Network Topology에 對하여 (Ⅱ)

技術解說

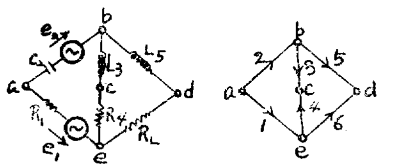
14—4—3

高　　明　　三*

(4) Incidence Matrix

Kirchhoff는 有向性 線型 graph에 포함되어 있는 位相幾何學的인 특성, 즉 주어진 graph의 모든 頂點과 邊들의 연결상태를 0, +1, −1의 세가지 數字로 된 소위 incidence 行列란 개념으로 集約시켰다. 즉 Kirchhoff는 이 行列의 行을 graph의 節點에, 列을 枝에 각각 대응시키고 각 元素들은 위에서 말한 세가지 數字만으로 표시하되, 만일 주어진 graph의 節點 i가 枝 j와 연결되어 있는 경우에는 行列의 ij元素는 1로 하고 연결되지 않았을 경우에는 0으로 규정하였다. 그리고 數字 1의 正負符號는 慣例上 枝 j의 方向이 節點 i에 대해서 收斂할 때는 正, 發散인 때는 負로 각각 규정한다. 그러므로 주어진 graph에 대응하는 incidence 行列을 $A=[a_{ij}]$ 라 하면, 元素 a_{ij}는 0,1 혹은 −1인 數字를 취할 것이지만 특히 graph가 無向性인 경우에는 元素 a_{ij}는 단지 0,1의 두가지 數字만으로 표시한다.

지금 **그림 3-14**와 같은 回路網에 대한 incidence 行列는 **第1表**로 부터 식(3·8)와 같이 될 것이다. **그림 3·14**



(a) 回路網　　(b) 線型 graph

그림 3-14. Network and its linear graph

(b)의 화살표는 주어진 回路網의 枝路電流의 正方向을 표시한 것으로 소위 有向性 graph를 의미한다.

第1表 Incidence Matrix sludule

節 點	枝					
	1	2	3	4	5	6
a	−1	−1	0	0	0	0
b	0	1	−1	0	−1	0
c	0	0	1	1	0	0
d	0	0	0	0	1	1
e	1	0	0	−1	0	−1

$$[A]=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}8)$$

지금 t個의 節點과 b個의 枝로 구성된 어떤 연결된 graph의 incidence 行列을 [A]라 하면 여기에는 다음과 같은 重要 性質이 있으며, 이들은 位相幾何學的 回路網合成에서의 가장 基本이 되는 사항이다.

性質 (1) : Incidence 行列 [A]의 階數(rank)n는 n_t-1보다 크지 않다.

證明 : 만일 incidence 行列 [A]의 임의의 行에 다른 모든 行을 加하면 그 行의 모든 元素들은 零이 될 것이다. 왜냐하면 incidences 行列의 모든 각 列은 한 元素가 +1, 또 다른 한 元素는 −1이고 나머지 元素들은 전부 零인 관계로, 임의의 한列에 속한 元素들의 合은 항상 零이 되기 때문이다. 그런데 行列式의 性質에 의하면 이러한 行의 相加로 n_t次의 임의의 正方 部分行列의 行列式의 値는 不變이다. 따라서 n_t個의 行으로 된 모든 行列式의 値는 零이 되어 incidence 行列의 階數는 n_t보다 적을 것이다.

性質 (2) : Incidence 行列 [A]에서 구성된 임의의 行列式의 値는 0, +1 혹은 −1이다.

證明 : 性質 2에서 요구하는 行列式을 D라 하자. 만일 각 列에 두개의 零이아닌 元素가 있으면, 性質 1에서 말한 바와 같이 모든 行의 合은 零 元素만으로 된 行으로 바꿀 수 있으므로 D=0가 될 것이다. 다음 D에 만일 적어도 한개의 零이 아닌 元素가 들어 있는 한 列이 있을 경우에는 D를 이 列에 관하여 Laplace 展開하면 D보다 次數가 하나 낮은 새로운 行列式 D_1을 얻을 수 있다. 이러한 과정을 번복하면 D는 결국 1次의 行列式이 될 것이다. 따라서 D의 値는 0, +1 혹은 −1이 된다. 讀者들은 上述한 性質 (1)(2)를 식(3·8)을 이용하여 吟味함으로써 그 理解를 더 빨리 할 수 있을 것이다.

性質 (3) : 閉路에 대응되는 incidence 行列의 部分行列의 行列式의 値는 零이다.

證明 : 線型 graph에서의 임의의 獨立된 閉路에서의 節點과 枝의 數는 같다. 그리고 한개의 枝는 단지 두개

*서울工大 專任講師 · 正會員

의 節點만을 가질 수 있다. 따라서 이러한 閉路 만을 나타내는 incidence 行列은 各 列이 오직 한개의 +1과 −1 및 기타 적당한 개수의 0으로 구성된 正方 行列로 된 것이다. 따라서 이 正方 行列의 行들의 合은 전부 零이 되어 性質(3)이 成立하게 된다. 이의 實例로 **그림 3-14** (b)와 식(3-8)에서 獨立된 閉路인 a b c e를 생각 하면 다음과 같은 部分 行列 [A₁]을 들 수 있다.

즉

$$[A_1]=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}=0 \qquad (3\text{-}9)$$

따라서

$$\det[A_1]=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \qquad (3\text{-}10)$$

性質 (4) : Incidence 行列로 부터 구성된 모든 零이 아닌 n次 行列式은 나무(tree)에 대응된다.

證明 : 性質 (4)가 의미하는 行列式에 속하지 않은 incidence 行列의 行에 대응하는 節點을 u라 하자. 行列式의 値는 零이 아니므로 零이 아닌 元素가 하나만 있는 列이 적어도 하나 있고 이 列에 대응하는 枝의 또 다른 零이 아닌 元素는 제거된 行인 u 上에 존재할 것이다. 이 枝(해당 枝의 節點중의 하나가 u임)를 α로 표시하고 v를 枝 α의 또 다른 零이 아닌 元素에 대응하는 節點이라 하면 零이 아닌 元素는 $\lambda_{v\alpha}$가 될 것이다. 다음 $\lambda_{v\alpha}$에 대응하는 小行列式(minor)의 値는 零이 아니어야 하므로, 이 小行列式은 한개의 零이 아닌 元素 만을 가진 列을 적어도 하나는 가져야 한다. 따라서 이 列에 속하는 또 다른 零이 아닌 元素는 이미 제거된 u 行 혹은 v 行 중의 어느 한行上에 존재할 것이다. 결과적으로 이 列은 節點 u 혹은 v를 또 다른 節點 w에 연결하는 한개의 枝에 대응되어, 이 枝를 β라 하자. 零이 아닌 元素 $\lambda_{v\beta}$ 이외의 β 列上의 零이 아닌 元素에 관한 小行列式의 次數는 (n-2)이고 그 値 역시 零이 아니어야 할 것이다. 마찬가지 方法으로 節點 u, v 혹은 w를 또 다른 새로운 節點 x와 연결 시키는 第3의 枝인 γ를 결정할 수 있다. 이 과정을 $(n_t$-1)回 번복하면, 每 過程마다 이미 연결시킨 節點에 항상 새로운 節點을 새로운 枝로 연결시키게 되므로, 나중에는 n個의 枝를 n_t個의 節點에 연결시킨 subgraph를 만들게 될 것이다. 따라서 이 subgraph는 閉路가 없는 소위 나무가 된다. 以上의 結果로 부터 다음과 같이 말할 수도 있다. 즉 閉路가 없는 subgraph에 대응하는 n次의 모든 行列式의 値는 零이 아니다.

性質 (5) : 한 나무에 대응하는 n次의 모든 行列式의 値는 零이 아니다.

이의 證明은 讀者들에게 마끼기로 한다. 以上으로 incidence 行列에 관련된 기본 성질은 대략 기술하였다고 본다. 性質 (4)와 (5)의 組合으로 한나무에 대응하기 위한 incidence 行列의 n次 行列式의 必要하고도 充分한 條件은 그 行列式의 値가 零이 아니어야 한다는 것을 알 수 있다.

(5) Tie-set Matrix 과 連結枝 電流(link current)

이미 定義 20에서 連結枝에 관한 정의를 하였다. 여기서는 우선 連結枝 電流를 變數의 集合으로 선택했을 때의 利點에 관해서 생각해 보자.

그림 3-15는 주어진 有向性 線型 graph를, **그림 3-16**은 이에 대응하는 가능한 세가지 나무를, 그리고 **그림 3-17**은 이들 나무에 의해서 결정되는 連結枝 電流를 표시하며, 각각의 連結枝에 대응하는 閉路의 集合은 나무의 선택법에 따라 달라짐을 알 수 있다. 여기서 閉路의 方向은 連結枝 電流와 같은 方向으로 취한다. 왜냐하면, 한 連結枝에 의하여 비로서 電流가 흐를 수 있는 독립된 閉路가 생기기 때문이다. **그림 3-15**와 **그림 3-17**에 의하여 連結枝 電流는 순환電流 혹은 閉路電流라고 생각할 수 있다. 지금 그림 **3-15**의 각 枝電流를 $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7$ 및 j_8라 하고, 그림 3·17(a)의 閉路電流를 $i_1, i_2, i_3,$ 및 i_4라 하면 다음 等式이 成立한다.

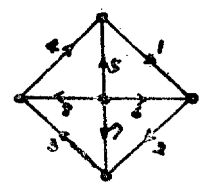


그림 3-15. Oriented linear graph

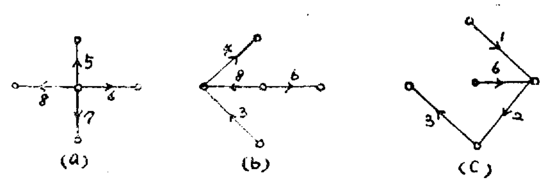


그림 3-16. 前圖에 대응하는 Possible Trees

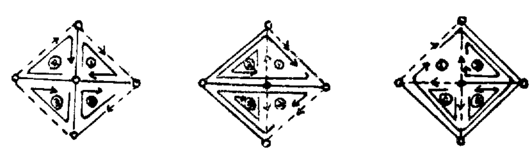


그림 3-17. 그림 3-16에 대응하는 閉路電流 (小圓內의 數字로 표시됨)

$$i_1=j_1,\ \ i_2=j_2,\ \ i_3=j_3,\ \ i_4=j_4 \qquad (3\text{-}11)$$

그림 3-15와 **그림 3-17** (a)에 의하여 나머지 나무가지 電流를 閉路電流의 적당한 중첩으로 나타 낼수 있다. 즉

$$j_5=i_1-i_4$$

$$\left.\begin{aligned} j_6&=i_2-i_1 \\ j_7&=i_3-i_2 \\ j_8&=i_4-i_3 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}12)$$

식 (3-11)을 (3-12)에 대입하여

$$\left.\begin{aligned} j_5&=j_1-j_4 \\ j_6&=j_2-j_1 \\ j_7&=j_3-j_2 \\ j_8&=j_4-j_3 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}13)$$

식(3-13)은 連結枝 電流가 나무가지 電流를 一義的으로 또한 確定的으로 표시함을 의미한다. 이리하여 그림 3-15의 8個의 枝電流중 4個만이 幾何學的으로 獨立임을 알 수 있다. 이들 4個는 각각 선택된 나무에 관한 連結枝의 集合에 대응한다.

다음 그림 3-16의 (*b*)와 그림 3-17의 (*b*)를 비교하여

$$j_1=i_1,\ j_2=i_2,\ j_5=i_3,\ j_7=i_4 \quad (3\text{-}14)$$

$$\left.\begin{aligned} j_3&=i_2+i_4 \\ j_4&=i_1-i_3 \\ j_6&=i_2-i_1 \\ j_8&=i_1-i_2-i_3-i_4 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}15)$$

식(3-15)에 (3-14)를 대입하여

$$\left.\begin{aligned} j_3&=j_2+j_7 \\ j_4&=j_1-j_5 \\ j_6&=j_2-j_1 \\ j_8&=j_1-j_2-j_5-j_7 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}16)$$

가 되어 8個의 枝電流중 4個만이 幾何學的으로 獨立임을 다시 한번 밝혔다.

그러나 8個의 枝電流중, 임의의 4個가 獨立集合이라고 結論지어서는 안된다. 즉 獨立電流의 集合에 대응하는 枝는 나무에서 정해지는 連結枝가 되어야 한다. 왜냐하면 이 條件을 만족할 때만이 電流는 獨立이기 때문이다. 例를 들면 枝電流 j_5, j_6, j_7, j_8는 殘餘枝인 1, 2, 3, 4가 나무를 만들지 않으므로 獨立電流의 集合은 아니다. 以前에도 말했지만 나무의 개념은 枝電流의 集合의 獨立여부를 결정할 수 있는 가장 간단한 方法을 제시하므로, 매우 중요함을 다시 한번 강조한다. 바꾸어 말하면 나무의 개념은 임의의 回路網 graph에 대해서 獨立 電流變數의 可能한 集合을 결정하는 직접적인 方法을 제공함을 알수 있다.

다음 그림 3-16(c)는 그림 3-15의 또 다른 可能한 선택에 의한 나무를 나타내며, 그림 3-17(c)는 이에 對應하는 閉路의 集合을 표시한다. 이 경우에도 兩者를 비교하여

$$j_4=i_1,\ j_5=i_2,\ j_7=i_3,\ j_8=i_4 \quad (3\text{-}17)$$

$$\left.\begin{aligned} j_1&=i_1+i_2=j_4+j_5 \\ j_2&=i_1-i_3-i_4=j_4-j_7-j_8 \\ j_3&=i_1-i_4=j_4-j_8 \\ j_6&=-i_2-i_3-i_4=-j_5-j_7-j_8 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}18)$$

以上의 方法은 주어진 回路網이 만일 복잡한 경우 식(3-13), 식(3-16) 및 식(3-18)을 유도하는데 시간이 많이 걸릴 뿐만 아니라 혼돈 하기 쉬운 缺點이 있으므로, 다음과 같은 소위 Tie-set matrix 을 이용하면 매우 간단해진다. 이는 앞에서 말한 incidence matrix 을 作成할 때와 大同 小異한 方法으로 진행시킨다. Tie-set 行列를 작성하기 위해서는 우선 다음과 같은 Tie-set 表를 만들어야 한다. 이 表는 그림 3-16의 (b)를 기준하여 작성한 것이다.

第 2 表 Tie-set 表

連結枝電流 (閉路電流)	枝			電			流	
	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8
i_1	1	0	0	1	0	−1	0	1
i_2	0	1	1	0	0	1	0	−1
i_3	0	0	0	−1	1	0	0	−1
i_4	0	0	1	0	0	0	1	−1

이 表의 중요한 성질은 첫째로 各行이 각각 대응하는 閉路電流에 관계되는 枝들의 集合을 표시는 점이다. 換言하면 行은 Kirchhoff 의 電壓法則에 해당하게 되어

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_4-v_6+v_8&=0 \\ v_2+v_3+v_6-v_8&=0 \\ v_4+v_5-v_8&=0 \\ v_3+v_7-v_8&=0 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}19)$$

인 等式이 成立하게 된다. 여기서 v_i 는 해당 枝電壓 이다.

둘째는 各列이 곧 枝電流를 閉路電流로 표시하는 方程式의 係數를 의미한다는 점이다. 즉 上記한 Tie-set 表에서

$$\left.\begin{aligned} j_1&=i_1 \\ j_2&=i_2 \\ j_3&=i_2+i_4 \\ j_4&=i_1-i_3 \\ j_5&=i_3 \\ j_6&=-i_1+i_2 \\ j_7&=i_4 \\ j_8&=i_1-i_2-i_3-i_4 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}20)$$

와 같은 等式이 얻어지며, 이는 식(3-14), (3-15)와 同一 함을 알 수 있다. 즉 Tie-set 表는 閉路의 幾何學的 構造 및 枝電流와 閉路電流 間의 代數的 관계를 나타내는 가장 간결하고도 有用한 手段임을 알 수 있다. 또한 식(3-20)에서 枝電流의 獨立變數는 j_1, j_2, j_5, j_7 이고 從屬變數는 $j_3=j_2+j_7$, $j_4=j_1-j_5$, $j_6=-j_1+j_2$, $j_8=j_1-j_2-j_5-j_7$로 됨은 그림 3-17(b)에 의하여 自明하다.

그런데 **第2表**와 같은 表는 行 또는 列로 부터 만들 수 있으나, 일반적인 관점에서는 관련된 閉路를 만드는 枝의 集合을 관찰하여 行부터 만드는 것을 原則으로 한다. 우선 모든 連結枝중에서 하나를 제외한 나머지 連結枝 전부를 開放 혹은 제거시키면, 한 閉路電流만 남고, 나머지는 전부 零이 될 것이며, 이 조작을 連結枝의 數만큼 하나씩 해 나가면 必要한 閉路를 전부 알게 된다. 즉

한個의 閉路電流가 존재하면 이 閉路上에 존재하는 모든 枝의 集合에는 電流가 흐르고 있으므로 이를 數字 1로, 이에 속하지 않은 枝에는 電流가 흐르지 않으므로 數字 0으로 하되, 1의 正負 符號는 枝의 方向性, 즉 주어진 graph에서의 枝의 方向과 連結枝로 인한 閉路의 方向이 一致할때는 正, 반대인 경우에는 負를 취한다. 이상의 과정에 의하여 작성된 것이 第2表이며, 이의 各行은 소위 선택한 連結枝로 因한 閉路上에 존재하는 枝集合을 표시하며, 이를 tie-set라 한다. 回路網 graph의 圖形이 平面 혹은 球面上에서 枝를 교차 시키지 않고 그릴 수 있을 경우에는 임의 tie-set가 全回路網을 두 部分으로 分割시키는 경계를 이룬다고 생각할 수 있다. 따라서 이러한 集合에 속하는 枝의 길이가 한點이 되기까지 축소시키면 回路網(魚網의 糸를 引張했을 때와 같이)은 소위 分離結合(tied off)이 되어, 결국 tie-set로 나눠진 두部分은 공통 節點을 가진 點을 제외하면 실질적으로는 두 部分으로 分離된다. 이러한 뜻에서 tie-set란 이름을 붙이게 되었다.

다음 tie-set表의 各 數字를 行列 形式으로 표시한 것을 tie-set matrix [M]라 한다.

즉

$$[M]=\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&-1&0&1\\0&1&1&0&0&1&0&-1\\0&0&0&-1&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

가 되고 이의 次數는 $(e-n_t+1)\times e$ 이다.

지금 식(3-19)를 行列形式으로 표시하면

$$[J_b]=[M]^T[I_L] \qquad (3\text{-}21)$$

가 된다.

단

$$[I_L]=\begin{pmatrix}i_1\\i_2\\i_3\\i_4\end{pmatrix} \qquad [J_b]=\begin{pmatrix}J_1\\J_2\\J_3\\J_4\\J_5\\J_6\\J_7\\J_8\end{pmatrix}$$

$$[M]^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\\1&0&-1&0\\0&0&1&0\\-1&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-1&-1&-1\end{pmatrix}$$

(6) Cut-set Matrix과 節點對 電壓(Node pair voltage)

임의의 두 節點간의 電位點인 節點對 電壓은 나무가지 電壓에 의하여 一義的으로 표시 할 수 있으므로 節點對 電壓의 특정한 集合인 連結枝 電壓 역시 나무가지 電壓을 사용하여 一義的으로 표시할 수 있다. 이 原理를 그림 3-15의 有向性 線型 graph를 이용하여 설명하기로 하자. 우선 그림 3-16의 나무 (a)를 선택한다. 枝電壓을 枝의 번호에 對應시켜 $v_1, v_2, \cdots\cdots, v_8$라 하면 v_5, v_6, v_7, v_8는 나무가지 電壓임과 동시에 獨立集合이라고 볼 수 있다. 이들 量은 또한 節點對 電壓이라고 볼 수 있으며, 어떤 특정한 變數의 集合 役割을 하므로, 이를 e_i인 符號로 代置한다.

즉

$$\left.\begin{aligned}e_1&=v_5\\e_2&=v_6\\e_3&=v_7\\e_4&=v_8\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}21)$$

라 하면 그림 3-15에 의하여

$$\left.\begin{aligned}v_1&=-v_5+v_6=-e_1+e_2\\v_2&=-v_6+v_7=-e_2+e_3\\v_3&=-v_7+v_8=-e_3+e_4\\v_4&=-v_8+v_5=-e_4+e_1\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}22)$$

가 될 것이다. 다음 그림 3-16의 나무 (b)를 선택할 경우에는 枝電壓 v_3, v_4, v_6 및 v_8가 적합한 獨立集合이 되어

$$\left.\begin{aligned}e_1&=v_3\\e_2&=v_4\\e_3&=v_6\\e_4&=v_8\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}23)$$

라 하면 식(3-22)와 같이

$$\left.\begin{aligned}v_1&=-v_4+v_6-v_8=-e_2-e_3-e_4\\v_2&=-v_3-v_6+v_8=-e_1-e_3+e_4\\v_5&=v_4+v_8=e_2+e_4\\v_7&=-v_3+v_8=-e_1+e_4\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}24)$$

가 되므로 나무가지 電壓의 어떤 集合이란 補木의 枝電壓을 一義的으로 표시 할 수 있는 獨立變數 集合으로 볼 수 있다. 즉, 식(3-22)와 (3-24)는 (3)節(前回)에서 기술한 事項의 實例가 된다.

위의 方法은 tie-set와 마찬가지로 주어진 回路網이 간단한 경우에는 비교적 쉽게 적용되지만, 만일 복잡한 경우에는 tie-set表의 作成法에 유사한 雙對的인 方法인 cut-set表法을 이용해야 한다. 즉 tie-set表는 電流를 기초로 하였으나 여기서는 電壓을 기준으로 하여 작성한다. 즉 한개의 나무가지 電壓(節點對 電壓)을 제외한 나머지 枝電壓을 전부 短絡(零)시켜 作成한다. 일반적으로 이조작으로 連結枝중의 몇개는 동시에 短絡되지만, 한個의 나무가지 外에 이 나무가지의 兩端의 節點對 間을 연결하는 連絡枝는 短絡되지 않은채 남게 된다. 이러한 枝의 集合을 cut set라 한다.

그림 3-18은 그림 3-16의 나무(a)를 이용하여 **第3表**와 같은 cut set表를 作成하는데 필요한 諸般資料를 제공한다.

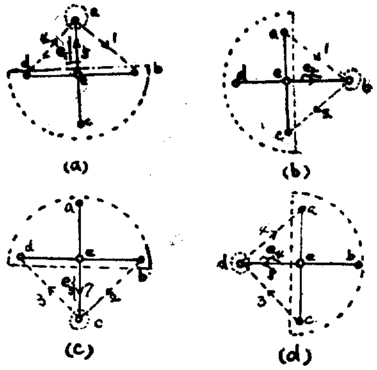


그림 3-18. Cut set 의 作成法

第 3 表 Cut set 表

節點對電壓 (나무가지電壓)	枝			電				壓
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
e_1	-1	0	0	1	1	0	0	0
e_2	1	-1	0	0	0	1	0	0
e_3	0	1	-1	0	0	0	1	0
e_4	0	0	1	-1	0	0	0	1

上表에서 零이 아닌 元素의 正負符號는 한節點對 電壓의 方向과 이에 대응하는 cut set를 形成하는 枝電壓의 方向이 同一할 때는 해당 元素에 (+), 反對인 때는 (−) 符號를 각각붙인다.

다음 cut-set 表가 지니고 있는 기본성질을 살펴보자. 이는 節點對電壓과 枝電壓間의 代數的 관계를 나타내며 各行은 Kirchhoff 의 電流法則에 해당한다.

즉
$$\begin{aligned} -j_1+j_4+j_5&=0 \\ j_1-j_2+j_6&=0 \\ j_2-j_3+j_7&=0 \\ j_3-j_4+j_7&=0 \end{aligned} \qquad (3.25)$$

다음 各列은 枝電壓을 나무 가지 電壓으로 나타내는 方程式의 係數를 의미한다.

즉
$$\left.\begin{aligned} v_1&=-e_1+e_2 \\ v_2&=-e_2+e_3 \\ v_3&=-e_3+e_4 \\ v_4&=-e_1-e_4 \\ v_5&=e_1 \\ v_6&=e_2 \\ v_7&=e_3 \\ v_8&=e_4 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}26)$$

가 되어 이는 식 (3-21) 및 (3−22)와 一致함을 알 수 있다. 여기서 電壓의 獨立變數는 v_5, v_6, v_7 및 v_8 이고, 從屬變數는 $v_1=-v_5+v_6$, $v_2=-v_6+v_7$, $v_3=-v_7+v_8$ 및 $v_4=v_5-v_8$ 로 주어짐은 그림 3-16의 나무(9)에 의하여 自明하다.

다음 **第3表** 또는 식 (3-26)을 行列 形式으로 나타내면

$$[V_b]=[Q]^T[E_n] \qquad (3\text{-}27)$$

단
$$[V_b]=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7\\ v_8 \end{pmatrix},\quad [Q]^T=\begin{pmatrix} -1&1&0&0\\ 0&-1&1&0\\ 0&0&-1&1\\ 1&0&0&-1\\ 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1 \end{pmatrix},\quad [E_n]=\begin{pmatrix} e_1\\ e_2\\ e_3\\ e_4 \end{pmatrix}$$

가 된다. 여기서 行列 Q를 cut set 行列이라고 하며 cut set와 回路網枝와의 관계를 나타낸다. 그리고 $[Q]$의 次數는 $(n_t-1)\times e$ 이다.

끝으로 cut set의 중요한 幾何學的 特性은 **그림 3-18** 을 보면 곧 이해할수가 있다. 例로 同圖(a)에서 나무가지 5만을 除外한 나머지의 나무가지를 전부 短絡하면 나무가지 5의 두節點(兩端)인 a, b에는 각각 주어진 回路網에 속하는 節點들이 중첩될 것이다. 다음 두 節點組가 될 a와 b를 각각 한손에 잡고 잡아당길 때 (단 여기서 모든 枝는 彈性이 있다고 가정한다) 늘어나는 枝의 集合이 곧 cut set에 해당한다. 이 때 늘어난 枝를 切斷하면 주어진 본래의 回路網 graph은 두部分(a 組와 b 組)으로 완전히 분리 될 것이다. 이러한 理由로 볼때 cut set란 일반적으로 이에 속하는 枝를 切斷한다는 動作에 의하여 回路網이 두 部分으로 분리되도록 선정한 最小數의 枝로된 集合이라고 생각할 수 있다.

以上에서 설명한 $[M]$와 $[Q]$의 作成法에 관한 例題를 하나 두기로 한다.

(例 題) (a) **그림 3-19**와 같은 회로망의 線型 graph를 그려라.

(b) 나무 12378에 대응하는 tie-set와 cut set 行列을 유도하고 獨立變數와 從屬變數간의 관계를 구하라.

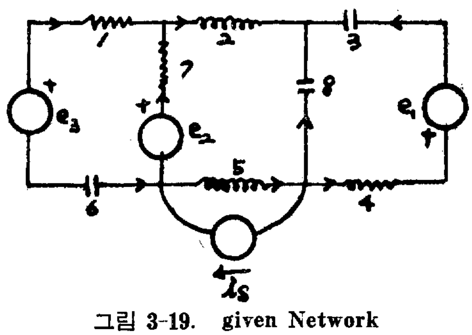


그림 3-19. given Network

(解)

(a) 線型 graph를 그릴 때 電壓源은 短絡要素로 電流源은 開放要素로 취급하면 되므로 **그림 3-20**과 같이 될 것이다.

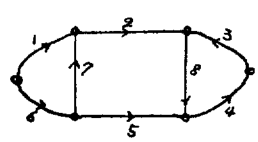


그림 3-20. Linearg raph

(b) 枝 1 2 3 7 8에 대응하는 나무는 **그림 3-21**과 같다. 다음 tie set 行列과 cut-set 行列은 각각 **그림 3-22**와 **그림 3-23** 의하여 작성한다.

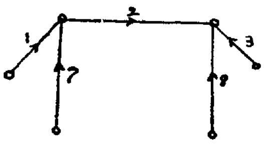


그림 3-21. Tree 12378

(i) Tie-set 行列

나무 12378의 連結枝는 4, 5, 6이므로 이들 連結枝가 각각 獨立的으로 접속되었을 때의 電流分布는 **그림 3-22**와 같게 될 것이다.

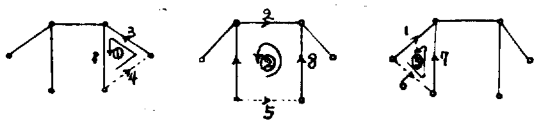


그림 3-22. Tie-set 行列의 유도.(단 小圓속의 數字는 해당 閉路電流를 표시함)

따라서 tie-set 表는

連結枝電流(閉路電流)	枝			電			流	
	j_1	j_2	j_3	j_4	j_5	j_6	j_7	j_8
i_1	0	0	1	1	0	0	0	−1
i_2	0	−1	0	0	1	0	−1	1
i_3	−1	0	0	0	0	1	1	0

가 되며 tie-set 行列은

$$[M]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

로 주어진다. 다음 枝電流와 連結枝 電流와의 사이에는

$$\left.\begin{aligned} j_1&=-i_3 \\ j_2&=-i_2 \\ j_3&=i_1 \\ j_4&=i_1 \\ j_5&=i_2 \\ j_6&=i_3 \\ j_7&=-i_2+i_3 \\ j_8&=-i_1+i_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}28)$$

인 等式이 成立하며, 電流에 관한 獨立 및 從屬變數는 다음과 같이 分類된다.

$$\left.\begin{aligned} &\text{獨立變數}: j_4,\ j_5,\ j_6 \\ &\text{從屬方程式}: j_1=-j_6 \\ &\qquad j_2=-j_5 \\ &\qquad j_3=j_4 \\ &\qquad j_7=-j_5+j_6 \\ &\qquad j_8=-j_4+j_5 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}29)$$

(ii) Cut-set 行列

나무 1 2 3 7 8에 대응하는 cut-set 表는 **그림 3-18**와 같은 方法에 의하여 直觀的으로 다음과 같이 作成할 수 있다. 단 나무가지 1, 2, 3, 7, 8에 대응하는 나무가지 電壓을 각각 e_1, e_2, e_3, e_4, e_5라 함.

나무가지 電壓	枝			電				壓
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8
e_1	1	0	0	0	0	1	0	0
e_2	0	1	0	0	1	0	0	0
e_3	0	0	1	−1	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0	1	−1	1	0
e_5	0	0	0	1	−1	0	0	1

따라서 cut set 行列 [Q]은

$$[Q]=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

가 되고 枝電壓과 나무가지 電壓과의 관계는

$$\left.\begin{aligned} v_1&=e_1 \\ v_2&=e_2 \\ v_3&=e_3 \\ v_4&=-e_3+e_5 \\ v_5&=e_2+e_4-e_5 \\ v_6&=e_1-e_4 \\ v_7&=e_4 \\ v_8&=e_5 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}30)$$

인 等式으로 주어지며, 나무 1 2 3 7 8에 대응하는 電壓에 관한 獨立 및 從屬變數는 다음과 같이 된다. 즉

$$\left.\begin{aligned} &\text{獨立變數}: v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_7,\ v_8 \\ &\text{從屬方程式}: v_4=-v_3+v_8 \\ &\qquad v_5=v_2+v_7-v_8 \\ &\qquad v_6=v_1-v_7 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}31)$$

위에서 설명한, tie-set와 cut-set 行列에 의해서 선택한 枝電流變數 또는 枝電壓變數들의 獨立 集合性 여부를 판정하는데는 幾何學的 方法과 解析的 方法의 두가지가 있다. 前者는 枝電流의 獨立集合을 선택하는데 있어서, 그들이 補木을 形成하고 있는가, 또는 枝電壓인 경우에는 그들이 나무를 形成하고 있는가를 검토하면 된다. 다음 後者인 解析的 方法이란 주어진 枝電流變數 또는 枝電壓數들의 集合에 대응하는 이들 列로된 行列의 行列式의 値가 零이 아닌 경우에 한해서 그 獨立性이 보장된다는 것이다. 예를 들면 앞 例題에서 얻은 [M]에서 枝電流 j_4, j_5, j_6의 獨立性 여부는 그들의 行列式이

$$\triangle M=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-1 \qquad (3\text{-}33)$$

가 되므로, 獨立集合임을 알 수있다. 마찬가지 方法으로 [Q]에서 얻은 枝電壓變數 v_1, v_2, v_3, v_7, v_8는 그들의 行列式이

$$\triangle Q=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1 \qquad (3\text{-}34)$$

가 되므로 이것 역시 獨立 集合을 形成하고 있음이 立證되였다.

그리고 그림 3-20의 線型 graph에 해당하는 기타의 다른 나무들이 가능하므로 이에 대응하는 獨立枝 電流變數 역시 存在한다.

以上을 종합하면 tie-set 行列에서 선택한 零이 아닌 $(e-n_t+1)^2$ 次의 行列式은 枝 電流變數의 獨立 集合에 대응하며, cut-set 行列에서 선택한 임의의 零이 아닌 $(n_t-1)^2$ 次의 行列式은 枝電壓 變數의 한 獨立 集合에 대응한다고 말할 수 있다.

(7) Tie-set 및 cut-set 行列의 線型 變換

주어진 回路網에 대해서 어떤 獨立變數의 集合이 일단 선택되었다고 하면, 이들 變數들은 임의의 非特異 線型變換(nonsingular linear transformation)에 의하여 새로운 獨立變數들의 集合으로 만들 수 있으나, 처음에 가졌던 幾何學的인 뜻은 이미 상실하게 된다. 지금 i_1, i_2, $\cdots i_n$를 電流變數들의 獨立的인 集合이라고 하면 새로운 獨立變數들의 集合인 i'_1, i'_2, $\cdots\cdots i'_n$는 다음과 같은 非特異 線形變換에 의하여 얻을 수 있다.

$$\left.\begin{aligned} i_1' &= \alpha_{11}i_1+\alpha_{12}i_2+\cdots\cdots+\alpha_{1n}i_n \\ i_2' &= \alpha_{21}i_1+\alpha_{22}i_2+\cdots\cdots+\alpha_{2n}i_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ i_n' &= \alpha_{n1}i_1+\alpha_{n2}i_2+\cdots\cdots+\alpha_{nn}i_n \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}35)$$

上式을 行列로 표시하면

$$[I']=[\alpha][I] \qquad (3\text{-}36)$$

가 되고 係數의 行列式 $|\alpha|\neq O$는 또한 어떤 獨立 集合을 의미한다.

節點對 電壓 獨立變數들의 集合을 共通 基準 節點 獨立變數(node-common-datum independent variables)로 變換시키는 것은 간단한 線型 變換의 한 例이다. 즉 **그림 3-22** (a)는 어떤 回路網의 graph이고, (b)도는 선택된 나무, (c)도는 節點 O에 접속된 나무와 유사한 구조이다. 여기서 節點 O는 소위 이 回路網의 나머지 모든 節點과 관계되는 共通 基準 節點이다. 이들 그림으로 부터 節點對 電壓과 節點基準電壓(node-datum voltage)은 다음과 같은 非特異 變換에 의하여 相互關係를 맺고 있음을 알 수 있다.

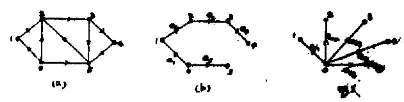


그림 3-22.

즉

$$\left.\begin{aligned} e_{o1} &= e_1 \\ e_{o2} &= e_1+e_2 \\ e_{o3} &= e_1+e_2+e_3 \\ e_{o4} &= e_1+e_2+e_3+e_4 \\ e_{o5} &= e_5 \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}37)$$

行列로 표시하면

$$[E_{dn}]=[\alpha][E_n] \qquad [3\text{-}38]$$

$$[E_{dn}]=\begin{pmatrix} e_{o1} \\ e_{o2} \\ e_{o3} \\ e_{o4} \\ e_{o5} \end{pmatrix},\quad [\alpha]=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{pmatrix},\quad [E_h]=\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{pmatrix}$$

가 되며 $[\alpha]\neq 0$이므로 이는 분명히 非特異 變換이다.

(8) Duality (雙對性)

Network topology에 대한 기본 사상의 하나인 duality에 관해서 간단히 설명하기로 한다. 즉 duality란 개념은 실지 回路網 문제를 다루는데 매우 편리한 方法을 제공해준다. 지금 **그림 3-23**의 (a)(b)의 平衡方程式을 세우면

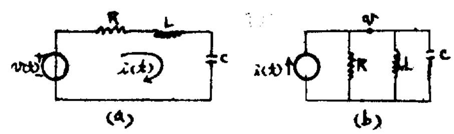


그림 3-23. Dual circuit

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int it=v(t)$$

$$C\frac{dv}{dt}+Gv+\frac{1}{L}\int vdt=i(t)$$

가 된다.

그림 3-23 (a)(b)를 비교해 보면 그 幾何學的인 구조는 달라졌어도 電壓과 電流의 役割이 교환된 것만을 제외하면 (a)에서의 v와 i와의 관계는 (b)에서의 i와 v와의 관계와 같다고 볼 수 있을 것이다. 이와 같이 주어진 回路의 獨立變數와 從屬變數間의 관계가 같은 경우 이들 두 回路를 소위 duality 하다고 한다. 그리고 이 duality에는 定性的인 면과 定量的인 面의 두가지가 있는데 前者는 주로 第2表와 같이 回路網의 幾何學的性質즉 linear graph의 基本 性質을 의미하고, 後者는 線型系에 이용된 線型要素의 어떤 結果를 의미하여 第3表와 같다.

第2表 duality 의 定性的인 面

Loop.................Node pair

Tree branch.........Link

Potential.............Current

Series................Parallel

Open circuit(電流=0)...Short circuit(電壓=0)

Tie set.............. Cut set

第3表 duality 의 定量的인 面

$V_R=Ri_R......i_R=GV_R$

$V_L=L\frac{di}{dt}......i_C=C\frac{dV_C}{dt}$

$V_C=\frac{1}{V}\int_0^t icdt ......i_L=\frac{1}{L}\int_0^t v_Ldt$

그런데 loop 와 node pair 의 雙對性은 平面 또는 球面上에 그릴 수 있는 주어진 graph(mappable graph)의 dual 를 그리는데 필요한 規則을 제시해 준다.(실지로 이에 관한 規則은 1930년 W. Cauer 에 의해서 계통적으로 연구 발표 되었다). 다음에 주어진 graph 의 dual 를 그리는 과정을 열거한다. 단 여기서 다루는 graph 는 어디까지나 mappable graph 이다.

1. 주어진 graph 의 모든 loop 심지어 回路網의 外部까지 이를 dot 로 나타낸다.

2. 각 技를 橫斷하면서 두 dot 를 한 선으로 연결한다.

(例)

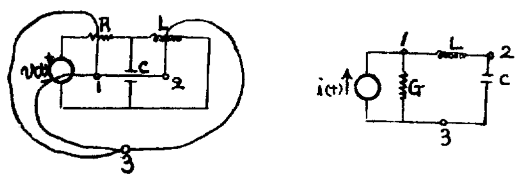


그림 3-24. 雙對性 回路의 작성법

Dual graph 의 가장 중요한 성질은 그 loop 가 주어진

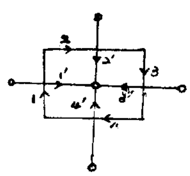


그림 3-25. 雙對枝의 方向

본래 graph 의 node pair 에 대응되며, 이의 逆도 成立한다는 것과 이러한 變換 과정에서 枝의 數는 不變이라는 점이다. 다음 일반적으로 有向性 graph 의 dual 역시 有向性 graph 가 되는데 이 때 두 graph 에서의 方向을 확실히 하기위하여 雙對枝(dual branch)의 方向은 **그림 3-25** 와 같이 時計方向으로 정한다.

(例 題) 그림 3-25(a)와 같은 graph 의 dual graph 는 (c)와 같다. 여기서 (b)는 枝 相互間의 교차 없이 주어진 graph 를 平面에 그린것으로 이는 어디까지나 位相幾何學的으로 同相이다. 이와 같이 주어진 graph (a)에서 (b)로 다시 그린 이유는 (c)를 쉽게 얻기 위한 것이다.

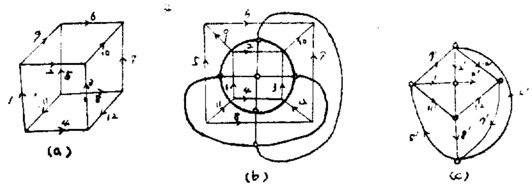


그림 3-25. 有向性 雙對枝

다음에는 獨立된 環路電流變數의 數와 獨立된 節點對電壓의 數가 같은 bridge 回路 또는 接地梯子型 回路들은 **그림 3-26**의 (a)(b)와 같이 소위 自己 雙對 graph (self dual graph)를 形成한다.

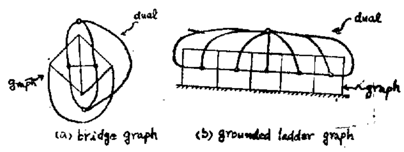


그림 3-26 Self dual graph

이상 설명한 바와 같이 graph 의 雙對性에서는 어떤 數値 係數에 관한 資料는 얻을 수 없지만, 만일 雙對性 graph 의 각枝들이 주어진 回路網의 해당 要素들의 數値係數와 같은 値로 된 값을 가질 경우도 능히 생각 할 수 있다. 이러한 경우, 그 回路網을 逆回路網 혹은 可逆回路網이라고 부르며 filter 의 設計와 回路網理論의 특수한 문제를 다루는데 매우 중요한 역할을 한다.

(9) Planar 및 Nonplanar Network

前節에서 설명한 소위 線型 回路網의 dual 를 구하기위해서는 주어진 graph 의 모든 cut set 에 대해서 이에 대응하는 tie set 가 dual graph 에 존재해야 하는데, Kuratowski 는 1930年에 球面上에서의 주어진 graph 의 mappability 에 관한 位相幾何學 硏究를 완성하여 다음과 같은 결론을 내렸다. 즉 **그림 3-27**의 (a)(b)와 같은 두가지 기본구조의 兩者 혹은 어느 하나라도 포함하지 않은 모든 linear graph 는 球面上에 枝들의 교차 없이 그릴수 있으며 이를 planar graph 라 한다. 그리고 이들 기본 구조를 포함할 경우에는 平面上에 그릴수 없으며, 이를 nonplanar graph 라 한다. 그림 3-27를 소위 Kuratowski 기본구조라 한다.

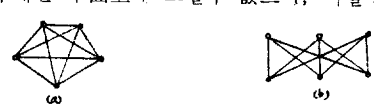


그림 3-27. Kuratowski 기본 구조

以上으로 network topology 에 관한 기초적인 사항을 끝맺기로 하고 다음부터는 실제 回路문제에 어떻게 應用하는가를 설명할 예정이다.

(1965年 10月 7日 接受)