SMSG 改正版 教科書에 있어서의 極限의 槪念

庾 炳 祐

本稿는 DONALD W · HIGHT (Kansas State College Pittsburg; Pittsburg. Kansas, U.S.A)에 依하여 The Mathematics Teacher, N. C. T. M. Apr. 1964에 發表된 "The Limit Concept in the SMSG revised Sample textbooks"를 의역한 것이다.

高等學校 敎師들은 極限槪念을 理解하는데 얼마나 많은 교육을 학생들에게 주어야 할 것인가?

極限에 對한 槪念은 一般的으로 高等學校 數學 敎科書 著者들에 依해 회피되고 있는상 싶다. 좀더 發達된 問題는 極限을 要하는데 이러한 問題는 敎育課程에 빠져있다. 그런데 討議에선 極限을 취급하고 있는 것이다.

特히 參考書에선 傳統的으로 내려오는 高等學校 數學敎育計劃의 한 分野인 幾何에 있어서의 incommensurable case를 包含하는 定理의 證明, 圓에 關聯된 測度의 定義(圓周, 面積, 球의 體積 등) 無限級數의 合, 그리고 graph의 漸近線에 關한 問題를 取扱하고 있을 것이다.

SMSG 改定版 敎科書는 幾何에 있어서 incommensurable case에 對한 것을 빼고 위에서 말한 다른 問題를 포함하고 있다. 또한 첨가하여 몇몇 개의 極限槪念이 包含되어 있다.

特히 "Elementary Functions[SMSG, Elementory Functions, Teaeher's Commentary and Student's Test (New Haven; Yale university press, 1961)]이란 책의 Calculus 硏究에 對한 基礎的인 槪念을 다루는 곳곳에 極限이란 槪念이 들어있다. 이러한 SMSG 改定版 敎科書를 使用하는 中等學校 敎師들은 새로운 面을 發見할 것이며 또한 이러한 問題를 理解하고 直接 가르치므로서 좋은 經驗을 쌓기를 바란다. 그러나 SMSG의 極限槪念은 全的으로 直觀的이고 大部分의 高等學校 敎師들도 傳統的인 大學 Calculus 過程에서 조차 極限에 對해 별로 經驗을 하기 못했기 때문에 萬若에 敎師들이 初等 解析學的 見地에서 問題의 論理的인 背景을 理解한다고 하면 先生自身이나 學生에게 상당히 도움이 될 것이다.

敎師들에게 SMSG 개정판 속의 極限槪念을 좀더 잘 理解토록 할 試圖로써 아래에 나타나 있는 바와같이 問題를 3가지로 分析했다. 곧 各問題를 다음과 같은 3가지 計論式의 例로 책정해 보았던 것이다. 즉,

(1) "極限"이란 말은 엄격하게 解析을 하기란 심히 어렵고 길게 늘어 說明하여야 하므로 엄밀히 直觀的 方法으로 使用한다는 것.

(2) 極限槪念은 大學數學에 있는 (ε, δ), (ε, N) 形態로 쉽게 바꿀 수 있는 平凡한 말로 나타낸다는 것.

(3) 敎師自身도 어떤 問題속에 內包된 槪念을 알고는 있지만 친밀감을 깨닫지 못 할 수도 있는 특수한 방법으로 親密한 槪念을 發展시키는데 極限이 使用된다는 것.

교사들은 아래에 주어져 있는 3가지 例와 또한 거기에 부수적으로 따르는 證明方法을 알게되고 관심을 기울여 봄으로써 極限에 對한 SMSG의 直觀的인 接近(intutive approach)와 傳統的인 大學 Calculas의 接近(Conventionaly College Calculus approach) 사이의 關係를 인식할 수 있을 것이다.

그러나 아래에 주어진 定理의 選擇과 證明에서와 같이 敎科書에서 인용한 진술에 대한 論理的인 正當性은 단 한가지 方法만으로 되어있는 것은 아님을 알아야 한다. 이와같은 事實은 最近에 出版된 Calculus 敎科書에서 찾아볼 수 있

는 代表的인 論議對象이 되며 이런 理由에서 이것들을 취급하였던 것이다.

Example 1.

Geometry〔SMSG, Geometry(New Haven; Yale University Press, 1961)〕책 第15章 第3節에 最初로 圓周를 定義하는데 極限을 使用했다. 이 책 516 페이지에 "圓周 C를 近似的으로 測定할려면 많은 邊을 갖는 內接正多角形을 그린후 이 多角形의 둘레 p를 測定함으로써 잴수 있다고 생각한 것은 合理的인 생각이다"라고 설명되었다.

이 절을 定義式으로 말해보면, "萬若에 우리가 求할려는 p를 어떻게 해서 C에 近似的으로 같게 접근시킬 것인가를 결정할려면, 마땅히 n을 充分히 크게 함으로써 p를 C에 접근시킬 수 있을 것이다"로 되어 있다. 그 밖에 極限을 定義하는데 아무런 討論도 주어져 있지 않으며 極限에 對한 何等의 取扱도 하지 않았다.

圓周에 對한 이러한 定義는 學生들에게 매우 自然스럽고 쉽게 받아드릴 수 있을 거라고 생각된다. 그러나 이것은 그림이나 視聽覺을 通한 近似的인 것은 될런지 모르지만 엄격한 數學的인 解析엔 適合치 못할 것이다.

좀더 많은 經驗을 한 學生들은 "그러한 極限이 存在하는가?"하고 質問할 것이다. 그러나 이와같은 質問에 對한 答辯은 극히 難處하다. 둘레에 對한 數列의 極限이 存在함을 보이기 爲해 數列의 單調에 對한 것과 경계에 對한 證明 곧 "Cantor"나 "Cauchy"의 數列이란 증명을 要하게 될 것이다.

Example 2.

設令 極限의 槪念이 Geometry 책에서 π나 圓의 面積, 弧의 길이, 球의 體積, 表面積등에 關聯된 定理에 利用되고, 그리고 實數의 Completeness(완비)에 대한 토의에서 Intermediate Mathematics 〔SMSG, Intermediate Mathematics (New Haven; Yale University press, 1961), p. 756〕책에 있는 圓錐曲線, 漸近線, 對數函數, graph의 모양에 對한 極限形態에도 利用됐다 하지만 Intermediate Mathematics 뒷장까지 極限을 定義하기 爲해 아무런 試圖도 하지 않았다.

이 책 第13章 "수열과 급수"에서 다음과 같은 數列의 極限에 對한 定義가 기록되어 있다. 즉

"수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$는 만약에 n이 점점 커짐에 따라 a_n이 A에 임의로 접근하게 된다면 極限 A를 갖는다"로 되어 있다. 敎師는 이 定義는 單語의 선택에 따라 이 數列의 各項은 항상 變하고 있다는 事實만을 除外한다면 (ε, N) 形態와 同値임을 알아야 한다.

만약에 a_n이 "A에 임의로 가깝게 된다"면 이것은 어떠한 方法으로 활동해야 할것인가? 또한 "점점 커지는" n을 要求한다는 말은 n이 크기(magnitude)로 變하고 있음을 뜻한다.

그러나 이와 같은 定義는 보통 (ε, N) 定義로 나타내도록 바꿀수가 있다.

"a_n에 A의 接近(closeness)"이란 A와 a_n 사이의 距離를 말하며 $|A-a_n|$으로 表示한다. 이러한 距離를 任意로 작게 하기 爲해서 모든 實數 $\varepsilon>0$에 對해 $|A-a_n|<\varepsilon$라는 事實을 要하게 될것이다. 이와같은 要求는 "n이 점점 증가한다" 또는 딴말로 "충분히 큰 n"를 擇하므로써 만족될 것이다.

이것은 自然數 N이 存在하여 $n>N$이면 그때 n은 "充分히 크다"는 것을 의미한다. 이제 "$\{a_n\}$"을 "수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots$"으로 나타내기로 한다면 이 定義의 결과는 위와 똑같다; 곧

만약에 모든 實數 $\varepsilon>0$에 對해 自然數 N이 存在하여 $n>N$ 일 때 $|a_n-A|<\varepsilon$이라면 $\{a_n\}$의 극한은 A이다. 곧

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = A,$$

敎師는 그가 硏究한 極限問題가 普通 "充分히 크다는 것은 얼마나 큰 것인지"를 發見하는 것으로 되어있고 또한 ε항에 있어서 "充分히 큰" 數를 發見하는 것으로 되었다고 생각될 것이다. 平凡한 例로서 Intermediate Mathematies 758 페이지에 提示된 定理

$$\lim_{n\to\infty} c=c$$

를 생각해 보았다.

이와같은 진술을 證明하기 爲해 임의의 實數 $\varepsilon<0$에 對하여 自然數 N이 存在하여 $n>N$ 일때 $|c-c|<\varepsilon$ 임을 보여야 할 것이다.

그러면 N은 어떤 數가 되어야 하는가? 이것은 무엇이든간에 任意의 自然數 일것이다. 왜냐하면 $|c-c|<\varepsilon'$가 항상 成立하기 때문이다.

이 경우에 n이 "점점 커져야" 한다는 것을 말할 必要는 없다. 왜냐하면 任意의 n이면 充分할 것이기 때문이다. 또 다른 경우로서 다음과 같은 例

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=c\left(\lim_{n\to\infty}a_n\right)$$

의 證明을 생각해 보겠다.

萬若 A를 $\{a_n\}$의 極限, 곧 $A=\lim_{n\to\infty}a_n$로 부터 證明을 始作해 보겠다. 定義에 依해서 모든 實數 $\varepsilon>0$에 對해 自然數 N이 存在하여 $n>N$일 때 $|a_n-A|<\varepsilon$ 라는 것을 안다.

만약에 $c=0$ 이면 모든 n에 對해 $ca_n=0$ 이다 수열 $\{ca_n\}$은 常數 0, 0, 0, ……, 0, …의 數列이고 $\lim ca_n=0=cA$ 이다.

만약에 $c\neq0$ 이라면 $|a_n-A|<\varepsilon$의 解는 $|c||a_n-A|<|c|\varepsilon$ 혹은 $|ca_n-cA|<|c|\varepsilon$에 대한 解와 똑같다. 그러므로 만약에 $c\neq0$ 이면 모든 實數 $|c|\varepsilon>0$에 對해 自然數 N이 存在하여 $n>N$ 이면 $|ca_n-cA|<|c|\varepsilon$ 라고 말할 수 있다. 이 마지막 설명은 定義가 $\lim_{n\to\infty}ca_n=CA$를 만족함을 보여 주고 있다. 여기선 ε 代身에 $|c|\varepsilon$를 포함하고 있다. 그러나 이것은 變數와 같다. 즉 이것은 임의의 陽의 實數集合의 member로 되어있는 記號이다. 여기서 使用한 記號는 完全히 任意의 記號이며 ε에 對해 ε'를 使用하여 $|c|\varepsilon'$를 라 하였다. 따라서 $cA=c(\lim_{n\to\infty}a_n)$이므로

모든 數 c에 對해

$$\lim_{n\to\infty}ca_n=c(\lim_{n\to\infty}a_n)$$

가 증명되었다.

Example 3.

3번째 例로 Elementary Functions 책에서 가장 重要한 問題를 하나 擇했다. 곧 函數의 graph에 가장 適合한 線型 近似値에 對한 定義나 혹은 接線에 對한 定義같은 것이다.

敎師들은 SMSG 敎科書 속에 있는 討論이나 定義는 학생들이 도함수로 생각하면 된다고 認定할 것이다. 그러나 SMSG는 고의로 도함수에 의해 傳統的인 Calculus 接近方法을 避하고 있으며, 또한 "도함수"란 말의 利用도 避하고 있다. 그러나, 敎師들은 定義에 對한 同値(equivalence)는 알아야 하겠다.

위의 SMSG 敎科書에 使用된 것처럼 "任意로 接近" 혹은 "맘대로의 接近" 같은 用語는 ε 記號로 고쳐서 생각함이 좋고 이와 有似히 "충분히 작은 $|x|$" 혹은 "充分히 작은"이란 말은 δ란 말로 쓰게 될것이다.

Elementary Functions 第3章 第3節에 우리들의 觀心을 기울여 보자.

이책 97 페이지에

$$f(x)=1+x$$

는 點 P(0, f(0))에서

$$f(x)=1+x-4x^2=1+(1-4x)x$$

graph에 가장 適合한 線型 近似値(the best linear approximation)이라고 진술되었다. 왜냐하면 $1-4x$는 "$|x|$를 充分히 작게 함으로 맘대로 1에 接近" 되도록 할 수 있기 때문이다. 이와같은 討論에서 定義를 다음과 같이 바꾸어서 말할 수 있다.

1. $1-4x$와 1 사이의 距離는 $|(1-4x)-1|$이다.
2. $1-4x$와 1이 任意로 近接하게 하기 爲해서 모든 실수 $\varepsilon>0$에 對해 $|(1-4x)-1|<\varepsilon$이 되어야 할것이다.
3. δ가 一般的으로 ε에 依存하는 特殊한 陽의 實數일 때 $|x|<\delta$ 또는 $|x-0|<\delta$ 이라면 $|x|$는 "충분히 작은" 혹은 "0에 충분히 가깝게" 될것이다.

이상을 要約해서 말해보면

4. 모든 實數 $\varepsilon>0$에 對해 δ이 存在하여 $|x|<\delta$ ($|x|$가 充分히 작을 때) 이기만 하면, $|(1-x)-1|<\varepsilon$ 이다.
5. 特히 이러한 例에서 $|x|=|-x|$, $|4x|=|(1-4x)-1|$ 임에 주의하고 $|x|<\delta=\frac{\varepsilon}{4}$라고 하면 $|4x|=|(1-4x)-1|<\varepsilon$ 가 되는 $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$을 얻고자 한다. 곧 확실히 $\lim_{x\to0}(1-4x)=1$ 가 정의된다.

萬若에 함수 $1-4x=q(x)$와 이 函數의 極限이 m이라 하고 위의 例를 一般化하고자 한다면 0에서 이 函數의 極限에 對한 一般的인 (ε, δ)의 定義를 얻을 수 있을 것이다.

(極限의 定義)

모든 $\varepsilon>0$ 에 對해 $\delta<0$ 이 存在하여 $|x|<\delta$ 일 때 $|q(x)-m|<\varepsilon$ 이기만 하면

$\lim_{x\to 0} q(x)=m$ 이다.

이와같이, SMSG 의 가장 適合한 線型近似値에 對한 討論은 다음과 같은 定義로 說明할 수 있다.

(定義 1) 方程式 $y=f(0)+mx$ 는 $\lim_{x\to 0} q(x)=m$ 일 때 $f(x)$가 $f(x)=f(0)+(q(x))x$ 로 되면, 點 $P(0, f(0))$에서 $f: x\to f(x)$인 함수의 graph 에 가장 適合한 線型 近似値에 對한 方程式이다.

"쐐기(wedge)" 解析(Elementary Functions, Commentary for Teachers, 64 page)이라 일컫는 두번째 定義는 Elementary Functions 의 99 페이지로부터 발취된 것인데, 여기서 "萬若에 $x=0$ 에 充分히 가깝게 한다면 $f: x\to 1+(1-4x)x$ 의 graph 는 기울기를 맘대로 근소하게 다른 두 직선 사이에 놓이게 된다.

이 두 直線은 f의 graph 上의 點 (0, 1)을 지나야만 한다. 또한 이 直線은 앞에서 들은 例와 같이 直線의 기울기를 나타내는 式이 ε를 包含한 것을 암시하는 "기울기를 맘대로 적게 틀리도록" 하여야만 한다. 이와같은 직선은

L_1; $1+(1+\varepsilon)x$,

L_2; $1+(1-\varepsilon)x$ 이다.

이 graph(Fig 1 을 보라)는 Elementary Functions 98 페이지에 提示된 것이다.

이 特別한 例는 기울기를 各各 $m+\varepsilon$, $m-\varepsilon$로 놓고 y 대의 絕片을 $f(0)$라고 놓으므로 쉽게 一般化 시킬 수 있다.

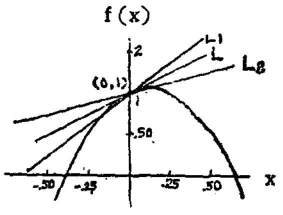

Figure 1

이것은 다음과 같은 定義로 말할 수 있다.

(定義 2) 方程式 $y=f(0)+mx$ 는 모든 $\varepsilon>0$ 에 對해 $\delta>0$ 가 存在하여 $0<|x|<\delta$ 이면 그때 이 函數의 graph 가 두 直線

L_1; $y=f(0)+(m+\varepsilon)x$

와 L_2; $y=f(0)+(m-\varepsilon)x$

사이에 놓이게 된다고 한다면 點 $P(0, f(0)$ 에서 $f: x\to f(x)$ 의 graph 에 가장 適合한 近似値에 對한 方程式이다. 代數學的으로 이것은 $0<|x|<\delta$ 이면

$x>0$ 에 對해

$f(0)+(m-\varepsilon)x<f(x)<f(0)+(m+\varepsilon)x$ 와

$x<0$ 에 對해

$f(0)+(m-\varepsilon)x>f(x)>f(0)+(m+\varepsilon)x$

를 意味한다.

Elementary Function 65 페이지 教師를 爲한 論評(The Comentary foo Leachers)에선 위에서 引用한 定義에 對한 진술은 大學 Calculus 책에서 普通 發見할 수 있는 商에 對한 極限에 연결시킬려는 困難을 피하고 있다. 그러므로 우리가 생각할 가장 적합한 선형근사치에 대한 3번째 定義는 Comentary for Teaehers 가 말하는 商에 對한 極限을 다루어 보겠다.

(定義 3) 方程式 $y=f(0)+mx$ 는

만약에 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=m$ 이면

點 $P(0, f(0))$에서 $f: x\to f(x)$의 graph 에 對한 가장 適合한 線型 近似値에 對한 方程式이다.

(定理 1) 定義 2와 3은 同値이다.

證明: 定義 2에 依해서 $y=f(0)+mx$ 는 모든 實數 $\varepsilon>0$ 에 對해 $\delta>0$ 가 存在하여

$0<|x|<\delta$ 일 때

$x>0$ 에 對해선

$f(0)+(m-\varepsilon)x<f(x)<f(0)+(m+\varepsilon)x$ 이고

$x<0$ 에 對해선

$f(0)+(m-\varepsilon)x>f(x)>f(0)+(m+\varepsilon)x$

가 된다고 하면 點 $P(0, f(0))$에서 $f: x\to f(x)$에 對한 graph 에 對한 接線의 方程式이다. 이것은 모든 $\varepsilon>0$ 에 對해 $\delta>0$ 가 存在하여 $0>|x|<\delta$ 이면 위의 두 不等式은

$$m-\varepsilon<\frac{f(x)-f(0)}{x}<m+\varepsilon$$

혹은 $\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-m\right|<\varepsilon$ 으로 됨을 意味한다.

그러나 極限의 定義에 依해서 이것은

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=m$ 이고

定義 2는 定義 3을 包含한다는 結論을 얻는다. 위의 證明의 各段階는 逆으로 할수 있는 故로 定義 3은 定義 2를 包含한다고 할수 있다. 그러므로 이 두 定義는 서로 同値이다.

(定理 2) f가 多項式이라면 定義 1과 定義 2는 同値이다.

證明 : 定義 1은 함수 f가

$f: x\to f(x)=f(0)+(q(x))x$

와 같이 表示됨을 말한다.

f가 多項式

$f(x)=a_0+(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1})x$

인 경우에는 定義는 쉽게 利用된다. 그러므로 定義 2는 f(x)로 되고 f는 多項式이라는 假定을 하게 된다. 그러므로 모든 $\varepsilon>0$에 對해 $\delta>0$가 存在하여, $0<|x|<\delta$ 일 때

$x>0$에 對해선

$f(0)+(m-\varepsilon)x<f(0)+(q(x))x<f(0)+(m+\varepsilon)x$

$x<0$에 對해선

$f(0)+(m-\varepsilon)x>f(0)+(q(x))x>f(0)+(m+\varepsilon)x$

이다. 이것은 모든 $\varepsilon>0$에 對해 $\delta>0$가 存在하여 $0<|x|<\delta$ 이면 위의 두 不等式

$m-\varepsilon<q(x)<m+\varepsilon$

또는 $|q(x)-m|<\varepsilon$

곧 $\lim q(x)=m$ 로 주어짐을 뜻한다. 그러므로 定義 2가 假定될때 定義 1이 만족된다.

逆으로, 陳述의 逆은 쉽게 증명할 수 있으므로 定義 1과 定義 2는 f가 多項式 일 때 同値라는 結論을 얻는다. 이제 f가 多項式이면 定義 2와 3, 定義 1과 2는 同値임을 證明할 수 있으므로 이때 f가 多項式 일 때 定義 1과 3은 同値이라는 결론을 얻는다.

그러므로 다음의 定理가 證明된다.

(定理 3) 定義 1, 2 그리고 3은 多項式을 適用했을 때 論理的으로 同値이다.

위에서 說明한 定義에 多項函數

$f: x\to a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

를 적용하여 다음과 같이 代置해 보면 곧

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$

$f(0)=a_0,\quad m=a_1$

$q(x)=(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1})$

가 된다.

이와같은 形式的인 定義를 基礎로 하여 SMSG 교과서에 使用된 다음 定理는 엄밀하게 증명할 수 있다.

(定理 4) $f: x\to a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 이 多項函數이라면 點 P(0, f(0))에서 函數 f의 graph의 接線의 方程式 혹은 가장 適合한 線型 近似値가 存在하여 곧 $y=a_0+a_1x$ 가 된다.

이와같이 SMSG 改定版 敎科書를 가지고 數學 工夫를 한 學生들은 다른 명칭으로나 다른 定義로써 Calculus에 對한 正確한 槪念을 얻을 것이다.

이러한 槪念들을 소홀히 다루지 말고 오히려 大學 Calculus에 重要시 했으면 한다.

또 이 SMSG 改定版 속에는 위에 주어진 例와 비슷한 다른 討議 問題들이 많이 있다. 敎師들은 普通 이것을 (ε, δ) 形態로 바꾸어 보면 自己에게 익숙하게 됨을 알것이다. 또한 敎師들은 自己가 研究한 極限槪念을 좀더 嚴格한 數學的 水準에서 그와같은 解析을 해보거나 어떤 陳述이나 定理를 正當化해봄으로써 SMSG의 數學 敎科書를 完全히 理解를 하여 學生들을 指導하는데 確實한 信念과 理解를 發達시켜야 하겠다.

(서울女中)