

五層構造 레이저 增幅器의 過渡現象論의 解析

(Transient Analysis of Five-Layer System LASER Amplifier)

金 暎 權*
(Kim, Yung Kwon)

要 約

레이저 增幅器를 能動領域(Ruby Rod)에서의 Fabry-Perot 共振器의 方法으로 取扱했고 5層, 即 空氣-反射板-Ruby-反射板-空氣의 構造로 考察했다. 一次元 스칼라波動方程式으로 Maxwell 電磁方程式을 利用하여 入射界가 連續이라는 假定下에 境界值問題로 봤으며 모든 輻射界는 各境界面에 垂直으로 入射한다고 생각했다. 모든 方程式은 Laplace 變換으로 過渡現象論의 方法으로 취급했으며 增幅器로서의 安定領域과 自勵發振器로서의 不安定領域을 考察했다. 또한 過渡項과 關聯된 레이저 增幅器 設計上의 問題도 생각했다.

Abstract

The LASER Amplifier is treated in the manner of a Fabry-Perot resonator with an active media, five layers are considered: air, reflector, active medium(ruby), reflector and air. One dimensional scalar wave equations are derived using the method of boundary value problems in which it is assumed that incident coherent radiation falls normally on the surface wall.

All equations are treated from the transient analysis point of view using the Laplace transform methods, and are arranged steady state region as an amplifier and transient region as a self excited oscillator.

Also some remarks are given on the design problem of LASER amplifier in connection with the transient terms involved.

1. 序 論

三層構造(3-layer system)의 레이저 增幅器 即 空氣-Ruby-空氣의 層으로 된 레이저 增幅器가 送信線路和 같은 系統으로 또는 電磁理論의 境界值 問題로 取扱되어 그 理論的 考察이 報

告되고 있다. 더 나아가서 이들의 方程式은 V. N. Smiley에 依하여 境界條件으로(空氣-Ruby-空氣) 發展시켰다. 이것은 Fabry-Perot 共振構造의 能動領域(Active medium)을 基礎로 解析하고 있다. 또한 이 解析은 正弦의 方法과 過渡現象論의 方法으로 接近시켜 取扱하고 있다.

本論文中에서 取扱하려는 레이저 增幅器의 構造

*光云電子工大 正會員

Kwang Woon Electronic Engr. College

(接受日字 1966.11.15)

는 内部에서 多重反射效果를 얻기 위하여 能動物質(Ruby)의 兩端에 銀으로 反射板을 만든 TIR(total internal reflector)形 루비 棒를 使用하는 경우 그 增幅器의 特性을 送信線路와 같은 취급과 境界條件을 利用하여 過渡現象論의 으로 取扱하고 理論的으로 解析하여 그 定常項과 過渡項을 考察했다. 勿論 空氣-反射板-能動物質-反射板-空氣의 層構造系統에 對한 解析은 Jacobs等이 正弦的으로 取扱하여 報告되어 있다. 여기서는 特別한 경우로 反射板의 損失을 無視하고 反射板의 두께는 1/4λ에 該當하는 경우를 取扱하였다. 그리고 이 系統의 解析이 適當한 假定과 近似的 取扱에 依하여 三層構造의 解析에 還元될 수 있는 것으로도 생각할 수 있다.

本論文에서는 레이저 增幅器의 解析에 있어 그 取扱方法과 좋은 近似에 依하여 생기는 差異를 다음과 같이 보았다. 即 正弦的 解析에서는 레이저 增幅器의 理論을 定常狀態로 假定하여 時間的微分演算子 $j\omega$ 를 表示하여 交流理論의 으로 取扱하고 있으나 그 結果 發振의 threshold를 지나는 不安定領域에서도 有限하고 一定한 利得을 갖는 增幅器로서 動作하는 것같이 되어 實際로 物理的事實과 위배되는 結論에 도달하고 있다. 그러나 過去의 解析方法으로는 이것을 說明할 수가 없었다.

本論文에서는 5層構造 레이저 增幅器에 있어서 이와같은 결함을 除去하기 위해서 Laplace 變換을 함으로써 過渡項을 導入하고 正常項과 過渡項을 同時에 解析 考察하므로 安定領域과 不安定領域을 比較해 보았다. 正弦的 解析의 경우와 過渡現象論의 解析의 경우 安定領域에서 잘 一致하는 結果를 알 수 있었다.

다만 5層構造의 레이저 增幅器를 생각할 때 電磁波는 TEM mode로 假定하고 一次元的인 解析했다.

2. 波動方程式의 Laplace變換

그림 1은 5層構造의 增幅器의 端面을 보인다. 領域 I과 V는 空氣로 誘電率 ϵ_0 , 透磁率 μ_0 ,

導電率 $\sigma=0$ 이고, 領域 II와 IV는 反射板으로 誘電率 ϵ_s , 透磁率 μ_s , 導電率 σ_s 라고 한다. 이 領域은 同一 두께, 同一 物質로 되어있다고 假定한다. 또한 領域 III은 誘電率 ϵ , 透磁率 μ , 導電率 σ 인 能動物質-루비라고 한다.

지금 루비中을 z 方向으로 進行하는 TEM mode의 電磁波에 對한 Maxwell 方程式은 다음과 같은 一次元스켈라波動方程式으로 表示된다.

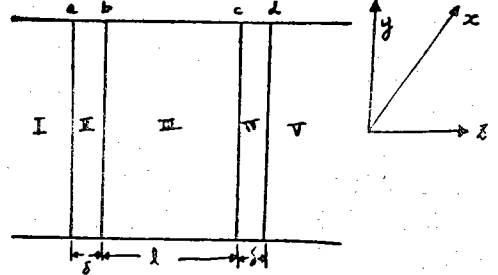


그림 1. 레이저의 五層構造
Fig. 1. Five-layer system of LASER

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \dots\dots\dots (1a)$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = -\sigma E - \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} \dots\dots\dots (1b)$$

여기서 $E(z, t)$ 는 電界의 x -分値, $H(z, t)$ 는 磁界의 y 分値를 表示한다. 初期條件으로 $E(z, 0) = 0$, $H(z, 0) = 0$ 라고 하고 複素周波數 $S = \xi + j\omega$ 를 써서 式(1a)와 (1b)를 Laplace變換할 때

$$\mathcal{L}E(z, t) = F(z, s) \quad \mathcal{L}H(z, t) = U(z, s) \text{라고 하면}$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\mu s U \dots\dots\dots (2a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\sigma(s) F - \epsilon s F \dots\dots\dots (2b)$$

로 된다.

또 式(2a)와 式(2b)를 各各 z 에 對하여 한번 더 微分하면

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\mu s \frac{\partial U}{\partial z} = [\mu s \sigma(s) + \mu \epsilon s^2] F = \Gamma^2 F \dots\dots\dots (3a)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\sigma(s) \frac{\partial F}{\partial z} - \epsilon s \frac{\partial F}{\partial z} = (\mu s \sigma(s) + \mu \epsilon s^2) U = \Gamma^2 U \dots\dots\dots (3b)$$

여기서 $\Gamma^2 = [\mu s (\sigma(s) + \epsilon s)] \dots\dots\dots (4)$ 이다. σ 가 적으면 즉 $|\sigma(s)| \ll |\epsilon s|$ 인 경우에는

$$\begin{aligned} \Gamma &= \sqrt{\mu s(\sigma s) + \epsilon s} = \sqrt{\mu s^2 \left(\epsilon + \frac{\sigma(s)}{s} \right)} \\ &= s \sqrt{\mu} \sqrt{\left(\epsilon + \frac{\sigma(s)}{s} \right)} = s \sqrt{\mu \epsilon} \left(1 + \frac{\sigma(s)}{\epsilon s} \right)^{1/2} \\ &= s \sqrt{\mu \epsilon} + \frac{\sigma(s)}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \\ &\equiv \frac{s}{c} + \alpha(s) \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $c=1/\sqrt{\mu\epsilon}$, 媒質의 光速度, $\sigma(s) = \frac{\sigma(s)}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}$ 이다.

式(2)와 (3)에서 F와 U를 求하면

$$F = C_1 e^{-\Gamma z} + C_2 e^{\Gamma z} \quad (6a)$$

$$U = 1/Z (C_1 e^{-\Gamma z} - C_2 e^{\Gamma z}) \quad (6b)$$

여기서 C_1, C_2 는 境界條件에 依하여 求해지는 常數이고 Z 는 다음과 같이 주어지는 特性임피이던스이다. 即

$$Z = \sqrt{\frac{\mu s}{\sigma(s) + \epsilon s}} \quad (7)$$

$|\sigma(s)| \ll \epsilon s$ 이라고 하면

$$Z \approx \sqrt{\mu' \epsilon} \quad (8)$$

로 된다. 式(6a) (6b)은 Laplace 逆變換하면 얻을 수 있고 $e^{-\Gamma z}$ 및 $e^{\Gamma z}$ 의 項은 各各 z 의 (+) 方向과 (-) 方向으로 進行하는 波를 表示한다.

境界條件을 利用하여 各領域의 波動方程式의 解를 求하면 다음과 같이 된다. 그림 2는 各領域의 境界條件을 보인다.

領域 I에서

$$F_a = F_{1e} e^{-\Gamma_0 z} + F_{1r} e^{\Gamma_0 z} \quad (9a)$$

$$U_a = 1/Z_0 (F_{1e} e^{-\Gamma_0 z} - F_{1r} e^{\Gamma_0 z}) \quad (9b)$$

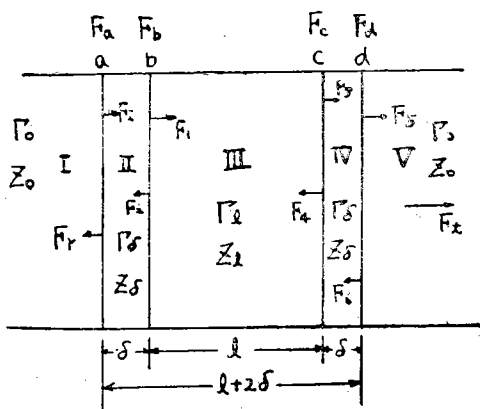


그림 2. 레이저의 境界條件
Fig. Boundary condition of LASER

이다. 여기서 $\Gamma_0 = s/c$ 이고 또 $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ 이다.
領域 II에서

$$F_b = F_{2e} e^{-\Gamma_1 z} + F_{2r} e^{\Gamma_1 z} \quad (10a)$$

$$U_b = \frac{1}{Z_1} (F_{2e} e^{-\Gamma_1 z} - F_{2r} e^{\Gamma_1 z}) \quad (10b)$$

領域 III에서

$$F_c = F_{3e} e^{-\Gamma_2 z} + F_{3r} e^{\Gamma_2 z} \quad (11a)$$

$$U_c = \frac{1}{Z_2} (F_{3e} e^{-\Gamma_2 z} - F_{3r} e^{\Gamma_2 z}) \quad (11b)$$

여기서 $\Gamma_s = \sqrt{\mu s \sigma(s) + \epsilon s}$, $Z_s = \sqrt{\frac{\mu s}{\sigma(s) + \epsilon s}}$

인데 Ruby의 導電率은 負導電率이다.

領域 IV에서

$$F_d = F_{4e} e^{-\Gamma_3 z} + F_{4r} e^{\Gamma_3 z} \quad (12a)$$

$$U_d = \frac{1}{Z_3} (F_{4e} e^{-\Gamma_3 z} - F_{4r} e^{\Gamma_3 z}) \quad (12b)$$

領域 V에서

$$F_e = F_{5e} e^{-\Gamma_4 z} \quad (13a)$$

$$U_e = \frac{1}{Z_4} F_{5e} e^{-\Gamma_4 z} \quad (13b)$$

式(10a)에서 (13b)까지에 各各 境界條件을 適用하면

$z=0$ 에서

$$F_a + F_r - F_1 - F_2 = 0 \quad (14a)$$

$$\frac{1}{Z_0} (F_a - F_r) - \frac{1}{Z_1} (F_1 - F_2) = 0 \quad (14b)$$

$z=\delta$ 에서

$$F_{1e} e^{-\Gamma_0 \delta} + F_{1r} e^{\Gamma_0 \delta} - F_{2e} e^{-\Gamma_1 \delta} - F_{2r} e^{\Gamma_1 \delta} = 0 \quad (15a)$$

$$\frac{1}{Z_0} (F_{1e} e^{-\Gamma_0 \delta} - F_{1r} e^{\Gamma_0 \delta}) - \frac{1}{Z_1} (F_{2e} e^{-\Gamma_1 \delta} - F_{2r} e^{\Gamma_1 \delta}) = 0 \quad (15b)$$

$z=\delta+l$ 에서

$$F_{2e} e^{-\Gamma_1(\delta+l)} + F_{2r} e^{\Gamma_1(\delta+l)} - F_{3e} e^{-\Gamma_2(\delta+l)} - F_{3r} e^{\Gamma_2(\delta+l)} = 0 \quad (16a)$$

$$\frac{1}{Z_1} (F_{2e} e^{-\Gamma_1(\delta+l)} - F_{2r} e^{\Gamma_1(\delta+l)}) - \frac{1}{Z_2} (F_{3e} e^{-\Gamma_2(\delta+l)} - F_{3r} e^{\Gamma_2(\delta+l)}) = 0 \quad (16b)$$

$z=2\delta+l$ 에서

$$F_{3e} e^{-\Gamma_2(2\delta+l)} + F_{3r} e^{\Gamma_2(2\delta+l)} - F_{4e} e^{-\Gamma_3(2\delta+l)} = 0 \quad (17a)$$

$$\frac{1}{2\delta} [F_{3e} - \Gamma_0(2\delta + \ell) - F_{6e} \Gamma_0(2\delta + \ell) - \frac{1}{Z_0} F_{3e} - \Gamma_0(2\delta + \ell)] = 0 \dots (17b)$$

$$\Gamma_0 = s\sqrt{\epsilon_0\mu_0} s = s/c \dots (21a)$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \dots (21b)$$

로 된다. 지금 一般의인 경우를 生覺하기 위해서 $z = \delta + \ell$ 되는 곳에서의 F 와 U 는 F_c, U_c 이고, $z = \delta$ 되는 곳에서는 F_s, U_s 이므로 F_c 와 F_s 와의 關係 U_c 와 U_s 와의 關係는 다음과 같이 된다.

$$F_s = F_c \cosh \Gamma(\ell + \delta) + ZU_c \sinh \Gamma(\ell + \delta) \dots (18a)$$

$$U_s = \frac{1}{Z} F_c \sinh \Gamma(\ell + \delta) + U_c \cosh \Gamma(\ell + \delta) \dots (18b)$$

이것을 매트릭스로 表記하면

$$\begin{bmatrix} F_s \\ U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \Gamma(\ell + \delta) & Z \sinh \Gamma(\ell + \delta) \\ 1/Z \sinh \Gamma(\ell + \delta) & \cosh \Gamma(\ell + \delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_c \\ U_c \end{bmatrix} \dots (19)$$

특히 $\sigma = 0$ 인 空氣中에서는 $\Gamma = s/v, Z = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ 로 되므로

$$\begin{bmatrix} F_s \\ U_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(s/v) \ell' & \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \sinh(s/v) \ell' \\ \sqrt{\epsilon_0/\mu_0} \sinh(s/v) \ell' & \cosh(s/v) \ell' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_c \\ U_c \end{bmatrix} \dots (20)$$

여기서 $\ell' = \delta + \ell$ 이다.

3. 레이저의 構造와 一般解

레이저 增幅器의 模型으로 前述한 바와 같이 그림 1의 構造를 생각한다. 領域 I과 V는 空氣, 領域 III은 負導電率의 能動領域으로 勵起된 線形, 等方, 均質의 레이저物質 即 루비로 되어 있으며, 領域 II와 IV는 反射板으로서 루비의 兩端에 같은 두께로 同一物質(Silver)을 발라 놓은 것이라고 한다. 電磁波는 이와같은 傳送系中을 TEM mode로 z 方向으로 傳播하여 各境界面에서 反射 및 透過하고 領域 III에서는 多重反射를 하여 빔(beam)의 增幅作用을 한다. 即 그림 1과 같은 傳送系는 레이저 物質을 포함한 能動性 Fabry-Perot 干涉計의 模型과 等價이다.

領域 I과 V에서는 $\sigma = 0$ 이고 $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0$ 이므로 式(5)와 (7)에서

이다. 여기서 ϵ_0 와 μ_0 는 각각 空氣中의 誘電率과 透磁率이고 $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ 는 空氣中에서의 光速度이다.

한편 領域 III의 레이저 物質中에서는 前述한 바와 같이 다음과 같다.

$$\Gamma_1 = \sqrt{\mu s(\sigma(s) + \epsilon s)} \dots (22a)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu s}{\sigma(s) + \epsilon s}} \dots (22b)$$

여기서 ϵ 와 μ 는 레이저 物質의 誘電率과 透磁率을 表示한다. 루비에서 $\epsilon = 3.115 \times 10^{21}, \mu = 1.257 \times 10^{-6}$ 이다. 導電率 σ 는 레이저 物質이 負導電率을 갖으므로 (-)값이고 誘導放射의 스펙트럼線이 角周波數 ω 를 中心으로 하는 半值幅 $2\Delta\omega$ 되는 Lorentz sharp라고 假定한다.

領域 II와 IV에서는 反射板을 Silver Coating 이라고 하면 導電率 σ_s 는 매우 좋을 것이다. 지금 式(5)와 (7)에서 $\mu = \mu_s, \epsilon = \epsilon_s$ 라 하면 다음과 같다.

$$\Gamma_s = s\sqrt{\mu_s s(\sigma_s(s) + \epsilon_s s)} \dots (23a)$$

$$Z\delta = \sqrt{\frac{\mu_s s}{\sigma\delta(s) + \epsilon_s s}} \dots (23b)$$

한편 루비 棒에서는 위의 假定에 依하여

$$\sigma(\omega) = \sigma_0 \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega + j(\omega - \omega_0)} \dots (24)$$

라고 볼수 있다. 여기서 σ_0 는 誘導放出 스펙트럼의 中心周波數에서의 레이저 루비 棒에서 나타나는 負誘電率이다. $j\omega$ 를 s 로 하여 式(24)를 表示하면

$$\sigma(s) = \sigma_0 \frac{\Delta\omega}{\Delta\omega + (s - j\omega_0)} \dots (25)$$

로 된다. 特히

$$i) I_{ms} \gg \omega_0 + \Delta\omega \text{ 또는 } I_{ms} \ll \omega_0 - \Delta\omega \dots (26)$$

되는 경우에는 $\sigma(s) = 0$ 로 볼 수가 있다. 여기서 I_{ms} 는 複素變數 s 의 虛數部 ω 를 表示한다. 이런 것은 物理的으로는 誘導放出 스펙트럼線의 半值幅에서 充分히 떨어진 周波數에 對하여는 레이저 物質은 能動性媒質로서 動作하지 않는 것을 意味한다. 그러므로 이와같은 範圍에서는

式(22)는 다음과 같이 된다.

$$\Gamma_1 = \sqrt{\mu\epsilon s^2} = s\sqrt{\mu\epsilon} = s/v \dots\dots\dots(27a)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \dots\dots\dots(27b)$$

但 $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$

ii) $I_{ms} = \omega_0$ 인 경우 $\omega_0 \gg \Delta\omega$ 및 $\omega_0\epsilon \gg \sigma_0$ 가 되는 것을 考慮하여 式(5)와 (8)은

$$\Gamma_1 \approx \frac{s}{v} + a(s) \dots\dots\dots(28a)$$

$$Z_1 \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \dots\dots\dots(28b)$$

로 되고 여기서

$$a(s) = \sigma(s)/2 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \dots\dots\dots(29)$$

이 경우 $a(s)$ 의 實數部는 單位길이 當 負減衰定數 即 增幅定數를 表示한다.

領域 I 中을 II 의 方向으로 入射하는 入射波 및 I-II 의 境界面 a에서 反射되는 反射波의 電磁界를 各各 Laplace 變換하여 $F_i(s)$, $U_i(s)$ 및 $F_r(s)$, $U_r(s)$ 라고 하고, 또 領域 II에서 III으로 入射하는 入射波 및 II-III境界面 b에서의 反射波의 Laplace變換을 각각 $F_3(s)$, $U_3(s)$ 및 $F_2(s)$, $U_2(s)$ 라 한다. 마찬가지로 III-IV에서 $F_5(s)$, $U_5(s)$ 및 $F_4(s)$, $U_4(s)$ 또 IV-V에서 $F_6(s)$, $U_6(s)$ 라 하고 IV-V의 境界面 d에서 透過하는 透過波의 電磁界를 같이 Laplace 變換하여 $F_t(s)$, $U_t(s)$ 라고 表示한다. 다음 領域 I과 V는 半無限長으로 假定한다. 各境界面에서의 電磁界의 Laplace 變換式은 다음과 같다.

$$F_a = F_1 + F_r \dots\dots\dots(30a)$$

$$U_a = U_1 + U_r \dots\dots\dots(30b)$$

$$F_b = F_1 + F_2 \dots\dots\dots(31a)$$

$$U_b = U_1 + U_2 \dots\dots\dots(31b)$$

$$F_c = F_3 + F_4 \dots\dots\dots(32a)$$

$$U_c = U_3 + U_4 \dots\dots\dots(32b)$$

$$F_d = F_5 + F_6 \dots\dots\dots(33a)$$

$$U_d = U_5 + U_6 \dots\dots\dots(33b)$$

$$F_t = F_5 \dots\dots\dots(34a)$$

$$U_t = U_5 \dots\dots\dots(34b)$$

式(30)부터 (34)까지에서

$$F_a = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_r \dots\dots\dots(35a)$$

$$U_a = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 + U_r \dots\dots\dots(36b)$$

로 되고

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 = F_i' \dots\dots\dots(37a)$$

$$U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + U_6 = U_i' \dots\dots\dots(37b)$$

로 놓고 等價入力電界의 Laplace 變換으로 생각한다면

$$E_a = F_i' + F_r \dots\dots\dots(30a)'$$

$$U_a = U_i' + U_r \dots\dots\dots(30b)'$$

로 된다. 여기서

$$\frac{F_i'}{U_i'} = \frac{F_t}{U_t} = Z_0 \dots\dots\dots(38a)$$

$$\frac{F_r}{U_r} = -Z_0 \dots\dots\dots(38b)$$

이다.

한편 레이저 物質의 存在하는 領域 III의 길이를 l 라하면 式(18)에 依하여

$$F_a = F_5 \cosh \Gamma_1 l + Z_1 U_5 \sinh \Gamma_1 l \dots\dots\dots(39a)$$

$$U_a = \frac{1}{Z_1} F_5 \sinh \Gamma_1 l + U_5 \cosh \Gamma_1 l \dots\dots\dots(39b)$$

로 된다. 式(30)'과 (38)을 使用하여 (30)를 다시 쓰면

$$F_i' + F_r = F_5 \cosh \Gamma_1 l + \frac{Z_1}{Z_0} F_5 \sinh \Gamma_1 l \dots\dots\dots(40a)$$

$$F_i' - F_r = \frac{Z_0}{Z_1} F_5 \sinh \Gamma_1 l + F_5 \cosh \Gamma_1 l \dots\dots\dots(40b)$$

로 되고 여기서 透過率과 反射率을 求하면

$$F_t/F_i' = \frac{1}{\cosh \Gamma_1 l + A \sinh \Gamma_1 l} \dots\dots\dots(41a)$$

$$F_r/F_i' = \frac{B \sinh \Gamma_1 l}{\cosh \Gamma_1 l + A \sinh \Gamma_1 l} \dots\dots\dots(41b)$$

여기서 $A = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_0} + \frac{Z_0}{Z_1} \right) > 1 \dots\dots\dots(42a)$

$$B = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_0} - \frac{Z_0}{Z_1} \right) \dots\dots\dots(42b)$$

지금 $F_t/F_i' \equiv Y_t(s)$, $F_r/F_i' \equiv Y_r(s) \dots\dots\dots(43)$

라 놓으면 $Y_t(s)$ 및 $Y_r(s)$ 의 Pole sn 는 다음과 같이 求할 수 있다. 即 後述하는 바와 같이

$$sn = \frac{v}{l} (|a_n|l - L_r) + j \frac{v}{l} n\pi \dots\dots\dots(44)$$

여기서 n 는 整數, a_n 는 $a(s)$ 의 實數部이고 L_r 는 $\left| \frac{Z_0 - Z_1}{Z_1 + Z_0} \right| = e^{-L_r}$ 로 놓고 境界面 b, c에서의 反射損失을 表示한다.

특히 $I_{ms} \gg \omega_0 + \Delta\omega$, 또는 $I_{ms} \ll \omega_0 - \Delta\omega$ 인 곳에서는 式(44)는 다음과 같이 된다.

$$s_1' = -\frac{v}{\ell} L_r + \frac{v}{\ell} n\pi \dots \dots \dots (45)$$

透過電界와 反射電界 $E_i(t)$ 와 $E_r(t)$ 를 求하려면 式(41)에서의 $F_i(s)$ 와 $F_r(s)$ 를 各各 Laplace 逆變換하면 된다.

$$E_i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\xi-j\infty}^{\xi+j\infty} F_i'(s) Y_i(s) e^{st} ds \dots \dots \dots (46a)$$

$$E_r(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\xi-j\infty}^{\xi+j\infty} F_r'(s) Y_r(s) e^{st} ds \dots \dots \dots (46b)$$

지금 等價入射電界 $E_i(t)$ 를

$$E_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ E_0 e^{st} & t > 0 \end{cases} \quad (47)$$

라 하면 Laplace變換의 公式에 따라

$$F_i'(s) = \frac{E_0}{s-j\omega} \dots \dots \dots (48)$$

로된다. 式(46)을 Laplace 逆變換하기 위하여 留數定理을 利用하여 積分을 行하면 된다. 지금 上記의 積分을 求하기 위하여 複素數平面(Complex plane) S上에 圖3의 實線으로 表示한바와 같은 積分路 C_p 를 생각한다. 但 이 積分路 C_p 는 $Re s \geq \xi$ 로 놓고 被積分函數가 언제나 正則이 되도록 選擇한다. 지금 η_p 는

$$\eta_p = \frac{v}{\ell} (2p+2q+1) \frac{\pi}{2} \dots \dots \dots (49)$$

여기서 p 는 整數, q 는 $q \gg \frac{L_r}{\pi}$ 또는 $q \gg \frac{\omega L}{\pi v}$ 를 滿足하는 整數로 選擇한다. 以上과 같이 하면 C_p 는 式(46)의 어느 被積分函數의 pole도 通過하지 않게 된다. 또 式(46a)의 積分에 對하여 보면 $-\eta_p \leq \alpha \leq \xi$ 에 對하여

$$|F_i(s \pm j\eta_p) Y_i(s) \oplus (s \pm j\eta_p)| \leq \frac{1}{(\eta_p \pm \omega) \sqrt{A^2 - 1}} = \delta p \dots \dots \dots (50)$$

$$\lim_{\eta_p \rightarrow \infty} \delta p = 0 \dots \dots \dots (51)$$

의 關係가 成立하고 積分路 C_p 의 下邊 또는 上邊에서는

$$|F_i(s) Y_i(s) e^{st}| ds \leq \delta p e^{st} dx \dots \dots \dots (52)$$

되는 關係가 成立한다. 한편 式(52) 右邊의 積分

$$\delta p \int_{-\eta_p}^{\xi} e^{st} dx = \frac{\delta p}{t} (e^{\xi t} - e^{-\eta_p t}) \dots \dots (53)$$

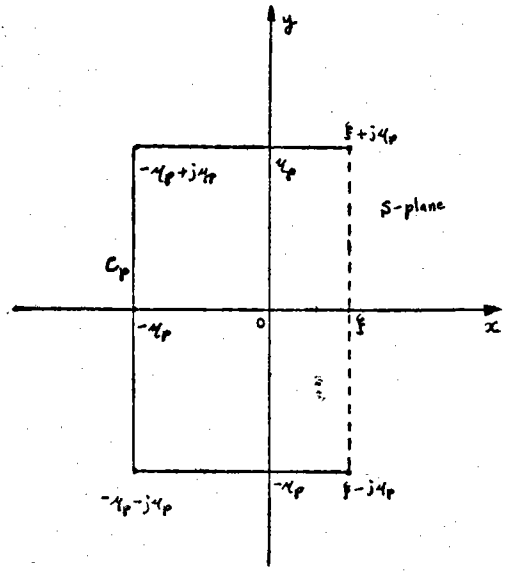


圖3. S-Plane上的 積分路
Fig. 3. Integral contour on a S-Plane

은 $t > 0$ 때 $\eta_p \rightarrow \infty$ 에 對하여 0로 된다. 故로 C_p 의 上下邊을 따른 式(52)의 左邊의 積分은 $\eta_p \rightarrow \infty$ 인 때

$$\lim_{\eta_p \rightarrow \infty} \int_{-\eta_p \pm j\eta_p}^{\xi \pm j\eta_p} F_i(s) Y_i(s) e^{st} ds \rightarrow 0 \dots (54)$$

로 된다.

다음 積分路 C_p 의 左側 上邊에 關해서는 q 에 對한 條件을 考慮해서

$$|F_i(-\eta_p + jy) Y_i(-\eta_p + jy)| < \frac{(\ell/v)(1/4\pi)}{|\cosh(4\pi) - A \sinh(4\pi)|} = M(\text{const.}) \dots \dots \dots (55)$$

로 되어

$$|F_i(s) Y_i(s) e^{st}| < M e^{-\eta_p t} dy \dots \dots \dots (56)$$

으로 成立한다.

한편

$$M e^{-\eta_p t} \int_{-\eta_p}^{\eta_p} dy = 2M \eta_p e^{-\eta_p t} \dots \dots \dots (57)$$

은 $t > 0$ 때 $\eta_p \rightarrow \infty$ 에 對하여 0이다. 故로 C_p 의 左側 上邊에 따른 積分은

$$\lim_{\mu p \rightarrow \infty} \int_{-\eta_p - j\eta_p}^{-\eta_p + j\eta_p} F_i(s) Y_i(s) e^{st} ds \rightarrow 0 \dots (58)$$

로 된다. 即 積分路 C_p 를 따른 全積分은 結局 $\eta_p \rightarrow \infty$ 에 對하여 다음과 같다.

$$\lim_{\eta_p \rightarrow \infty} \int_{C_p} F_i(s) Y_i(s) e^{st} ds \rightarrow 0 \dots \dots \dots (59)$$

다음에 被積分函數의 pole에 對하여 留數를 求한다. $F_i(s)$ 의 pole $s=jw$ 에 對한 留數를 ϕ_i 라 하면 다음과 같다.

$$\phi_i = E_o Y_i(jw) e^{j\omega t} \dots\dots\dots (60)$$

$Y_i(s)$ 의 pole S_n 는

$$\text{Coth}\Gamma_i \ell = -A \dots\dots\dots (61)$$

에서 求할 수 있다.

$A > 1$ 인 곳에서는

$$\Gamma_i(s_n)\ell = -\text{Coth}^{-1}A + jn\pi \dots\dots\dots (62)$$

이다. 여기서 n 는 整數이다. 式(62)에 式(61)을 使用하여 다음을 얻을 수 있다.

$$e^{2\Gamma_i \ell} = \frac{A-1}{A+1} = \left(\frac{Z_i - Z_o}{Z_i + Z_o}\right) \equiv R^2 \dots\dots\dots (63)$$

R 는 領域 I-V 또는 IV-V의 境界面에 있어서의 反射係數를 表示한다.

$$R \equiv e^{-Lr} \dots\dots\dots (64)$$

라면 Lr 는 境界面の 反射損失을 表示한다. 위의 여러式들에서 結局

$$\Gamma_i(s_n)\ell = -Lr + jn\pi \dots\dots\dots (65)$$

로 되고 pole s_n 는

$$s_n \cong -(v/\ell)(a(s_n) + Lr) + j(v/\ell)n\pi \dots (66)$$

의 關係가 成立됨을 알 수 있다. 여기서 $a(s_n) = a_n + ja_n$ 로 表示하고 $n\pi \gg a_n \ell$ 를 考慮하면 s_n 는 結局 다음과 같다.

$$s_n \cong \frac{v}{\ell} (|a_n| \ell - Lr) + j \frac{v}{\ell} n\pi \dots\dots\dots (67)$$

특히 $I_{ms} \gg \omega_o + \Delta w$ 또는 $I_{ms} \ll \omega_o - \Delta w$ 인 곳에서는

$$s_n = -\frac{v}{\ell} Lr + j \frac{v}{\ell} n\pi \dots\dots\dots (68)$$

로 된다. 또 이들 pole에 對한 留數 p_i 를 求하면 다음과 같다.

$$p_i = \begin{cases} \frac{(-1)^n E_o e^{s_n t}}{(s_n - jw) |B| \Gamma'(s_n) \ell} & I_{ms} \cong \omega_o \\ \frac{(-1)^n (v/e) E_o e^{s_n t}}{(s_n' - jw) |B|} & I_{ms} \gg \omega_o + \Delta w \\ & \text{or } I_{ms} \ll \omega_o - \Delta w \end{cases} \dots\dots\dots (69)$$

여기서 Γ_i, Z_i 의 分岐點은

$$\Gamma_i = \sqrt{\mu_s(\sigma + \epsilon_s)}, \quad Z_i = \sqrt{\mu_s/(\sigma + \epsilon_s)},$$

이므로 어느편의 分岐點이나 同一點이 된다.

한편

$$\cosh(-\Gamma_i \ell) = \cosh \Gamma_i \ell \dots\dots\dots (70a)$$

$$-Z_i \sinh(-\Gamma_i \ell) = Z_i \sinh \Gamma_i \ell \dots\dots\dots (70b)$$

되는 關係가 成立하므로 $Y_i(s)$ 및 $Y_r(s)$ 의 값에 相關없이 Γ_i 또는 Z_i 의 分岐點은 特異點이 되지 않는다.

이렇게하여 式(46a)의 積分을 留數의 和로 求할 수 있게 됐다. 式(46b)의 積分도 以上과 똑같은 方法으로 被積分函數의 pole에 있어서의 留數를 求하는 問題로 풀어갈 수가 있다.

式(46)의 積分値는

$$\int_{\xi-j\infty}^{\xi+j\infty} F(s)Y(s)e^{st} ds = 2\pi j \Sigma(\phi + \rho) \dots (71)$$

로 된다. 式(71)에 各各 適當한 값을 代入하여 求하면 求하는 電界는 各各 다음과 같다.

$$E_i(t) = E_o Y_i(jw) e^{j\omega t} + \frac{v}{\ell} E_o \Sigma_n \frac{(-1)^n e^{s_n t}}{(s_n - jw) |B|} + E_o \Sigma_n \frac{(-1)^n e^{s_n t}}{(s_n - jw) |B| \Gamma'(s_n) \ell} \dots\dots (72)$$

$$E_r(t) = E_o Y_r(jw) e^{j\omega t} - \frac{v}{\ell} E_o \Sigma_n \frac{e^{s_n t}}{(s_n' - jw) |B|} - E_o \Sigma_n \frac{e^{s_n t}}{(s_n - jw) |B| \Gamma'(s_n) \ell} \dots\dots (73)$$

故로 透過電界와 反射電界는

$$E_i(t) = \frac{E_o \exp j\omega t}{\cosh \Gamma_i \ell + A \sinh \Gamma_i \ell} + \frac{v}{\ell} E_o \Sigma_n \frac{(-1)^n \exp\{-Lr(v/\ell)t + j(v/\ell)n\pi t\}}{\{-\frac{v}{\ell} Lr + j(\frac{v}{\ell} n\pi - w)\} |B|} + E_o \Sigma_n \frac{\exp\{(v/\ell)(|a_n| \ell - Lr)t + j(v/\ell)n\pi t\}}{\{\frac{v}{\ell} (|a_n| \ell - Lr) + j(\frac{v}{\ell} n\pi - w)\} |B|} \dots\dots (74)$$

$$E_r(t) = \frac{E_o B \sinh \Gamma_i \ell}{\cosh \Gamma_i \ell + A \sinh \Gamma_i \ell} \exp j\omega t - \frac{v}{\ell} E_o \Sigma_n \frac{\exp\{-(v/\ell)Lr t + j(v/\ell)n\pi t\}}{\{-\frac{v}{\ell} Lr + j(\frac{v}{\ell} n\pi - w)\} |B|} - E_o \Sigma_n \frac{\exp\{(v/\ell)(|a_n| \ell - Lr)t + (v/\ell)n\pi t\}}{\{\frac{v}{\ell} (|a_n| \ell - Lr) + j(\frac{v}{\ell} n\pi - w)\} |B|} \dots\dots (75)$$

이고 여기서

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_0} + \frac{Z_2}{Z_0} \right) \quad B = \frac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_0} - \frac{Z_2}{Z_0} \right)$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}, \quad \Gamma'(s_n) = \left. \frac{d\Gamma(s)}{ds} \right|_{s=s_n}$$

$$\Gamma_1 = \sqrt{jw\mu(\omega) + jw\epsilon} \cong j \frac{w}{v} + \frac{\sigma(w)}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = jw + a(w)$$

$$a_n = \text{Rea}(s_n), \quad Lr = \ell n \left[\frac{Z_1 + Z_0}{Z_0 - Z_1} \right]$$

이다. 이 경우 透過電界와 入射電界는 入射電界를 領域 II에서 入射하는 것으로 取했고 位相은 零으로 擇한 것이다. 여기서 알 수 있는 것은 適當한 假定을 함으로서 5層構造와 3層構造의 레이저가 位相關係 以外에는 거의 같은 方法으로 解析이 可能하다는 것이다.

Jacobs等은 定常狀態에서 이것을 數字的으로 證明하고 있다.

4. 考 察

式(74)와 (75)에서 第2, 3項을 零으로 놓으면 $E_i(t)$, $E_r(t)$ 는 各各 第1項만으로 定常狀態로 될 것이다. 即 이렇게 되기 爲해서는 Ruby Rod中을 1往復하여 얻어지는 利得 $2|\alpha_n|\ell$ 이 兩端面에서 잃어버리는 反射損失 $2Lr$ 보다 작으면 增幅器가 安定된다. 即 $|\alpha_n|\ell - Lr < 0$ 되므로 $t \rightarrow \infty$ 에서 위의 說明이 만족된다.

$$E_i(t) = \frac{E_0}{\cosh\Gamma_1\ell + A\sinh\Gamma_1\ell} e^{j\omega t} \dots\dots\dots (76)$$

$$E_r(t) = \frac{E_0 B \sinh\Gamma_1\ell}{\cosh\Gamma_1\ell + A\sinh\Gamma_1\ell} e^{j\omega t} \dots\dots\dots (77)$$

이것은 $d/dt \rightarrow jw$ 로 놓은 交流理論의 解와 一致한다.

Jacobs等은 反射板이 無損失이고 두께가 $\lambda/4$ 인 경우 入射電界와 透過電界의 比를 다음과 같이 求하고 있다.

$$\frac{E_r(t)}{E_i(t)} = \frac{-1}{\cos\Gamma_0\ell + A'\sinh\Gamma_0\ell} \dots\dots\dots (79)$$

여기서 $A' = \frac{1}{2} \left[\frac{\Gamma_1}{\Gamma_0/\Gamma_0} + \frac{\Gamma_0/\Gamma_0}{\Gamma_1} \right]$ 이다. 式

(79)와 式(76)에서 求하는 $E_r(t)/E_i(t)$ 는 結局 等價的으로 一致함을 알 수 있다.

反射形 增幅器에서는 $|\alpha_n|\ell < Lr$ 를 만족하는

安定領域의 範圍內에서 $\beta\ell = (w/v)\ell \cong n\pi$ 로 되도록 設計하면 增幅度가 最大인 點에서 動作하게 될 것이다. 그러나 이에 反하여 數種의 短點 即 周波數特性 또는 信號增幅 等に 영향이 미칠가 하는 염려도 있다.

다음으로 $|\alpha_n|\ell > Lr$ 로 되면 不安定이 되는데 이 경우 式(74)와 (75)의 第3項은 $t \rightarrow \infty$ 에서 無限大로 되어 解의 값이 無限大로 된다. 이 경우 周波數는 $Ins_n = w = (v/\ell)n\pi$ 로 결정되고 $f = \frac{v}{2\ell}$ 로 된다. 이것은 Fabry-Perot 共振器의 發振周波數를 定하는 式과 一致한다.

以上은 線形理論이지만 실제로는 Ruby의 負減衰定數의 非線形效果 때문에 $t \rightarrow \infty$ 에서도 電界 $E_i(t)$ 또는 $E_r(t)$ 는 無限大로 될 수는 없고 最終的으로 $|\alpha_n|\ell = Lr$ 되는 安定限界로 制限되고 그곳에서 一定한 自勵振動을 일으키게 될 것이다. 結果的으로는 Jacobs의 理論에 一致하지만 最初부터 $d/dt = jw$ 로 놓아 交流理論的으로 解析하므로 過渡項을 計算하지 않은 것은 理論上의 결함이 었다고 생각된다.

5. 結 論

空氣-反射板-Ruby-反射板-空氣의 5層構造 레이저 增幅器의 模型을 過渡現象論으로 解析해 왔다. 即 安定領域과 不安定領域의 둘로 갈라서 前者에서는 有限特定の 增幅利得을 後者에서는 自勵發振이 일어나는 現象을 說明했다. 그 結果로 첫째 安定領域에서는 交流理論的인 線形解析과 一致한다는 것을 알았다. 그러나 適當한 假定과 近似를 취하므로 또한 Laplace 變換의 便利를 위하여 境界條件을 等價的으로 取하므로 多少의 無理가 있었음을 認定할 수 있다. 둘째로 不安定領域 即 $|\alpha_n|\ell - Lr > 0$ 인 곳에서는 共振周波數로 自勵發振이 일어난다는 것을 알았다. 또 增幅領域에서 $\ell \cong (\lambda/2)n$ 로 되도록하면 增幅度가 極大로 되어 $|\alpha_n|\ell < Lr$ 를 만족하는 範圍內에서 ℓ 를 길게 할수록 커진다는 것을 알 수 있다.

끝으로 그 以上の 여러가지 可能性을 찾아볼 수 있을 것으로 생각되며 實驗的인 結果는 後에 다시 報告하게 될 것이다.

參 考 文 獻

1. J. A. Stratton; Electromagnetic theory, McGraw Htill 1941.
2. W. T. Thomson; Laplace Transformation, Prentic-Hall 1960.
3. 丁性桂, 金俊鉉; 過渡現象論, 文運堂 1962
4. J. Irving; Mathematics in. Physics and Engineering Academic Press 1959.
5. H. Jacobs, D. A. Holms, L. Hatkin, and F. A. Brand; "Maximum gain for forward and backward wave optical amplifiers" J. appl phys 34. 9. P 2619(1963).
6. H. Jacobs D. A. Holms L Hatkin, and F. A. Brand; "Five Layer optical maser amplifier". IEEE Trans MTT-12 P 163(1964).
7. V. N. Smiley; "Air active inteferece filter as an optical maser amplifier" Proc IEEE 51, 1. P.120(1963).
8. N. Kumagai, and H. Yamamotoo; "Transient analysis approach to optical maser amplifiers" IEEE Trans. MTT-13. 4 (1965).
9. J. Kotik, and M, C. Newstein, "Theory of laser Oscillations in Fabry-Perot resonators" J. appl. phys 32, 2. P.178(1961).