d; 이미 出現된 a,b,c와 d의 混成項 또는 단순히 d만으로 이루어지는 項의 합

………………………

K_s; 이미 出現된 $a,b,c,\cdots,r$와 s의 混成項 또는 단순히 s만으로 이루어지는 項의 합이다.

다음은 $K_a,K_b,K_c,K_d,\cdots,K_s$등의 상호 聯關性을 살펴 보기로 한다.

〔A〕 $K_a=a^3=a^2\cdot a=T_a\cdot a$

단 $T_a=a^2$ 임.

〔B〕
$$
\begin{aligned}
K_b&=3a^2b+3ab^2+b^3=(3a^2+3ab+b^2)b\\
&=(a^2+2a^2+3ab+b^2)b\\
&=(T_a+2a^2+3ab+b^2)b=T_b\cdot b
\end{aligned}
$$

단 $T_b=T_a+2a^2+3ab+b^2=3a^2+3ab+b^2$ 임

또 이때 $T_a+2a^2=3a^2=Q_a$로 놓으면 Q_a의 값은 〔A〕에서 이미 알려진 값 a만으로 된 값이므로 그 값은 곧 算出된다.

따라서 $K_b=T_b\cdot b=(Q_a+3ab+b^2)b$이며 이는 K_b 속에는 $T_b=Q_a+3ab+b^2$이 b個 包含되어 있음을 말하며, 이때 b의 값을 아직 모르므로 이미 알려져 있는 값 Q_a가 K_b 속에 몇 개 포함되는가로써 b의 값을 推定해야되는데 T_b 속에 算入되지 않은 값 $3ab+b^2$中에서 b^2은 Q_a에 比해서 그다지 크지 않은 값이므로 無視해도 좋으나 $3ab$는 相當한 크기의 값이므로 Q_a에 若干의 값을 加算한 값으로 보고서 b를 推定해야 한다. 따라서 $T_b\cdot b=K_b$의 값은 算出 可能하다.

〔C〕
$$
\begin{aligned}
K_c&=3a^2c+3b^2c+3ac^2+3bc^2+b^3+6abc\\
&=(3a^2+3b^2+3ac+3bc+c^2+6ab)c
\end{aligned}
$$

$=[\{3a^2+3ab+b^2\}+\{2b^2+3ab+3(a+b)c$
$+c^2\}]c$
$=[T_b+3ab+2b^2+3(a+b)c+c^2]=T_c\cdot c$
단 $T_c=T_b+3ab+2b^2+3(a+b)c+c^2$
$=3a^2+3b^2+3(a+b)c+c^2+6ab$ 임.

또 이때 $T_b+3ab+2b^2=Q_b$ 로 놓으면 Q_b 의 값은 〔A〕,〔B〕에서 이미 알려진 값 a,b 만을 가지므로 그 값을 구할 수 있다.

그러므로 $K_c=T_c\cdot c=\{Q_b+3(a+b)c+c^2\}c$ 이며 이는 K_c 속에 $T_c=Q_b+3(a+b)c+c^2$ 이 c 個 包含 됨을 말하며 이때 c 의 값이 결정되지 못했으므로 이미 알려진 값 Q_b 가 K_c 속에 몇 개 포함되는 가로써 c 의 값을 推定하는데 T_c 속에 算入되지 못한 $3(a+b)c+c^2$ 의 값은 Q_b 의 값에 比해서 相當히 작은 값이므로 c 의 推定에는 그리큰 影響을 미치지 못한다.

따라서 未算入 殘餘部分의 값 $3(a+b)c+c^2$ 과 나아가서 $T_c\cdot c=K_c$ 의 값도 算出可能하다.

〔D〕 $K_d=3(a^2+b^2+c^2)d+3(a+b+c)d^2+d^3$
$+6abd+6(a+b)cd$
$=[\{3(a^2+b^2)+3(a+b)c+c^2+6ab\}$
$+\{3(a+b)c+2c^2+3(a+b+c)d+d^2\}]d$
$=[T_c+3(a+b)c+2c^2+3(a+b+c)d+d^2]d$
$=T_d\cdot d$
단 $T_d=T_c+3(a+b)c+2c^2+3(a+b+c)d+d^2$
$=3(a^2+b^2+c^2)+3(a+b+c)d+d^2+6ab$
$+6(a+b)c$ 임

또 이때 $T_c+3(a+b)c+2c^2=Q_c$ 로 놓으면 Q_c 의 값은 〔A〕,〔B〕,〔C〕에서 구해진 a,b,c 만을 가지므로 그 값을 구할 수 있고 K_d 와 Q_c 의 값을 기초로 d 의 값을 推定해 냄은〔B〕,〔C〕에서와 同一하며 $T_d=Q_c+3(a+b+c)d+d^2$ 에서 未算入部分 $3(a+b+c)d+d^2$ 의 값은 Q_c 에 比해서 加一層 작아진 값이므로 Q_c 만을 기초로 d 를 推定하기에는 充分하다. 또 $T_d\cdot d=K_d$ 의 算出도 可能하다.

〔E〕 $K_e=3(a^2+b^2+c^2+d^2)e+3(a+b+c+d)e^2$
$+e^3+6abe+6(a+b)ce+6(a+b+c)de$
$=[\{3(a^2+b^2+c^2)+3(a+b+c)d+d^2+6ab$
$+6(a+b)c\}+\{3(a+b+c)d+2d^2+3(a+b$
$+c+d)e+e^2\}]e$
$=[T_d+3(a+b+c)d+2d^2+3(a+b+c+d)e$
$+e^2]e=T_e\cdot e$
단 $T_e=T_d+3(a+b+c)d+2d^2+3(a+b+c$
$+d)e+e^2$ 임.

또 이때 $T_d+3(a+b+c)d+d^2=Q_d$ 로 놓으면 Q_d 의 값은 〔A〕,〔B〕,〔C〕,〔D〕 등을 통해 알 수 있다. K_e 와 Q_d 로 e 를 추정하고 다시 $T_e\cdot e=K_e$ 또한 算出可能하다.

이러한 推理를 계속해 나가면

〔R〕 $K_r=[T_q+3(a+b+c+\cdots+p)q+2q^2$
$+3(a+b+c+\cdots+q)r+r^2]r$
$=[Q_q+3(a+b+c+\cdots+q)r+r^2]r=T_r\cdot r$

〔S〕 $K_s=T_r+3(a+b+c+\cdots+q)2r+r^2$
$+3(a+b+c+\cdots+r)s+s^2]s$
$=[Q_r+3(a+b+c+\cdots+r)s+s^2]\cdot s=T_s\cdot s$
로 된다.

또 마지막 단계〔S〕에서 旣知된 값 Q_r 을 K_s 와 比較시켜 s 를 추정하고 다시 $K_s=T_s\cdot s$ 도 算出할 수 있으며, 모든 세제곱근의 각 자리의 값을 결정하게 되었다.

다음에 세제곱근을 구하는 一般的 過程을 要約해 적으면,

一般的 過程

(제 1 단계). 수 K 를 소수점을 기준으로 세자리씩 끊어 나간 제일 윗 마디가 어느 자연수의 세제곱수에 초과되어 가까운가를 생각하여 세제곱근의 최고위수 a 를 정한다.
다음 $a^3=K_a$ 를 산출해서 $K-K_a=R_a$ 를 산출해 놓으며, 물론 이때에 R_a 는 위로부터 둘째마디까지만을 취급하는데 유의한다.

(제 2 단계). $3a^2=Q_a$ 를 산출하고 이를 R_a 와 比較시켜 세제곱근의 위로부터 제 2 위의 수 b 를 추리해내고 다시 $T_b\cdot b=K_b$ 의 값을 구해서 $R_a-K_b=R_b$ 를 산출한다. 물론 이때에는 위로 부터 세째마디까지 만을 취급한다.

(제 3 단계). $T_b+3ab+2b^2=Q_b$ 를 산출하고 이를 R_b 와 比較시켜 세제곱근의 위에서부터 제 3 위의 수 c 를 추리해 내고 계속해서 $T_c\cdot c=K_c$ 의 값을 구해서 $R_b-K_c=R_c$ 를 산출한다. 이때에도 R_c 는 위로부터 네째마디

까지만을 취급한다.

(제 4 단계). $T_c+3(a+b)c+2c^2=Q_c$를 산출하고 이를 R_c와 比較시켜 세제곱근의 위로부터 제 4위의 수 d를 추리해 내고 계속해서 $T_d \cdot d=K_d$의 값을 구해서 $R_c-K_d=R_d$를 산출한다. 이때에도 R_d는 위로 부터 다섯째마디까지만을 취급한다.

(제 5 단계). 위에서처럼 Q_d와 R_d에서 e를 다시 $T_e \cdot e=K_e$, $R_d-K_e=R_e$등을 구하고 계속해서 제 6 단계, 제 7 단계,……등의 과정을 시행해 나가면 우리가 구하려는 K의 세제곱근$(a+b+c+d+\cdots\cdots+s)$에 점점 가까운 값에 이르게 될 것이다.

※참고;——제 2 단계에 있어서 $3a^2$으로 b를 추정해 냄은 開平法에서 b를 추정할때를 $2a$ 기초로 하는 것에 該當한다.

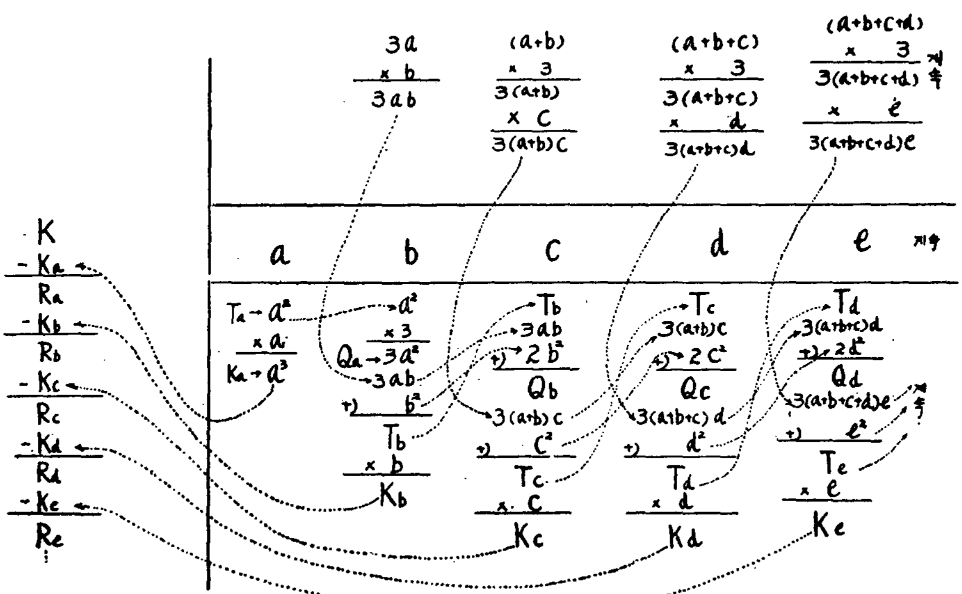
그러면 위에서 말한 바를 다음과 같은 圖式으로 나타내기로 한다.

(주의) ① 아래 圖式은 다음과 같은 部分名稱을 붙인다

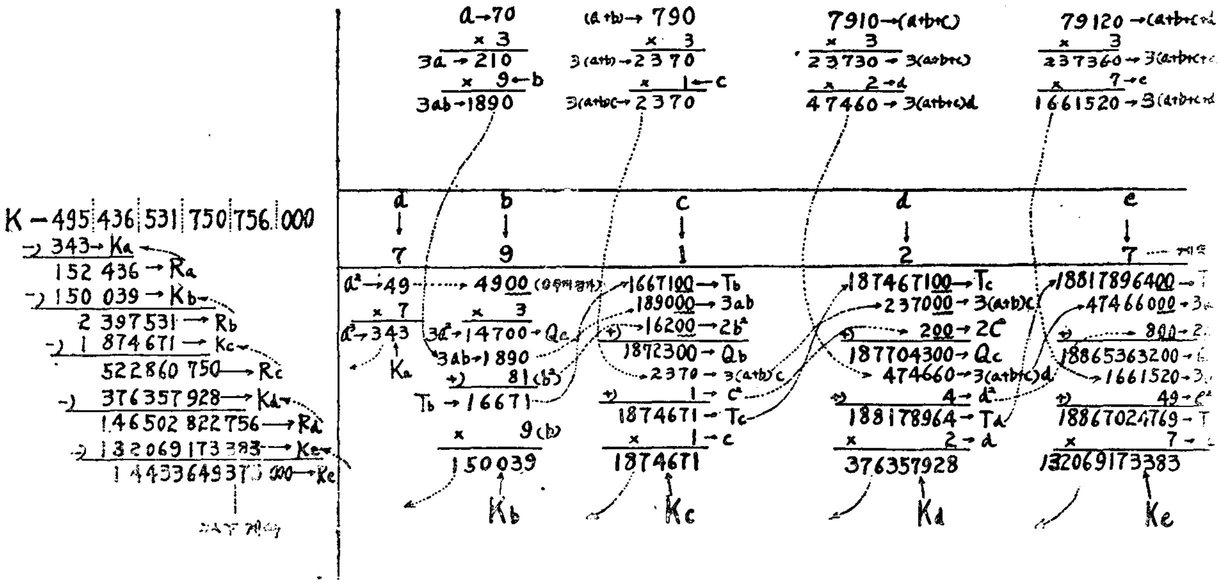
	上部～第一계산란 (보조 계산란)
側部～第三계산란 (감산란)	中央～해답란
	下部～第二계산란 (主계산란)

② 아랫자리로 移行되는 값은 아랫자리에서는 0을 2 개 添付해 주어 자리수를 맞춘다. 그 이유는 a는 b보다, b는 c보다, c는 d보다, d는 e보다 한자리씩 높은 자리의 수이므로 a^2은 b에 비해서 $T_b, 3ab, 2b^2$등은 c에 比해서 T_c, $3(a+b)c$, $2c^2$등은 d에 比해서 T_d, $3(d+b+c)d$, $2d^2$등은 e에 比해서 各各 2 자리가 높은 수이기 때문이다.

보기를 들어서 세제곱근을 구해보자.

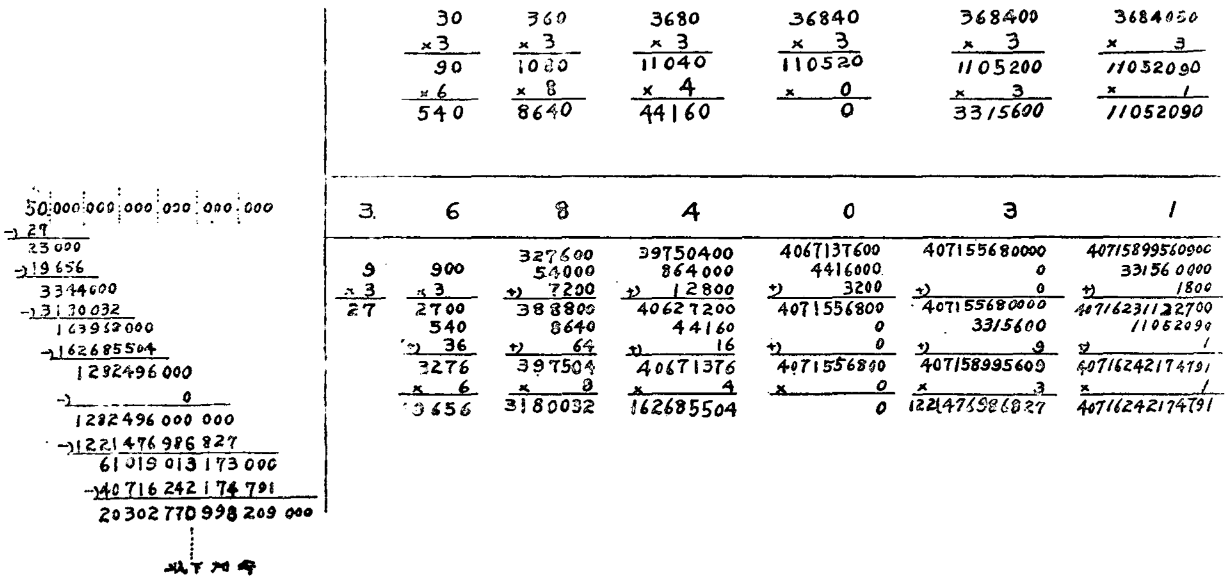


(보기 1) $\sqrt[3]{495436531750756}$ 의 값은?



답 79127……

(보기 2) $\sqrt[3]{50}$ 은? (수표에서 찾아 보면 3684031 이다)



답 3.684031 (수표와 부합된다)