解 說 15—3—1

安實性判別을 爲한 Parameter Plane Method

—— Šiljak의 論文을 中心으로——

李 亮 秀*

1. 序 論

制御理論은 安定性判別을 中心으로 發達하여 왔으며 制御工學自体가 하나의 技術인 以上 安定判別法은 可能한 限 그 表現이 簡單明瞭한 것을 要求하게 되었다. 過去에 硏究되어 온 여러가지 安定判別法 등은 即 Routh 및 Hurwitz에 依한 方法, Nyquist 및 Michailov에 依한 方法 等, 定性的方法과 Bode 및 Nichols에 依한 方法, Evans에 依한 Root locus法, Bilharz 및 Frank에 依한 方法, Tsypkin 및 Bromberg에 依한 方法 等, 定量的인 取扱方法 等이 硏究發表되어 制御系統의 設許 및 解析에 利用되어 왔다. 그러나 設計者들은 制御系統의 安定性判別에만 興味를 갖는 것이 아니라 安定度判別 即 系統應答에 더 注意를 기우리게 된다. 特히 實時間應答에 對하여 明確한 解答을 要求한다. 從來의 方法中에 Evans에 依한 根軌跡法은 實時間應答을 圖面上에서 許算할 수 있으나 作圖에 힘이 들고 特히 作圖에 必要한 計算 即 特性方程式의 因數分解(結果的으로 特性根을 求하는 問題임)가 困難하므로 이것이 問題로서 남아 있다가 半解析的方法으로 根軌跡을 作圖하는 方法[1)2)]이 硏究되긴 하였으나 이것은 한개의 Parameter 方法(Gain이 Parameter)이며 Multiloop系統에 適用하기가 困難한 點 等이 있다. 한편 두개의 Parameter 方法으로서 Mitrovic의 方法이 있다[3)4)5)6)]. 이것은 Parameter Plane Method의 基礎를 이룬 것으로 特性方程式의 係數中에서 任意의 두개를 Parameter로 하는 것이며 過渡應答 및 周波數應答을 求하는데 便利하나 任意의 두개의 係數만을 Paraweter로 하므로서 두개 以上의 Parameter가 存在하는 경우에는 不適當하다. 또한 우리나라에서도 試圖된 바가 있다[7)]. 이와같은 것을 改善한 것이 Šiljak의 Parameter Plane Method[8)9)10)11)12)]이며 이것을 여기에 紹介하고저 한다. 또한 再來式方法과 比較하여 그 優秀性을 檢討코저 하며 우선 複雜性을 避하기 爲하여 連續線型 一變數制御系統에 關한 例題를 取扱키로 한다.

2. 基礎理論

Feedback 回路가 存在하는 制御系統의 特性方程式을 다음과 같은 形式으로 쓸 수 있다.

$$f(s)=\sum_{k=0}^{m}a_k s^k=0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

但 $a_k(k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots,m)$는 實數이며 두개의 System Parameter α와 β의 函數이다. 即

$$a_k=a_k(\alpha,\ \beta) \qquad \cdots\cdots(2)$$

이며 S는 複素變數이다.

式(1)에서 特性方程式의 根을 一般的인 形式으로 다음과 같이 表現할 수 있다.

$$S=-\omega_n\zeta+\delta\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \qquad \cdots\cdots(3)$$

但 ω_n는 Undamped natural frequency(無減衰自然振動數)이며 ζ는 relative damping csefficient(相對感衰係數)이다. 그러면

$$S^k=\omega_n{}^k[T_k(-\zeta)+j\sqrt{\sqrt{1-\zeta^2}}\,U_k(-\zeta)] \qquad \cdots\cdots(4)$$

여기서 $T_k(-\zeta)$: $U_k(-\zeta)$는 各各 第一 및 第二種 Tchebyshev 函數이며 다음과 같은 循環式에 依하여 求할 수 있다.

$$\left.\begin{aligned}T_{k+1}(\zeta)-2\zeta T_k(\zeta)+T_{k-1}(\zeta)=0\\U_{k+1}(\zeta)-2\zeta U_k(\zeta)+U_{k-1}(\zeta)=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(5)$$

但 $T_k(-\zeta)=(-1)^k T_k(\zeta)$, $U_k(-\zeta)=(-1)^{k+1}U_k(\zeta)$ $\cdots\cdots(6)$

이며 $T_0(\zeta)=1$, $T_1(\zeta)=\zeta$, $U_0(\zeta)=0$, $U_1(\zeta)=1$이다.

$$\text{또한}\quad \left.\begin{aligned}T_k(\zeta)&=\cos(k\cos^{-1}\zeta)\\U_k(\zeta)&=\frac{\sin(k\cos^{-1}\varepsilon)}{\sin(\cos^{-1}\zeta)}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

式(4)를 式(1)에 代入하여 實數部와 虛數部를 區分하면

$$\left.\begin{aligned}&\text{實數部는}\ \sum_{k=0}^{m}a_k\omega_n{}^k T_k(-\zeta)=0\\&\text{虛數部는}\ \sum_{k=0}^{m}a_k\omega_n{}^k\sqrt{1-\zeta^2}\,U_k(-\zeta)=0\\&\qquad\qquad \sum_{k=0}^{m}a_k\omega_n{}^k U_k(-\zeta)=0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(8)$$

한편 $T_k(\zeta)=\zeta U_k(\zeta)-U_{k-1}(\zeta)$ $\cdots\cdots(9)$

의 關係式이 成立하므로 (證明은 式(7)을 代入하여 보면 된다) 式(6) 및 (9)를 (8)式에 代入하면

$$\sum_{k=0}^{m}a_k\omega_n{}^k T_k(\zeta)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k\omega_n{}^k T_k(\zeta)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k\omega_n{}^k[\zeta U_k(\zeta)-U_{k-1}(\zeta)]$$

* 原子力硏究所電子工學硏究室 · 正會員

$$= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k \omega_n^k \zeta U_k(\zeta) - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k \omega_n^k U_{k-1}(\zeta) = 0$$

그런데 $\sum_{k=0}^{m} a_k \omega_n^k U_k(-\zeta) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+1} a_k \omega_n^k U_k(\zeta) = 0$ 이므로 다음 式을 얻을 수 있다.

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k \omega_n^k U_{k-1}(\zeta) = 0 \\ \sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_k \omega_n^k U_k(\zeta) = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (10)$$

式(10)에서 a_k는 (2)式에서와 같이 α와 β의 函數인데 이것을 線型으로 考慮하여

$$a_k = b_k \alpha + c_k \beta + d_k \cdots\cdots (11)$$

式(11)과 같다면 (10)式은 다음과 같이 된다.

$$\left.\begin{array}{l} \alpha B_1(\omega_n, \zeta) + \beta C_1(\omega_n, \zeta) + D_1(\omega_n, \zeta) = 0 \\ \alpha B_2(\omega_n, \zeta) + \beta C_2(\omega_n, \zeta) + D_2(\omega_n, \zeta) = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (12)$$

但
$$\left.\begin{array}{l} B_1(\omega_n, \zeta) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k b_k \omega_n^k U_{k-1}(\zeta) \\ B_2(\omega_n, \zeta) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k b_k \omega_n^k U_k(\zeta) \\ C_1(\omega_n, \zeta) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k c_k \omega_n^k U_{k-1}(\zeta) \\ C_2(\omega_n, \zeta) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k c_k \omega_n^k U_k(\zeta) \\ D_1(\omega_n, \zeta) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k d_k \omega_n^k U_{k-1}(\zeta) \\ D_2(\omega_n, \zeta) = \sum_{k=0}(-1)^k d_k \omega_n^k U_k(\zeta) \end{array}\right\} \cdots\cdots (13)$$

(12)式을 α와 β에 對하여 풀면

$$\alpha = \frac{C_1(\omega_n, \zeta) D_2(\omega_n, \zeta) - C_2(\omega_n, \zeta) D_1(\omega_n, \zeta)}{B_1(\omega_n, \zeta) C_2(\omega_n, \zeta) - B_2(\omega_n, \zeta) C_1(\omega_n, \zeta)}$$

$$\beta = \frac{B_2(\omega_n, \zeta) D_1(\omega_n, \zeta) - B_1(\omega_n, \zeta) D_2(\omega_n, \zeta)}{B_1(\omega_n, \zeta) C_2(\omega_n, \zeta) - B_2(\omega_n, \zeta) C_1(\omega_n, \zeta)} \cdots\cdots (14)$$

(12)式, 또는 (14)式은 α, β를 直交座標軸으로 하는 $\alpha\beta$-Plane을 形成할 수 있으며 相對減衰係數 ζ, 無減衰振動數 ω_n 및 Settling Time $\omega_n\zeta$를 各各 一定하게 하였을 때의 特性根에 關聯이 있는 軌跡을 Parameter plane $\alpha\beta$ 平面에 그릴 수있다. 이 曲線들 即 ζ= 一定인 曲線을 ζ—曲線, ω_n=一定인 曲線을 ω_n—曲線, $\omega_n\zeta$=一定인 것을 $\omega_k\zeta$ 曲線이라고 말하며 이들 曲線은 S-Plane上에서 ζ=一定, ω_n=一定, $\omega_n\zeta$=一定의 曲線에 各各 對應된다(**그림 1** 참조) ζ—曲線 및 ω_n—曲線은 各各 (13) 및 (14)式에서 ζ=一定值, ω_n=一定值를 代入한 後에 ζ—曲線은 ω_n를 0→∞까지 變化시키므로써 얻을 수 있으며 ω_n—曲線은 ζ를 0에서 1까지 變化시켜서 얻을 수 있다. $\omega_n\zeta$—曲線을 얻기 爲해서는 (13)式을 變形할 必要가 있다.

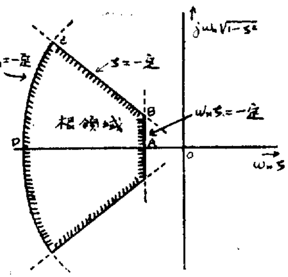

그림 1.

即 (4)式을 變形하면

$$S^k = P_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\, Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \cdots (15)$$

$$\text{但}\ \left.\begin{array}{l} P_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \omega_n^k T_k(-\zeta) = (-1)^k \omega_n^k T_k(\zeta) \\ Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \omega_n^{k-1} U_k(-\zeta) = (-1)^{k+1} \omega_n^{k-1} U_k(\zeta) \end{array}\right\} \cdots\cdots (16)$$

$P_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2)$ 및 $Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2)$은 다음과 같은 循環式에 依하여 計算할 수 있다.

$$\left.\begin{array}{l} P_{k+1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) + 2\omega_n\zeta P_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ \qquad + \omega_n^2 P_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = 0 \\ Q_{k+1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) + 2\omega_n\zeta Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ \qquad + \omega_n^2 Q_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (17)$$

但 $P_0(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = 1$, $P_1(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = -w_n\zeta$, $Q_0(w_n\zeta, \omega_n^2) = 0$ 및 $Q_1(\omega\zeta_n, \omega_n^2) = 1$ 이다.

또한 $P_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = -\omega_n\zeta Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) - \omega_n^2 Q_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \cdots\cdots (18)$

式(18)에 依하여 式(10)을 얻은 것과 같은 方法으로

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{k=0}^{m} a_k Q_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = 0 \\ \sum_{k=0}^{m} a_k Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (19)$$

(19)式에 (11)式을 代入하여

$$\left.\begin{array}{l} B_1(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \sum_{k=0}^{m} b_k Q_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ B_2(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \sum_{k=0}^{m} b_k Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ C_1(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \sum_{k=0}^{m} c_k Q_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ C_2(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \sum_{k=0}^{m} c_k Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ D_1(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \sum_{k=0}^{m} d_k Q_{k-1}(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \\ D_2(\omega_n\zeta, \omega_n^2) = \sum_{k=0}^{m} d_k Q_k(\omega_n\zeta, \omega_n^2) \end{array}\right\} \cdots\cdots (20)$$

式(20)에 $\omega_n\zeta$=一定值를 代入하고 (14)式에 依하여 ω_n를 0→∞까지 變化시키므로써 $\omega_n\zeta$—曲線을 求할 수 있다.

그림 1에서 보는바와 같이 $\omega_n\zeta$—曲線은 絕對安定線에 對應되며 ζ—曲線은 相對安定線에 對應된다. 이와같이 ζ—曲線, ω_n 曲線 및 $\omega_n\zeta$ 曲線으로 이루어 지는 線을 通稱하여 Complox-root boundaries라고 하며 이 外에 다른 曲線 即Real-root boundaries를 求하지 않으면 안된다.

만약 複素變數 S를

$$S = -\sigma \cdots\cdots (21)$$

라 할 때 σ는 S-plane上에서 實軸上의 一點을 나타낸

다. 그러나 이 點은 $\alpha\beta$-Plane上에서는 다음과 같이 $a_k = b_k\alpha + c_k\beta + d_k$ 처럼 線型일 때는 直線으로 表示된다. 即 (1)式은 $S=-\sigma$ 일 때

$$f(-\sigma)=\alpha\sum_{k=0}^{m}(-1)^k b_k\sigma^k+\beta\sum_{k=0}^{m}(-1)^k c_k\sigma^k + \sum_{k=0}^{m}(-1)^k d_k\sigma^k=0 \quad\cdots\cdots(22)$$

(22)式은 σ=constant 이므로 $\alpha\beta$-Plane上에서는 直線이 된다. 이 直線을 Real-root boundaries 라고 稱한다.

以上과 같이 하여 (14)式과 (22)式에 依하여 S-Plane上의 根領域을 $\alpha\beta$-Plane上의 領域(complex-root boundaries 와 Real-root boundaries 로 이루어지는 領域)으로 變換할 수 있다. 이와같은 Parameter plane上에서 α 와 β 를 決定할 수 있으며 Stability Analysis는 勿論 Synthesis 에 더욱 그 效用價值가 있음을 發見할 것이다. 한편 S-plane上에서 모든 特性根은 實軸에 對稱이므로 上部 根領域만을 $\alpha\beta$-plane上에 變換하면 됨을 알 수 있다.

3. 例 題

그림 2에서 보는 바와 같은 制御系를 考慮할 때 傳達函數가 다음과 같다면

$$\left.\begin{aligned} G_1(s)&=2\\ G_2(s)&=\frac{0.2s^2+0.8s+1}{k_2}\\ G_3(\varepsilon)&=\frac{1}{0.4s+1}\\ G_4(s)&=\frac{0.5k_4s}{0.5s+1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(23)$$

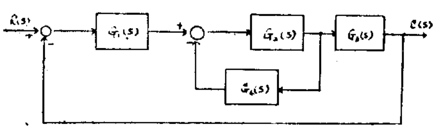

그림 2. 制 御 系

特性方程式은

$$f(s)=0.04s^4+0.34s^3+(0.2k_2k_4+1.12)s^2 +(0.5k_2k_4+k_2+1.7)s+2k_2+1=0\quad\cdots\cdots(24)$$

式(24)에서 k_2와 k_4의 決定에 있어서 이것을 그대로 未知數로 놓고서 다른 方法으로 安定性判別이나 또는 實時間應答을 求하기는 困難하다. 그러나 Parameter plane 方法으로 要求되는 過渡應答特性을 維持하면서 勿論 그 系가 安定하고, 要求되는 諸特性에 滿足하는 範圍의 k_2 및 k_4를 찾아내는 것은 容易한 일이다. 即 特性方程式 (24)가 過渡現象에 있어서 settling time이 0.6sec~2.5 sec 內로 또한 overshoot가 37% 以內로 그리고 settling time까지의 過渡振動數가 $\frac{1}{2}$~2cycle 以內로 動作하기에 必要한 k_2 및 k_4를 求하여 본다. 이것은 **그림 3**에서와 같이 S-plane上의 特性根領域內에 (24)式의 모든 根이 包含됨을 意味하며 parameter plane($\alpha\beta$-plane)上에서 complex root boundaries는 $\omega\zeta$-curve가 $\omega_n\zeta=1.2$ 일 때, ζ-carve는 $\zeta=0.3$ 일때와 ω_n-curve는 $\omega_n=5$ 일때의 各曲線에 對應되며 Real-root boundaries는 $\sigma=1.2$ 와 $\sigma=5$ 의 두 直線에 對應된다. (24)式에서 $k_2k_4=\alpha$, $k_2=\beta$ 라고 놓으면

$$f(s)=0.04s^4+0.34s^3+(0.2\alpha+1.12)s^2 +(0.5\alpha+\beta+1.7)s+2\beta+1=0\quad\cdots\cdots(25)$$

式(13)에 依하여

$$\left.\begin{aligned} B_1&=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k b_k\omega_n^k U_{k-1}(\zeta)=+0.2\omega_n^2\\ B_2&=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k b_k\omega_n^k U_k(\zeta)\\ &=-0.5\omega_n+0.2\omega_n^2U_2(\zeta)\\ C_1&=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k c_k\omega_n^k U_{k-1}(\zeta)=-2\\ C_2&=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k c_k\omega_n^k U_k(\zeta)=-\omega_n\\ D_1&=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k d_k\omega_n^k U_{k-1}(\zeta)=0.04\omega_n^4U_3(\zeta)\\ &\quad-0.34\omega_n^3U_2(\zeta)+1.12\omega_n^2U_1(\zeta)-1\\ D_2&=\sum_{k=0}^{4}(-1)^k d_k\omega_n^k U_k(\zeta)\\ &=0.04\omega_n^4U_4(\zeta)-0.34\omega_n^3U_3(\zeta)\\ &\quad+1.12\omega_n^2U_2(\zeta)-1.7\omega_nU_1(\zeta)\end{aligned}\right\}\quad(26)$$

式(5)에 依하여

$$U_1(\zeta)=1,\ U_2(\zeta)=2\zeta,\ U_3(\zeta)=4\zeta^2-1,\ U_4(\zeta)=8\zeta^3-4\zeta\quad\cdots\cdots(27)$$

$\zeta=0.3$ 일 때 $U_1(0.3)=1$, $U_2(0.3)=0.6$, $U_3(0.3)=-0.64$, $U_4(0.3)=-0.984$ 이므로 $\zeta_{0.3}$—curve를 爲한 α, β 에 對한 式은 (14)式에 (26)式 및 (27)式에 $\zeta=0.3$ 을 代入한 $U_k(\zeta)$를 代入計算하면

$$\left.\begin{aligned}\alpha_\zeta&=\frac{0.0256\omega_n^4+0.12528\omega_n^3-0.6848\omega_n^2+1.344\omega_n-2.4}{0.2\omega_n^2-0.24\omega_n+1}\\ \beta_\zeta&=\frac{-0.0048\omega_n^5+0.0552\omega_n^4-0.102\omega_n^3+0.22\omega_n^2+0.12\omega_n-0.5}{0.2\omega_n^2-0.24\omega_n+1}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(28)$$

(28)式에서 ω_n를 0~5까지 求하면 ω_n curve와 만나게 되므로 充分하다. $\omega_n=5$ 일 때의 ω_n 線은 (26)式에 (27)式을 代入하고 $\omega_n=5$ 를 代入한 後에 (14)式에 代入하면

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{\omega_n}&=\frac{-400\zeta^3+840\zeta^2-337\zeta-58}{20\zeta-30}\\ \beta_{\omega_n}&=\frac{-250\zeta^2+12.5\zeta-175}{20\zeta-30}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(29)$$

(29)式에서 ζ를 0.3~1.0까지 變化시키므로서 對應되

는 ω_n-曲線을 $\alpha\beta$-plane 上에 그릴 수 있다. $\omega_n\zeta$-曲線은 $\omega_n\zeta=1.2$ 일 때 (20)式 및 (14)式에 依하여式(30)과 같다.

$$\left.\begin{aligned}\alpha\omega_{n\zeta}&=\frac{0.04\omega_n^4-0.2384\omega_n^2+0.16512}{0.2\omega_n^2+0.04}\\ \beta\omega_{n\zeta}&=\frac{0.0288\omega_n^4-0.0728\omega_n^2-0.02}{0.2\omega_n^2+0.04}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(30)$$

式(30)에서 w_n를 0~5까지 變化시키므로서 settling time이 一定한 曲線을 $\alpha\beta$-plane 上에 對應시킬 수 있다. Real Root Boundry는 (21)式 및 (22式에 依하여 $\sigma=1.2$ 일때 및 $\sigma=5$ 일때의 것을 計算하면

$$\left.\begin{aligned}&\sigma=1.2 \text{ 일때} \quad -0.312\alpha+0.8\beta+0.068544=0\\ &\partial=5 \text{ 일때} \quad 2.5\alpha-3\beta+3=0\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

以上과 같이 (28), (29), (30) 및 (31)式에 依한 $\alpha\beta$-plane 上의 Complex root boundary 및 Real root bouodary는 그림 3에 作圖한 것과 같다.

特性方程式 (25)에 依한 特性根은 모두 4個로서 이 4個의 特性根이 그림 3의 $\alpha\beta$-plane 上의 A'B'C'L'A' 內에

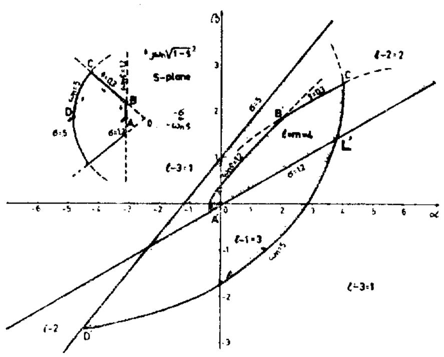

그림 3. Parametet plane

存在하는가 어떤가를 먼저 觀察할 必要가 있다. 이 判別은 널리 알려져 있는 Cauchy의 Argument Theorem에 依하여 行할 수 있다. 特性方程式 式(1)을 vector form으로 다시 쓰면

$$f(s)=f(\omega_n,\zeta)=\sum_{k=0}^{m}a_n\omega_n^k(-1)^kT_k(\zeta)$$

$$+j\sqrt{1-\zeta^2}\sum_{k=0}^{m}a_k\omega_n^k(-1)^{k+1}U_k(\zeta)\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

$\alpha\beta$-plane 上의 어느 領域에(例를 들면 그림 3의 A'B'C'L'A'內에) 特性根이 몇個 存在하는가를 判別하는 것은 (32)式에 그 주어진 ζ의 特定値와 그 領域內에 存在하는 任意의 α,β의 값을 代入하면 (32)式은 實數部와 虛數部가 ω_n에 對하여 多項式이 된다. ω_n를 0~∞까지 變化시킬 때 複素平面上에 對應하는 軌跡을 그려 넣어 그 軌跡이 反時計方向으로 mθ만큼 回轉하면 그 領域內에 m個의 特性根이 存在한다. 但 m는 그 特性方程式의 特性根의 數이고

$$\theta=\pi-\cos^{-1}\zeta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

이다.

特性方程式 (25)에 依한 特性根 4個가 모두 A'B'C'L'A'領域內에 있는가의 判別을 하기 爲하여 $\zeta=0.3$, $\alpha=2$ 및 $\beta=1$을 代入 計算하면 式(25)는

$$f(s)=0.04s^4+0.34s^3+1.52s^2+3.7s+3=0\ \cdots\cdots(34)$$

$T_k(0.3)$ 및$U_k(0.3)$을 表 **1** 및 表 **2**에서 찾아 式(32)代入하면 式(35)와 같다.

$$\begin{aligned}f(s)=f(\omega_n,\ 0.3)=&(3-1.11\omega_n-1.2464\omega_n^2\\&+0.26928\omega_n^3+0.013792\omega_n^4)+j0.954(3.7\omega_n\\&-0.912\omega_n^2-0.2176\omega_n^3+0.03936\omega_n^4)\ \cdots(35)\end{aligned}$$

式(35)의 複素軌跡은 **그림 4**와 같으며 (33)式에 依하여 $\theta=\pi-\cos^{-1}0.3=\pi-72.5°=107.5°$,

$m\theta=4\times107.5°=430°$임으로 特性根 4個가 모두 A'B'C'L'A'領域內 存在한다.

한편 그림 3에서 領域을 決定할 때는 式(14)의 分母

$$\triangle=B_1(\omega,\zeta)C_2(\omega_n,\zeta)-B_2(\omega_n,\zeta)C_1(\omega_n,\zeta)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

가 $\triangle>0$일 때는 ω_n가 增加하는 曲線方向에서 볼 때 左便이 目的하는 바 領域이며 $\triangle<0$일 때는 右便이 그 領域이다.

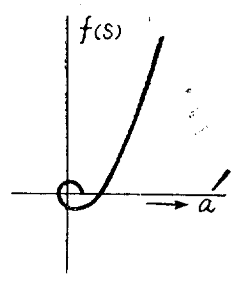

그림 4. $f(s)$Plane

그림 3의 A'B'C'L'A'領域內에 特性根 4個가 모두 存在하며 萬一 α 및 β를 選擇할 때 點 (α,β)가 Complex root boundary를 넘을 때는 複素根 2個가 同時에 S-plane 上의 ABCD領域에서 離脫하며 만일 Real root boundary를 넘을 때는 實根 한個가 離脫한다. 故로 앞에 要求된 實時間過渡特性이 Settling Time 2.5sec 以內, over shoot 37% 以內 및 過渡振動機 2cycle 以內에 安定되기 爲하여서는 α 및 β는 $\alpha\beta$ plane 上의 A'B'C'L'A'領域內에 存在하여야 한다.

4. 後 記

以上의 例題에서 본바와 같이 特히 System Synthesis에 適當하며 詳細한 것을 願하시는 분을 爲하여 參考文獻을 附記한다.

5. 參 考 文 獻

1) K. Steiglitz, "An Analytical Approach to Root Loci," IEEE, Transactions on Automatic Control, Vol. AC-6, No. 3, pp. 326~332, 1961.

2) V. Krishnan, „Semi-Analytic Approach to Root Loci," Ibid., Vol. AC-11, No. 1, pp. 1966.

3) D. Mitrovic, "Graphical Analysis and Synthesis of Feedback Control System," I-Theory and Analysis,

表 1

Functions $T_k(\zeta)$

ζ	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_5	T_4	T_5	T_{10}
0.00	1	0.00	-1.000	0.0000	1.00000	0.000000	-1.0000000	0.00000000	1.000000000	0.0000000000	-1.00000000000
0.05	1	0.05	-0.995	-0.1495	0.98005	0.347505	-0.9452995	-0.44203495	0.901096005	0.5321445505	-0.84788154995
0.10	1	0.10	-0.980	-0.2960	0.92080	0.480160	-0.8247680	-0.64511360	0.695745280	0.7842626560	-0.53889274880
0.15	1	0.15	-0.955	-0.4365	0.82405	0.683715	-0.6189355	-0.86939565	0.358116805	0.9768306915	-0.06506759755
0.20	1	0.20	-0.920	-0.5680	0.69280	0.845120	-0.3547520	-0.98702080	-0.040056320	0.9709982720	0.42845562880
0.25	1	0.25	-0.875	-0.6875	0.53125	0.953125	-0.0546875	-0.98046875	-0.435546875	0.7826953125	0.81689353125
0.30	1	0.30	-0.820	-0.7920	0.34480	0.998880	0.2545280	-0.84616320	-9.762225920	0.3888276480	0.99552250880
0.35	1	0.35	-0.755	-0.8785	0.14005	0.976535	0.5435245	-0.59606785	-0.960771995	-0.0764725465	0.90724121245
0.40	1	0.40	-0.680	-0.9440	-0.07520	0.883840	0.7822720	-0.52802240	-0.988689920	-0.5329295360	0.46234629120
0.45	1	0.45	-0.595	-0.9855	-0.29195	0.722745	0.9424205	0.12543345	-0.829530395	-0.8720108055	0.04472067005
0.50	1	0.50	-0.500	-1.0000	-0.50000	1.000000	0.5000000	-0.50000000	-0.500000000	-1.0000000000	-0.50000000000
0.55	1	0.55	-0.395	-0.9845	-0.68795	0.227755	0.9384805	0.80457355	-0.053449595	-0.8633681045	-0.98625531995
0.60	1	0.60	-0.280	-0.9360	-0.84320	-0.075840	0.7521920	0.97847040	0.421972480	-0.4721034240	-0.98849658880
0.65	1	0.65	-0.155	-0.8515	-0.95195	-0.386035	0.4501045	0.97117085	0.812407605	0.0849590365	-0.70196085755
0.70	1	0.70	-0.020	-0.7280	-0.99920	-0.670880	0.0599680	0.75483520	0.996801280	0.6406865920	-0.09984005120
0.75	1	0.75	0.125	-0.5625	-0.96875	-0.890625	-0.3671875	0.33984375	0.876953125	0.9755859375	0.58642578125
0.80	1	0.80	0.280	-0.3520	-0.84320	-0.997120	-0.7521920	-0.20638720	0.421972480	0.8815431680	0.98849658880
0.85	1	0.85	0.445	-0.0935	-0.60395	-0.933215	-0.9825155	-0.73706135	-0.270488795	0.2772303985	0.74178047245
0.90	1	0.90	0.620	-0.2160	-0.23120	-0.632160	-0.9066880	-0.99987840	-0.893093120	-0.6076892160	-0.20074746880
0.95	1	0.95	0.805	0.5795	0.29605	-0.017005	-0.3283595	-0.60687805	-0.824708795	-0.9600686605	-0.99942165995
1.00	1	1.00	1.000	1.0000	1.00000	1.000000	1.0000000	1.00000000	0.000000000	0.0000000000	0.00000000000

表 1

Functions $U_k(\zeta)$

ζ	U_1	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	U_9	U_{10}
0.00	-1	0	1	0.0	-1.00	0.000	1.0000	0.00000	-1.000000	0.0000000	1.00000000	0.000000000
0.05	-1	0	1	0.1	-0.99	0.199	0.9701	0.29601	-0.940499	-0.3900599	0.90149301	0.480209201
0.10	-1	0	1	0.2	-0.96	-0.392	0.8816	0.56832	-0.767936	-0.7219072	0.62355456	0.846618112
0.15	-1	0	1	0.3	-0.91	-0.573	0.7381	0.79443	-0.499771	-0.9443613	0.21646261	1.009300083
0.20	-1	0	1	0.4	-0.84	-0.736	0.5456	0.95424	-0.163904	-1.0198016	-0.24401664	0.922194944
0.25	-1	0	1	0.5	-0.75	-0.875	0.3125	1.03125	0.203123	-0.9296875	-0.66796875	0.595703125
0.30	-1	0	1	0.6	-0.64	-0.984	0.0496	1.01376	0.558656	-0.6785664	-0.96579584	0.099088896
0.35	-1	0	1	0.7	-0.51	-1.057	-0.2299	0.89607	0.857149	-0.2960657	-1.06439499	-0.449010793
0.40	-1	0	1	0.8	-0.36	-1.088	-0.5104	0.67968	1.054144	0.1636352	-0.92323584	-0.902223872
0.45	-1	0	1	0.9	-0.19	-1.071	-0.7739	0.37449	1.110941	0.6253569	-0.54811979	-1.118664711
0.50	-1	0	1	1.0	0.00	-1.000	-1.0000	0.00000	1.000000	1.0000000	0.00000000	-1.000000000
0.55	-1	0	1	1.1	0.21	-0.869	-1.1659	-0.41349	0.711061	1.1956571	0.60416181	-0.531079109
0.60	-1	0	1	1.2	0.44	-0.672	-1.2464	-0.82368	0.257984	1.1332608	1.10192896	0.189053952
0.65	-1	0	1	1.3	0.69	-0.403	-1.2139	-1.17507	-0.313691	0.7672717	1.31114421	0.937215773
0.70	-1	0	1	1.4	0.96	-0.056	-1.0384	-1.39776	-0.918464	0.1119104	1.07513856	1.393283584
0.75	-1	0	1	1.5	0.25	0.375	-0.6875	-1.40625	-1.421875	-0.7265625	0.33203125	1.224609375
0.80	-1	0	1	1.6	1.56	0.896	-0.1264	-1.09824	-1.630784	-1.5110144	-0.78683904	0.252071936
0.85	-1	0	1	1.7	1.89	1.513	0.6821	-0.35343	-1.282931	-1.8275527	-1.82390859	-1.273091903
0.90	-1	0	1	1.8	2.24	2.232	1.7776	0.96768	-0.035776	-1.0320768	-1.82196224	-2.247455232
0.95	-1	0	1	1.9	2.61	3.059	3.2021	3.02499	2.545381	1.9112339	0.89596341	-0.108903421
1.00	-1	0	1	2.0	3.00	4.000	5.0000	6.00000	7.000000	8.0000000	9.00000000	10.000000000

AIEE. Transactions, Part-II, Vol. 77. pp. 476-487. 1958.

4) D. Mitrovic, "Graphica Analysis and Synthesis of Feedback Control System," II-Synthesis, Ibid., pp. 487~496, 1958.

5) D. Mitrovic, "Graphical Analysis and Synthesis of Feedback Control System," III Sampled-Data Feedback Control Systems, Ibid., pp. 497~503, 1958.

6) D.D. Šiljak, "Generalization of Mitrovic's of Mitrovic's Method," IEE Transactions on Applications and Industry, Vol. 83, No. 74, pp. 314~320, 1964.

7) Choi, Keh Kun and et. al, "An Investigation of High Order Control System," Science and Engineering Report, Seoul National Universtity, Collegege of Engineering, Vol. 1, No. 1, pp. 181~188, 1965.

8) D.D. Šiljak, "Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems in The Parameter Plane," I-Linear Continuous Systems, IEEE Transaction on Applications and Industry, Vol. 83, No. 75, pp. 449~458, 1964.

9) D.D. Šiljak, "Analysis and Synthesis of Feedback Contol Systems in the Parameter Plane," II-Sampled-Data Systems, Idid., pp. 458~466, 1964.

10) D.D. Šiljak, "Analysis and Synthesis of Feedback Control Systems in the Parameter Plane," III-Nonlinear Systems, Ibid., pp. 466~473, 1964.

11) D.D. Šilijak, "Generalization of the Parameter Plane Method," IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 11, No. 1, pp. , 1966.

12) M.R. Stojic and D.D. Šiljak, "Generalization of the Hurwitz, Nyquist, and Mikhailo Stability Criteria," Ibid., Vol. 10, No. 3, pp.250~254, 1965.

(1966年 9月 3日 接受)