論文 66—3—2—2

R-C 分布回路에 關한 硏究

(Research on R-C Distributed Circuits)

正會員 朴 松 培*
(Park, Song Bae)

要 約

어떤 R-C 分布回路의 微分方程式의 解가 旣知일 때 이것을 이용하여 多數의 다른 分布回路의 微分方程式의 解를 求하는 方法이 얻어졌다. 任意의 R-C 分布回路를 製作의 便宜上 $R(x)C(x)=$ 一定인 回路로 等價變換하는 圖解的方法이 얻어졌으며 解析的證明도 可能하다. 또 理論的 取扱의 統一과 簡單을 爲하여 任意의 R-C 分布回路를 $R(x)$, $C(x)$ 어느 한쪽이 一定한 分布回路로 等價變換하는 方法이 얻어졌다. 이 後者의 回路와 近似的인 集中定數回路를 생각하므로서 分布回路의 近似的인 解析, 合成이 比較的 간단하게 이루어 질수 있다.

ABSTRACT

A method by which solutions of the differential equations of any other distributed circuits can be obtained is described when the solution of the differential equation of an R-C distributed amplifier is known.

A graphical method of transforming any R-C ditributed circuit into an equivalent circuit which has a constant $R(x)\cdot C(x)$ was also obtained. The theoretical verification of this method is possible. For simplicity, any R-C distributed circuit can be transformed into an equivalent circuit which is a distributed circuit of either constant $R(x)$ or $C(x)$. Using this equivalent circuit and considering a lumped circuit, an approximate analysis and synthesis can be made simply.

1. 緖 論

電子回路의 微小化의 傾向은 1959年頃 固體回路의 出現을 가져 왔으며 이것은 眞空管휘드백增幅器, 電子計算機 트랜지스터等에 못지않은 電子工學上의 一大革新으로 看做되고있다. 이 固體回路의 出現에 따라 不均一線路에 對한 關心이 다시 일어났다. 從來 이것은 主로 임피던스整合 및 分布濾波器와 關聯하여 硏究되여 왔으며 거의 全部 無損失線路의 假定下에 다루어졌었다. 固體回路로서 實現할 수 있는 인덕턴스의 値는 極히 적으므로 R-C 分布回路만이 考慮의 對象이 된다. 가장 簡單한 R-C 分布回路는 基板上에 共通歸線인 金屬薄膜, 誘電體薄膜, 抵抗薄膜을 차례로 蒸着시킨 構造 또는 金屬板과 p-n 接合을 갖는 半導體形式 (바이어스電壓을 걸어 정션 캐파시턴스를 利用함)으로 만들어진다. 金屬體와 抵抗體兩端에서 端子를 뽑아내어 1—port 또는 2—port 裝置로 使用하여 어떤 特性을 얻자는 것이다. R,C 層이 均質하고 두께, 幅이 一定한 경우는 均一線路에 해당하나 幾何學的 構造가 均一하지 않던지 導電率 ρ, 誘電率 ε이 一定하지 않으면 R,C가 距離의 函數가 되어 不均一系가 된다. R,C의 層을 여러개 交代로 形成시킨 多層構造도 生覺할 수 있으며 이경우 導體層과 各 R層의 兩端에서 端子를 뽑아내면 多端子回路가 생긴다. 또 이構造를 2-port 장치로 使用할때 port의 선택에따라 (다른 端子는 開放 또는 어느 다른 端子와도 短絡시킬수 있으므로 實로 多樣의 선택의 가능성이 존재한다.) 여러가지 傳達特性이 얻어진다. 各種周波數 選擇回路(LPF, HPF, BPF 등) 積分回路, 遲延回路, 移相回路등은 그 用

*서울大學校 工科大學 電子工學科
(Dept. of Electronics Eng., Engineering College, Seoul National Univ.)

接受日字 1966. 3. 2.

途의 數例이다.

固體回路의 一部로서의 R-C 分布回路는 비록 그 길이가 數 mm 일지라도 低周波數에서도 分布回路로 다루어야만 하는 理由는 ρ, ε 이 크고 層의 두께가 얇아서 系內에서의 波長이 극히 짧아지는데에 起因한다. 分布回路를 記術하는 電壓, 電流의 微分方程式의 解는 $R(x)$, $C(x)$ 의 특별한 雙에 대해서만 closed form 으로 求해지며 그것도 一般的으로 複素周波數 s 의 복잡한 超越函數가 된다. 따라서 回路網函數도 s 의 超越函數가 되고 그 極限點이 s 一平面의 負實軸上에 無限個 나타난다. (特別한 多層構造에서는 回路網函數의 一部만이 s 의 有理函數가 되게 할 수 있다.) 이것은 集中定數回路의 回路網函數와는 判異한 성질이며 R-C 分布回路의 解析 및 合成이 곤란한 理由는 여기에 있다. R-C 分布回路의 硏究에서 무엇보다도 기초적인 작업은 될수 있는대로 많은 $R(x)$, $C(x)$의 雙에 對해서 微方의 正確한 解를 求해 놓는일이다. 이에 관련하여 筆者는 R, C 各 한層인 構造에 있어서 (本論文에서는 이런構造만을 취급한다.) 어떤 $R(x)$, $C(x)$의 雙에대한 旣知의 解로 부터 無限個의 $R(x)$, $C(x)$ 의 雙에대한 正確한 解를 구하는 간단한 方法을 얻었다. 또 現在 기술적으로는 $R(x)$, $C(x)$의 層의 두께가 一定하고 幅만이 變하는 그림 1과 같은 回路만이 實現性이 있는데 (특히 薄膜構造에서 그렇다) 이경우 $R(x) \cdot C(x) =$ 一定 이라는 制限이 있게 된다. 그러나 筆者는 이와같은 관계가 성립안되는 임의의 回路에 대해서도 端子에 관한限 이와 等價的이고 $R(x) \cdot C(x) =$ 一定의 관계를 갖는 回路를 우선 圖解的으로 구하는 方法을 얻었으며 또 그것이 妥當함을 解析的으로 증명도하였다. 비슷한 方法으로 임의의 R-C 分布回路를 $R(x)$, $C(x)$ 中 한쪽이 一定하고 다른쪽만이 變하는 等價回路로 代置하여 解析 및 合成의 統一性과 容易性을 얻는 方法도 提示했다. 최후로 筆者는 임의의 두 종류의 分布素子를 가지고 1—port 및 2—port 回路를 合成하는 一般的인 方法을 論했다.

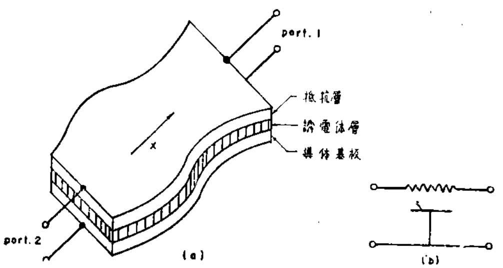


그림 1. 2—port 의 R-C 分布回路 b 는 回路圖表示

(Fig.1 2—port R-C distributed circuit)

2. R-C 分布回路의 微分方程式

直列임피던스 並列애드미턴스가 거리에 따라 심하게 변하지않는 線路는 一次元 문제로 취급할수 있으며 이경우의 基礎微分方程式을 라프라스變換된 形式으로 表示하면

$$\frac{dV(x,s)}{dx} = -Z(x,s) \cdot I(x,s), \quad \frac{dI(x,s)}{dx} = -Y(x,s) \cdot V(x,s)$$

여기서 V, I 는 入力端에서 거리 x 인點의 電壓, 電流이고 Z, Y 는 2點의 直列임피던스, 並列애드미턴스이다. s 는 물론 複素周波數이다. $R-C$ 分布回路의 경우 上式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dV(x,s)}{dx} = -R(x)\ I(x,s), \quad \frac{dI(x,s)}{dx} = -sC(x)\ V(x,s) \cdots(1)$$

여기서 $R(x)$, $C(x)$는 各層의 單位長當의 抵抗, 캐파시턴스이고 C 層은 無損失로 가정했다. 第1式을 x 에 관하여 微分하고 第2式을 代入하면 電壓에대한 微方이 얻어진다. 즉

$$\frac{d^2V}{dx_2} - \frac{1}{R(x)} \cdot \frac{dR(x)}{dx} \cdot \frac{dV}{dx} - sR(x)\,C(x)V = 0 \cdots\cdots\cdots(2)$$

마찬가지로 電流에 대해서는

$$\frac{d^2I}{dx_2} - \frac{1}{C(x)} \cdot \frac{dC(x)}{dx} \cdot \frac{dI}{dx} - sR(x)C(x)V = 0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

이것들은 線型이기는 하나 係數들이 獨立變數의 函數이므로 $R(x)$, $C(x)$가 x 의 特殊한 함수인 경우에 限해서 closed form 의 解가 얻어진다. 2階微分이므로 例컨데 電壓에 대한 一般解는

$$V(x,s) = C_1 f(x,s) + C_2 g(x,s) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

와 같이된다. C_1, C_2 는 分布回路兩端의 條件에의하여 定해지는 積分常數이다. 後의 參考를 위하여 表1에 몇가지 線路에 對한 解와 一部의 回路網函數를 羅列하였다.

表 1. 代表的線路에 對한 電壓方程式의 解와 回路網函數

	均一線路	指 數 線 路	三 角 線 路	Bassel 線路
$R(x)$	R_0	$R_0 e^{2dx}$	$R_0[\sin\alpha(x-x_0)]^{-2}$	$(1+\alpha x)^p$
$C(x)$	C_0	$C_0 e^{-2dx}$	$C_0[\sin\alpha(x-x_0)]^2$	$(1+\alpha x)^q$
$f(x,s)$	e^k	$e^{(\alpha+\sqrt{\alpha^2+k^2}) \cdot x}$	$\dfrac{e^{\sqrt{k^2-\alpha^2} \cdot x}}{\sin\alpha(x-x_0)}$	$y^{\frac{1}{2}(1+p)} J_{+k}\left[\dfrac{2j\sqrt{b}}{2+p+q} \cdot y^{\frac{1}{2}(p+q+2)}\right]$

$g(x,s)$	e^{-k}	$e^{(\alpha-\sqrt{\alpha^2+k^2})x}$	$\dfrac{e^{-\sqrt{k^2-\alpha^2}x}}{\sin\alpha(x-x_0)}$	$y^{\frac{1}{2}(1+p)}J_{-k}\Big[$ 〃 〃 $\Big]$
y_{11}	$\dfrac{k}{R_0}\coth kL$	$\dfrac{1}{R^0}\Big(\dfrac{\theta}{L}\cosh\theta-\alpha\Big)$	$\dfrac{1}{R_{(0)}}\Big[\dfrac{\theta}{L}\coth\theta-\alpha\tan\alpha(x-x_0)\Big]$	省 略
y_{12}	〃	$\dfrac{e^{-2\alpha L}}{R_0}\Big(\dfrac{\theta}{L}\coth\theta+\alpha\Big)$	$\dfrac{1}{R_{(L)}}\Big[\dfrac{\theta}{L}\coth\theta-\alpha\tan\alpha(x-x_0)\Big]$	〃
$y_{12}=y_{21}$	$-\dfrac{k}{R_0}\mathrm{csch}kL$	$\dfrac{-e^{-dL}}{R_0}\cdot\dfrac{\theta}{L}\mathrm{csch}\theta$	$\dfrac{-\theta}{L\sqrt{R_{(0)}R_{(L)}}}\cdot\mathrm{csch}\theta$	〃
備考	$k=\sqrt{sR_0C_0}$, L=길이 y_{ij} 는 admittance parameter,	$\theta=\begin{cases}L\sqrt{\alpha^2+k^2}(\text{지수선로})\\L\sqrt{k^2-\alpha^2}(\text{삼각선로})\end{cases}$		$k=\dfrac{1+p}{2+p+q}$, $y=1+\alpha x$ $b=sC_0R_0/\alpha^2$ $J_{\pm k}$ 는 Bassel 函數

3. 旣知의 解로부터 다른 解를 얻는 方法

基礎方程式

$$\frac{dV}{dx}=-R(x)I,\qquad \frac{dI}{dx}=-sC(x)V\cdots\cdots(5)$$

로 부터 電壓方程式

$$\frac{d^2V}{dx^2}-\frac{1}{R(x)}\cdot\frac{dR(x)}{dx}\cdot\frac{dV}{dx}-sR(x)C(x)V=0\cdots\cdots(6)$$

가 얻어지는데 지금 어떤 $R(x)$, $C(x)$에 대한 解가

$$V=C_1f(x,s)+C_2g(x,s)\cdots\cdots(7)$$

와 같이 求해졌다고 하자 그러면 u가 x의 임의의 함수일때

$$R_1(x)=R(u)\frac{du}{dx},\qquad C_1(x)=C(u)\frac{du}{dx}\cdots\cdots(8)$$

인 分布回路에 대한 기초方程式은

$$\frac{dV}{dx}=-R_1(x)I,\qquad \frac{dI}{dx}=-sC_1(x)V$$

또는 $$\frac{dV}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-R(u)\cdot\frac{du}{dx}I$$

$$\frac{dI}{du}\cdot\frac{du}{dx}=-sC(u)\,\frac{du}{dx}\,V$$

또는 $$\frac{dV}{du}=-R(u)I,\qquad \frac{dI}{du}=-sC(u)V\cdots\cdots(9)$$

와 같이된다. 式(9)는 式(5)에서 x를 u로 代置한것에 不過하므로 電壓方程式도 式(6)의 x를 u로 代置한것 따라서 그 解도 式(7)의 x를 u로 代置한

$$V=C_1f(u,s)+C_2g(u,s)\cdots\cdots(10)$$

와 같다. 즉 어떤 $R(x)$, $C(x)$에 대한 方程式의 解가 旣知일때 R,C가 $R(u)\dfrac{du}{dx}$, $C(u)\dfrac{du}{dx}$(u는 x의 任意의 함수)와 같이 변하는 回路의 解는 前者의 解에서 x를 u로 代置함으로써 쉽게求해진다. 더 구체적으로 例를 들어 설명하면 $R(x)=R_0e^{2\alpha x}$, $C(x)=C_0e^{-2\alpha x}$인 指數線路의 電壓方程式의 解는

$$V=C_1e^{\sqrt{sR_0C_0}x}+C_2e^{-\sqrt{sR_0C_0}x}$$

인 것을 우리는 알고 있으므로 (表1參照).

$$R(x)=R_0e^{2\alpha u}\frac{du}{dx},\ C(x)=C_0e^{-2\alpha u}\cdot\frac{du}{dx}$$ (u는 x의 임의함수)인 선로의 解는

$$V=C_1e^{\sqrt{sR_0C_0}u}+C_2e^{-\sqrt{sR_0C_0}u}$$

와 같다. 그래서 가령 $u=x^2$이라하면

$$R(x)=2R_0xe^{2\alpha}x^2,\qquad C(x)=2C_0xe^{-2\alpha}x^2$$

인 서로의 解는

$$V=C_1e^{\sqrt{sR_0C_0}x^2}+C_2e^{-\sqrt{sR_0C_0}x^2}$$

와 같고 또 $u=\cosh bx$ (b는 定數)이라 하면

$$R(x)=R_0e^{2\alpha\cosh bx}\cdot b^{\sinh bx},\ C(x)=C_0e^{-2\alpha\cosh bx}\cdot b^{\sinh bx}$$

인 서로의 解는

$$V=C_1e^{\sqrt{sR_0C_0}\cosh bx}+C_2e^{-\sqrt{sR_0C_0}\cosh bx}$$

와 같이된다.

이것들이 실제로 解가 되는것은 電壓方程式 (6)에 代入하여보면 알수 있다. 이와같이 指數線路 하나만의 解로 부터 많은 다른 構造의 線路의 解를 求할수 있는 것이다. 이와같이 求해진 解에 대하여 다시 同一한 演算을 되풀이하여 또 많은 새로운 解등을 얻을수 있음은 勿論이다.

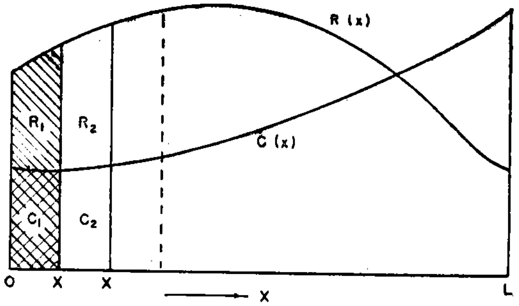
4. $R(x)\cdot C(x)$=一定의 관계를 갖는 等價回路

緖論에서 言及한 바와 같이 現在 技術的으로는 ρ,ε이 一定하고 各層의 두테가 一定하고 幅만이 변하는 R-C 分布回路가 實現 하기쉽다. 이경우 $R(x)$는 幅에 反比例하고 $C(x)$는 幅에 比例하므로 兩者의 積은 一定하게 된다. 지금 回路合成에 있어서 어떤 要求條件을 만족하는 $R(x)$, $C(x)$의 變이 구해졌다고 하자. 그것이 萬一 $R(x)\cdot C(x)$=一定의 관계를 가지고 있지 않을때, 그것을 이와같은 관계를 갖는 回路로 等價變換할 수 있다면 回路實現上 매우 有用할 것이다.

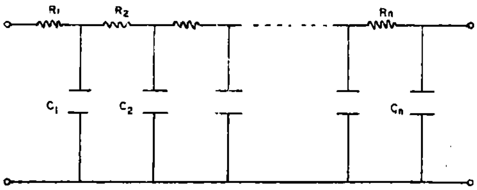
그림 2(a)는 길이 L인 任意의 R-C 分布回路의 $R(x)$, $C(x)$의 變化를 나타낸다. 길이 L을 n區間으로 等分하고 各區間의 抵抗 및 캐파시턴스에 해당하는 集中抵抗, 集中캐파시턴스로된 同圖(b)와 같은 集中定數 梯子型回路를 생각한다. 즉 (a), (b)에서

$$\left.\begin{aligned} R_1&=\int_0^{x_1}R(x)dx,\ R_2=\int_{x_1}^{x_2}R(x)dx\cdots\cdots \\ C_1&=\int_0^{x_1}C(x)dx,\ C_2=\int_{x_1}^{x_2}C(x)dx\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots(11)$$

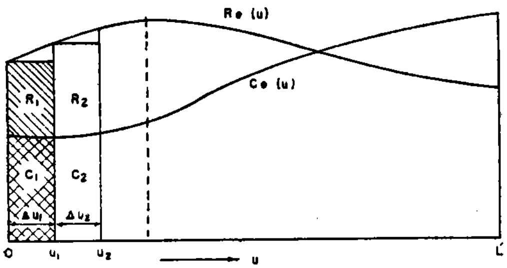
n을 充分히 크게하면 (b)의 集中定數回路는 (a)의 分布定數回路와 近似的으로 等價가되며 $n\to\infty$의 極限에 있어서는 正確히 等價가 된다. 다음에 $R\cdot C$=一定인 관계를갖고 그 等價微小集中定數回路가 그림 2(b)와 같이 표시되는 R-C 分布回路를 求해보자. 이 後者의 回路에서 入力端부터의 거리를 u라하고, 2點에서의 單位長當의



(a)



(b)



(c)

그림 2. R-C 分布回路에서의 $R(x)$, $C(x)$의 變化
(Fig. 2 The variations of $R(x)$ and $C(x)$ in a R-C distributed circuit)

抵抗 및 캐파시턴스를 $Re(u)$, $Ce(u)$라 하자. 그러면 그 各區間에서는 다음 관계가 성립되어야 할 것이다. (그림 2(c)참조).

$$\left.\begin{aligned} Re(o)\cdot\triangle u_1&=R_1,\ Re(u_1)\cdot\triangle u_2=R_2,\cdots\cdots \\ Ce(o)\cdot\triangle u_1&=C_1,\ Ce(u_1)\cdot\triangle u_2=C_2,\cdots\cdots \end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots(12)$$

$$Re(o)\cdot Ce(o)=Re(u_1)\cdot Ce(u_1)=\cdots=K(\text{一定})\cdots(13)$$

그러므로 第一區間에 對해서는

$$\frac{Re(o)}{Ce(o)}=\frac{R_1}{C_1},\ Re(o)\cdot Ce(o)=K$$

의 관계로부터 $Re(o)$, $Ce(o)$를 구하고 또 $\triangle u_1=\dfrac{R_1}{Re(o)}$에 의하여 $\triangle u_1$을 定하면된다. 第二, 第三區間도 마찬가지로하여 各區間의 길이 및 $Re(u)$, $Ce(u)$의 値를 順次로 定해진다. 최후로 $Re(o)$, $Re(u_1)$,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$; 및 $Ce(o)$, $Ce(u_1)$,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$를 미끄러운 曲線으로 연결 하면 이것이 곧 (b)와 近似的으로 等價가 되는 $Re(u)\cdot Ce(u)=K$인 分布回路가 되는것이다.

區間數 n을 ∞로 하면 (b)와 (a), (b)와 (c) 따라서 (a)와 (c)는 正確하게 等價가 된다. 이 극한의 경우에 式(12), (13)은 式(11)을 참조하여 다음과 같이 表示된다.

$$\left.\begin{aligned} \int_0^x R(x)dx&=\int_0^u Re(u)du \\ \int_0^x Ce(x)dx&=\int_0^x Ce(u)du \end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

$$Re(u)\cdot Ce(u)=K\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

式(14)에서 積分의 上限 x, u는 兩回路에 對應하는 거리이다. 一旦 이 原理를 解得하면 (b)를 거치지않고 (a)에서 직접 (c)를 作圖하는것은 容易한 일이다. 다음에는 以上의 圖解的方法이 妥當함을 解析的으로 증명하자. 式(14)의 兩邊을 x에 관하여 미분하면

$$R(x)=Re(u)\cdot\frac{du}{dx},\qquad C(x)=Ce(u)\frac{du}{dx}\ \cdots\cdots\cdots(16)$$

이 두式을 곱하고 式(15)의 관계를 이용하면

$$R(x)\cdot C(x)=K\left(\frac{du}{dx}\right)^2$$

따라서

$$u=\frac{1}{\sqrt{K}}\int_0^x\sqrt{R(x)\cdot C(x)}dx=h(x)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

이것이 兩回路의 獨立變數 u와 x와의 函數關係다. u는 x의 單調增加函數이고 $x=0$일때 $u=0$이고 또 $x=L$일때 $u=L'$라 하면

$$L'=\frac{1}{\sqrt{K}}\int_0^L\sqrt{R(x)\cdot C)x)}dx\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

이것이 兩回路의 길이의 相互關係이며 K를 적당히 함으로서 等價回路의 길이 L'를 임의로 조절할 수 있음을 알 수 있다. 한편 兩系를 記述하는 基礎微分方程式은

$$\frac{dV}{dx}=-R(x)I,\qquad \frac{dI}{dx}=-C(x)V\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\frac{dV}{du}=-Re(u)I,\qquad \frac{dV}{du}=-Ce(u)V\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

式(20)의 兩邊에 $\dfrac{du}{dx}$을 곱하고 (16)의 관계를 이용하면 式(19)가 얻어진다. 즉 式(19)와 式(20)은 式(16) 따라서 式(17)의 變數관계에 의하여 相互變換된다. 그러므로 式(20)의 一般解에서 u代身에 式(17)로 定義된 $h(x)$를 代入하면 式(19)의 一般解가 얻어진다. 그러므로 $u=0$, $u=L'$에 임의의 境界條件을 줄때의 式(20)의 特解는 對應하는 點 $x=0$, $x=L$ (L와 L'와의 관계는 式

(18)로 줄어짐)에 同一한 경계조건을 줄때의 式(19)의 特解와 一致한다. 이것은 곧 길이 L인 原回路와 길이 L'인 變換된 回路가 端子外部에 對해서 等價임을 말하는 것이다.

5. R(x)=一定인 等價回路와 近似的合成

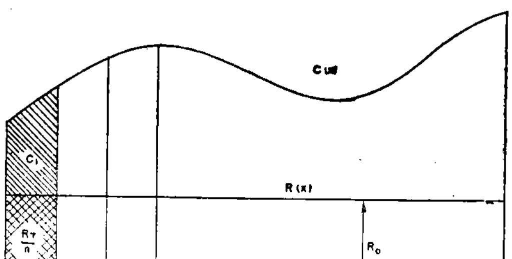
前節에서는 $R(x)$, $C(x)$가 서로 무관계하게 變하는 任意의 分布回路를 實現의 便宜上 $R(x)\cdot C(x)$=一定의 관계를 갖는 回路로 等價變換하는 方法을 記述하였거니와 이 技巧을 그대로 적용하여 任意의 回路를 $R(x)$=一定, $C(x)$=可變 또는 $C(x)$=一定, $R(x)$=可變인 回路로 等價變換할 수 있다. 解析 또는 合成의 觀點에서 볼때 한쪽만이 可變인 경우가 다루기 쉬운것은 勿論이다.

이제까지 여러 사람들이 $R(x)$, $C(x)$의 여러가지 變에 대하여 硏究하여 왔지만 어느 한쪽만이 可變인 回路만을 生覺하면 足하다는 것은 分布回路硏究에서의 한 進展을 가져오는것으로 看做할 수 있다. 앞으로 $R(x)$=一定$=R_0$인 回路를 생각하자 ($C(x)$= 一定인 경우도 全혀 同一하게 취급된다.) 이경우의 變換關係式은 式(14) 및 $R(u)=R_0$이고 u와 x와의 관계는

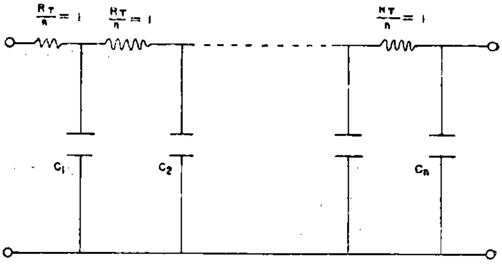
$$u=\frac{1}{R_0}\int_0^x R(x)dx$$

임을 용이하게 알수있다. R_0의 値는 等價回路의 全抵抗 $R_0\cdot L'$가 原回路의 全抵抗과 같도록 취하면된다. 圖解的으로 等價回路를 求하는데 있어서는 原回路의 길이 L을 n等分하는 代身에 各區間에서이 抵抗이 모다 R_T/n (R_T : 全抵抗)와 같도록 定하고 또 兩回路에서 對應하는 各區間에서의 캐파시턴스가 같아지도록 $Ce(u)$를 定하면 된다.

이리하여 모든 R-C分布回路는 그림 3(a)에 표시한 $R(x)$= 一定인 回路로 等價變換할 수 있는데 이에 있어서도 回路網數들은 s의 超越函數임을 免치 못한다. 또 極, 零點이 s平面上 負實軸上에 無限個나타난다. 그러므로 주어진 周波數特性을 엄밀하게 만족하는 R-C分布回路를



(a)



(b)

그림 3. $R(x)$= 一定인 R-C 分布回路

(Fig.3. R-C distributed circuit, $R(x)$=constant)

合成 한다는 것은 지극히 곤난하다. 차라리 分布回路와 近似的인 集中定數回路를 생각하여 近似的으로 문제를 解決하는 길을 擇하는 것이 賢明할것같다. 즉 그림 3(a)의 分布回路를 n等分하여 各區間의 R,C에 해당하는 直列抵抗 並列캐파시턴스로 구성된 同圖 (b)와 같은 梯子型 R-C 集中回路를 생각하면 兩者의 回路網函數의 形式은 天壤之差 (하나는 s의 超越函數 하나는 s의 有理函數) 이지만 周波數特性은 거의 同一하다. n을 크게 할수록 더욱 一致하지만 취급하기 어려워지므로 近似的方法의 有利性이 없어진다.

等分하므로 直列素子의 抵抗은 모다 R_T/n인데 취급의 便宜上 이것을 規準化하여 1Ω로 하자. 또 캐파시턴스도 規準化하여 全캐시파스턴스를 n farad로 하면 C_i ($i=1, 2, \cdots n$)들이 1 farad 內外가 되어 취급하기쉽다. (集中定數回路에서나 分布定數回路에서나 R을 k倍하고 C를 $1/k$倍하면 極, 零點의 位置는 不變이고 임피던스 레벨만이 k倍가된다. 또 R을 그대로 두고 C만을 k倍하면 極, 零點의 位置는 $1/k$倍의 位置로 推移되고 임피던스 레벨은 不變이다.) 그러면 近似的集中回路의 回路網函數들의 極, 零點은 C_1, C_2, ……C_n로 表示되고 反對로 極, 零點을 알면 C_1, C_2, ……C_n을 구할 수 있다. 一般的으로 그림 3(b)의 회로의 驅動點임피던스는 s一平面의 負實軸上에 交代로 나타나는 極, 零點 各 n個를 가지며 開放 傳達임피던스 Z_{12}는 極만을 n個 가진다. 한가지 주의할것은 C_i들이 너무 急激히 變하면 對應하는 分布回路의 $C(x)$도 急激히 변하므로 一次元問題의 假定에서 멀어져 결국 많은 誤差를 가져온다는 것이다. C_i들이 급격히 변할때의 極, 零點의 位置는 C_i들이 同一한경우 (均一線路의 對應)의 分布에서 더욱 推移될 것이 豫想되므로 兩者의 分布狀態를 비교함으로써 (두 回路의 全 캐파시턴스는 같게하고 比較해야함) 결과적으로 얻어지는 誤差의 大小를 짐작할 수 있을 것이다. 이 方法에서 또 한가지 문제는 주어진 周波數特性 (크기와 주파수 관계 또는 位相角과 주파수 관계)을 어떻게 次數 n의 有理函數로서 近似시키는가 하는 것인데 이것은 集中定數回路理論에서 充分히 發展되어 있으므로 여기서는 省略한다. 이 近似的方法이 주파수가 높아 질수록 큰 偏差를 가져 오는것은 避할 수 없음을 附言한다.

6. 두 種類의 R-C 分布素子에 의한 回路網合成

前節에서는 R-C分布素子 하나만으로써 주어진 주파수특성을 만족하는 回路를 求하는 近似的方法을 論하였거니와 素子하나만으로서는 實現할 수 있는 特性에 아무래도 制限이 있게된다. 그러므로 여기서는 두 種類의 素子 여러개를 가지고 1—port, 2—port 回路를 合成하는 문제를 생각하자.

R-C分布回路의 驅動點임피던스는 모두 임피던스레벨을 나타내는 係數와 s의 函數와의 積으로 表示된다. 즉

$$Z(s)=a\cdot W(s)$$

例컨데 短絡된 指數線路의 驅動點임피던스는 表1을 참고로

$$Z(s)=R_0[\sqrt{\alpha^2+sR_0C_0}\ \coth L\sqrt{\alpha^2+sR_0C_0}-\alpha]^{-1}$$

임으로 R_0=入力端에서의 單位長當抵抗$=a$,

$$W(s)=[\sqrt{\alpha^2+sR_0C_0}\ \coth L\sqrt{\alpha^2+sR_0C_0}-\alpha]^{-1}$$

로 보면된다. $W(s)$가 同一하고 a만이 다른 한 종류의 素子들을 생각할 수 있다. 例컨데 위의 指數分布素子에서 flare constant α, 길이 L, R_0C_0가 同一하고 R_0만이 다른 (R_0의 변화에따라 C_0가 反比例하여 변해야함) 여러 素子들이 存在한다. 그래서 두 종류의 素子들의 임피이던스를

$$Z_1(s)=a_1W_1(s),\ Z_2(s)=a_2W_2(s)$$

와 같이 表示하자. 同種의 素子에서는 $W_1(s)$ 또는 $W_2(s)$는 同一하고 임피던스 레벨에 관계되는 定數 a_1 또는 a_2만이 다르다. 上式을 다음과 같이 써보자.

$$Z_1(s)=a_1\sqrt{W_1(s)\cdot W_2(s)}\cdot\sqrt{\frac{W_1(s)}{W_2(s)}}$$

$$Z_2(s)=a_2\sqrt{W_1(s)\cdot W_2(s)}\cdot\sqrt{\frac{W_2(s)}{W_1(s)}}$$

또는

$$Z_1(s)=f(s)\cdot a_1p,\ Z_2(s)=f(s)\cdot\frac{1}{(1/a_2)p}\quad\cdots\cdots\cdots(21)$$

但

$$f(s)=\sqrt{W_1(s)\cdot W_2(s)},\ p=\sqrt{W_1(s)/W_2(s)}\quad\cdots\cdots(22)$$

그러면 이 두 종류에 속하는 모든 素子들에 있어서 p는 同一하고 $f(s)$는 共通因子이고 a_1, a_2만이 변한다. p는 s의 함수임으로 이것을 變換된 周波數로 看做할수 있다. 그러면 p의 領域에서는 a_1p는 誘導性리액턴스 $\frac{1}{(1/a_2)p}$는 容量性리액턴스를 나타낸다. (a_1이 L, $1/a_2$이 C에 해당함).

(i) 1—port 回路網의 合成 Z_1, Z_2의 두 종류의 分布素子로 구성된 回路網을 생각하자. $f(s)$는 모든 素子의 임피이던스에 共通이므로 우선 $f(s)$를 除外하고 생각하면 各素子가 p의 領域에서는 L 또는 C에 해당하므로 이 回路網의 驅動點임피던스의 表示式은 보통의 集中定數回路網의 리액턴스函數와 同一形式이 될것이다. $f(s)$까지 생각하면 $f(s)$가 이 表示式에 한 係數로 나타나리라는 것은 容易하게 알수있다. 결국

$$Z(s)=f(s)\cdot H\cdot\frac{p(p^2+\beta^2{}_3)(p^2+\beta^2{}_5)\cdots(p^2+\beta^2{}_{2n+q})}{(p^2+\beta^2{}_2)(p^2+\beta^2{}_4)\cdots(p^2+\beta^2{}_{2n})}\quad(23)$$

또는

$$Z(s)=f(s)\cdot H\frac{(p^2+\beta^2{}_2)(p^2+\beta^2{}_4)\cdots\cdots(p^2+\beta^2{}_{2n})}{p(p^2+\beta^2{}_3)(p^2+\beta^2{}_5)\cdots(p^2+\beta^2{}_{2n+q})}\quad(24)$$

但 $H>0$, $0<\beta_2<\beta_3<\cdots\cdots$, $q=+1$ 또는 -1.

驅動點애드미턴스의 表示式에는 물론 $1/f(s)$가 붙는다.

다음에는 驅動點임피던스가 式(23) 또는 (24)로 주어졌을때 이것을 Z_1, Z_2의 두 종류의 分布素子로 實現하는 문제를 생각하자. 여기서도 集中 리액턴스 1—port 回路網의 合成法에 관한 지식을 그대로 응용 할 수 있다. 즉 $f(s)$를 除外한 表示式을 部分分數 또는 連分數로 展開한 다음 各項에 $f(s)$를 곱하면 各項은 式(21)의 임피던스들로 表示되므로 Foster 또는 Cauer 形의 回路로 實現할 수 있다.

(ii) 2—port 回路網의 合成

위의 고찰로부터 임의의 두 종류의 分布素子들로 된 2—port 回路網의 回路網函數도 變換된 주파수 p로서 表示하면 보통의 集中리액턴스 2—port 回路網의 函數와 同一形式이 되리라는 것은 쉽게 알 수 있다. 다만 주의할것은 임피던스의 元을 갖는 函數에는 $f(s)$라는 계수가 붙고 또 애드미턴스의 元을 갖는 函數에는 $1/f(s)$라는 계수가 붙으나 電壓比 또는 電流比등을 나타내는 元이 없는 함수에는 $f(s)$가 붙지않고 p만의 有理函數가 된다는 것이다. 그래서 例컨대 開放임피던스파라메터는

$$\left.\begin{aligned}z_{11}&=f(s)\cdot\frac{(p^2+q)(p^2+25)}{p(p^2+16)}\\ z_{12}&=f(s)\cdot\frac{(p^2+1)(p^2+4)}{p(p^2+16)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

와 같은 形式이되고 이경우의 開放電壓比는

$$g_{12}=\frac{V_2}{V_1}\bigg|_{I_2=0}=\frac{z_{12}}{z_{11}}=\frac{(p^2+1)(p^2+4)}{(p^2+9)(p^2+25)}$$

와 같이된다. 回路網函數가 이와같은 形式으로 주어졌을때 그것을 實現하는 方法도 集中定數 리액턴스回路網合成法을 그대로 응용할 수 있다. 例컨데 式(25)가 주어졌을 때에는 對應하는 集中定數 리액턴스函數

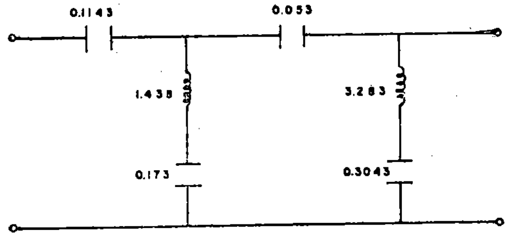
$$z_{11}=\frac{(s^2+9)(s^2+25)}{s(s^2+16)}$$

$$z_{12}=\frac{(s^2+1)(s^2+4)}{s(s^2+16)}$$

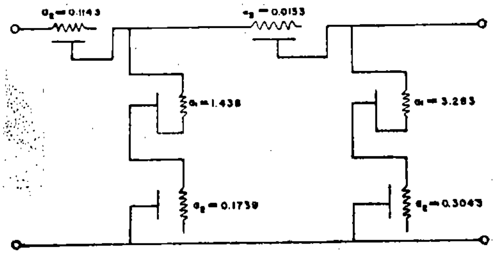
을 생각하여 이것이 그림 4(a)와 같이 實現되므로 所要의 分布素子로 된 回路網은 同圖(b)와 같다

回路圖에는 두 종류의 素子를 區別하기 위하여 Z_1이 開放임피던스 Z_2가 短絡임피던스를 나타내는 것으로하여 表示하였다.

(iii) 特性의 近似法



(a)



(b)

그림 4. (25)式의 例의 集中定數回路및 分布定數回路
(Fig.4 Lumped circuit and distributed circuit of the example of Eq.25)

위에서는 分布回路의 回路網函數가 變換된 주파수 p 의 有理函數 〔및 係數$f(s)$〕에 의하여 주어진 것으로 가정하였다. 그러나 실제에 있어서는 要求되는 特性(크기 또는 位相角의 주파수 特性)이 實周波數 ω 의 函數로서 그라프에 의하여 주어지는 경우가 대부분이므로 이것을 如何히 上記形式으로 表示하겠는가 하는 문제가 일어난다.

문제를 더 구체적으로 하기 위하여 Z_1이 한 종류의 RC 均一分布素子의 開放임피던스를 代表하고 Z_2가 한 종류의 RC 指數分布素子의 短絡임피던스를 代表한다고 하면

$$Z_1(s)=R_0\cdot\frac{\coth L_1\sqrt{sR_0C_0}}{\sqrt{sR_0C_0}}$$

$$Z_2(s)=R(o)\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+SR(o)C(o)}\cdot\coth L_2\sqrt{\alpha^2+SR(o)C(o)}-\alpha}$$

간단을 위하여 $L_1=L_2=1$, $R_0C_0=R(o)C(o)=1$ 인 경우를 생각하면

$$Z_1(s)=R_0\frac{\coth\sqrt{s}}{\sqrt{s}}$$

$$Z_2(s)=R(o)\cdot[\sqrt{\alpha^2+s}\coth\sqrt{\alpha^2+s}-\alpha]^{-1}$$

指數素子들의 flare constant α는 모두 같아야한다. $a_1=R_0$, $a_2=R(o)$로 보면 $f(s)$, $p(s)$는 式(22)로부터

$$f(s)=\left[\frac{\coth\sqrt{s}}{\sqrt{s}(\sqrt{\alpha^2+s}\coth\sqrt{\alpha^2+s}-\alpha)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$p(s)=\left[\frac{\coth\sqrt{s}}{\sqrt{s}}(\sqrt{\alpha^2+s}\cdot\coth\sqrt{\alpha^2+s}-\alpha)\right]^{\frac{1}{2}}$$

式(23)~(24)에서 보다시피 두 종류의 分布素子들로 구성된 回路網의 回路網函數는 모다 $f(s)$, $p(s)$, $p^2+\beta^2$ (β는 正實數)의 세가지 因子의 積, 商으로 구성되므로 미리 $f(j\omega)$, $p(j\omega)$, $p^2(j\omega)+\beta^2$의 크기와 角들을 계산하여 (이 最終項에서는 β를 파라메터로 하여야할 電子計算機의 힘을 빌려야 할것임) ω의 함수로서 그라프를 그려놓는다. 크기는 dB로 表示하는것이 좋을 것이다. 그러면 例컨대 驅動點임피던스의 크기 의 주파수특성이 dB로 주어졌을때 우선 여기에서 $20\log|f(j\omega)|$ dB를 減하고 다시 $20\log|p(j\omega)|$ dB를 加 또는 減한남어지가 $20\log|p^2(j\omega)+\beta^2|$ dB의 數個의 그라프 (β가 다른것)의 加減과 可及的 같게 되도록 맞춘다. 이렇게 함으로써 式(23) 또는 (24)와 같은 表示式을 얻을 수 있다.

擇한 두 종류의 Z_1, Z_2로서 주어진 특성을 만족시킬 수 없을 때에는 다른 雙의 Z_1, Z_2에 대하여 反復하여야 한다. 集中定數回路가 달라서 R-C 分布素子의 種類는 無數히많지만 실제의 製作上의 문제를 고려하여 可能하면 간단한 素子들을 擇해서 實現하도록 해야 할것이다.

7. 結 論

어떤 R-C 分布回路의 微分方程式의 解가 既知일때 이것을 이용하여 多數의 다른 分布回路의 微方의 解를 求하는 方法이 얻어졌다. 任意의 R-C 分布回路를 製作의 便宜上 $R(x)C(x)=$ 一定인 回路로 等價變換하는 圖解的方法이 얻어졌으며 解析的證明도 可能하다. 또 理論的 取扱의 統一과 簡單을 위하여 任意의 R-C 分布回路를 $R(x)$, $C(x)$ 어느 한쪽이 一定한 回路로 等價變換하는 方法이 얻어졌다. 이 後者의 回路와 近似的인 集中定數回路를 생각함으로써 分布回路의 近似的인 解析, 合成이 比較的 간단하게 이루어 질수있다. 最後로 周波數變換의 개념을 이용하여 두 종류의 分布素子에 의한 1—port, 2—port 回路網 合成을 集中定數 리액턴스回路網 合成法에 準하여 할 수 있다. 이 方法은 한쪽이 分布素子 다른쪽이 集中素子 또는 兩쪽이다 集中素子인 경우에도 擴大適用 될 수 있다.

R-C 分布回路의 回路網函數 s가 의超越函數이고 그 極, 零點이 無限個있다는 사실은 分布回路實現에 必要하고 充分한 條件을 求하는것을 至難하게 한다. 그러나 近似的인 集中回路를 생각함으로써 近似的인 條件을 求하는것은 어렵지 않을 것이다. 本文에서 고찰할 R,C 各 한層만의 구조로서는 이 條件이 매우 制限되고 있음이 틀림없으므로 (例컨대임피던스의 크기는 ω의 單調減少函數가 되는等) 앞으로는 多層構造에 관한 연구가 필요하겠으나 均一構造以外에는 理論的 取扱이 더욱 어려워진다.

參 考 論 文

1. L. Grunner, "The Steady-State Characteristies

of Non-Uniform RC Distributed Networks and Lossless Lines", IEEE. Trans. on Circuit Theory, Vol. CT—12, June, 1965.

2. J. Kelly and M. Ghausi, "Network Properties of Distributed RC Networks with Arbitrary Geometric Shapes," New York University Technical Report 400-107, 1965.

3. M.J. Hellstrom, "Equivalent Distributed RC Networks or Transimission Lines," IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT—9, Sept, 1962.

4. D. Roy, "Some Exactly Solvable Non-Uniform RC Lines," IEEE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-12, March, 1965.

5. R.W. Wyndrum, "The Exact Synthesis of Distributed RC Networks," New York University Technical Report 400-76, May, 1963.

6. A. Tachibana, "Synthesis of Distributed RC 1—port Networks. J. IEE, Japan, 1963.