技術解說
14—2—3

Network Topology 에 對하여 (I)

高 明 三*

1. 序 論

回路網位相學(network topology)이란 주어진 電氣回路網을 位相幾何學的인 관점에서 다룬 것으로, 그 基本槪念은 電氣回路網을 이해하며 조직적으로 연구하는데 필요한 새로운 方法을 제시해 준다. 位相幾何學 자체는 이미 19世紀를前後 하여 발전하기 시작하였으나, 位相幾何學的인 槪念을 工學 특히 電氣工學의 回路網理論에 적용시켜 本格的인 硏究가 진행된 것은 1950年前後이다.

최근 美國을 비롯한 여러나라에서 발표된 이 분야에 관한 論文에 의하면, 이미 回路網解析에 관한 領域을 벗어나 回路網合成 및 기타 여러가지 應用문제까지 다루지고 있음을 알 수 있다. Network topology의 중요한 應用面을 열거하면 다음과 같다.

① 線型電氣回路網의 解析과 合成

② 理想變成器를 가진 電氣回路構成問題

③ 回路變換問題

④ 接點 回路 및 整流器回路의 構成問題

⑤ 通信回路網의 構成問題

⑥ Linear & sampled-data system의 解析과 構成問題

등 실로 電氣回路理論의 혁신적인 分野라 할 수 있다. 그런데 이들 모든 分野에 대한 位相幾何學的硏究는 어디까지나 位相幾何學의 기초 개념에 입각하여 回路網에 관한 새로운 公理와 定理를 세우고 이로부터 발전된 것이 network topology이다. 현재 이 순간에도 이의 基礎理論의 발달과 그 應用面이 연구 발표되고 있는 실정이다.

앞으로 기술할 內容은 과거 數年間 筆者가 서울大學校 工科大學 電氣工學科 四學年학생들에게 실시한 network topology에 관한 講義內容을 다소 보충한 것으로, 讀者들의 편의를 위하여 우선 位相幾何學의 기초 개념을 간단히 설명하고 network topology에서 취급할 諸 定義와 이의 回路的인 뜻을 설명한 후, network topology에 대한 기초적인 개념과 이론에 대하여 앞으로 약 4回로 나누어 기술 할려고 한다.

이 分野에 관심을 가지신 분 또는 실지 現場에서 종사하고 있는 電氣 電子 系統의 既成技術者들이 modern network theory의 한 분야인 network topology의 개념과 흐름을 이해하는데 조금이라도 도움이 된다면, 筆者는 이 글을 쓴 보람을 느끼겠다.

* 서울工大 專任講師・正會員

2. Topology의 基礎概念

Topology는 우리말로 位相數學이라 한다. 이 位相數學은 대개 集合論的 位相數學, 代數的 位相幾何學 및 位相解析學의 세가지로 분류되며, 距離空間論, 位相空間論등 소위 一般的 位相數學(general topology)은 第一분야에 속한다. 그리고 電氣回路網理論과 관련된 분야는 第二분야인 代數的 位相幾何學이며 이를 組合論的 位相幾何學(combinatorial topology)이라고도 부른다.

일반적으로 topology의 탄생은 後述하는 Königsberg bridge 문제에 그 기원을 두고 있다고 하며, 이 문제를 L. Euler(1707~1783)가 해결하여 多面體論으로 발달시켰다. 그러나 현재 볼 수 있는 것과 같은 系統的인 硏究는, 마치 電磁氣學에 대한 Maxwell의 공헌과 같이, 이는 전적으로 天才的인 H. Poincaré(1895)에 의해서 이루어졌다.

(1) Euclid 幾何學과 位相幾何學

과거 우리가 國民學校시절부터 배워왔고 또한 日常生活과 밀접한 관계가 있는 Euclid 幾何學과 앞으로 취급할 位相幾何學과의 差異點에 대해서 기술한다.

Euclid 幾何學에서 다루는 圖形은 우리가 잘 아는 바와 같이 直線, 線分, 平面, 三角形 및 四面體와 같은 直線圖形과 圓, 포물선, 球面 및 雙曲面과 같은 曲線圖形 또는 曲面圖形이며, 이들은 전부 代數方程式으로 표시할 수 있는 비교적 規則的인 圖形뿐이다. 여기서 문제되는 것은 Euclid 幾何學의 公理系가 표시하드시 길이, 角 및 順序 關係에만 제한 되었다. 그러나 位相幾何學은 連續의 幾何學이며 1對 1의 연속 變換에 의해서도 변하지 않은 圖形의 性質과 連續 變換자신을 연구하는 학문이다. 위에서 말하는 連續 이란 어디까지나 주어진 幾何學的인 圖形이 이를 구성하고 있는 여러가지 部分사이에서 성립하는 接觸關係를 파괴하지 않고 變形될때의 變形을 의미 한다. 특히 주어진 接觸關係를 유지하면서 또한 새로운 接觸이 발생하지 않은 變形을 位相的이라 한다. 따라서 位相的인 變形에서는 서로 접촉하고 있는 圖形

部分은 그대로 접촉을 계속하고, 접촉하지 않은 部分은 새로 접촉할 수 가 없다. 간단히 말하면 位相的 變形에서는 斷絕도 接合도 이러나지 않는다. 따라서 相異한 두 點이 한點으로 합치지도 않는다. **그림 1·1**(a),(b)는 位相的 變形이고 (c)는 두點(a이 b)이 한點으로 合쳐짐으로써 새로운 접촉이 발생했음을 표시하므로, 이는 位相的 變形이 아니다. 즉 (a)와 (b)는 位相幾何學的 性質(topological properties)이 不變인 圖形이 되지만, Euclid 幾何學

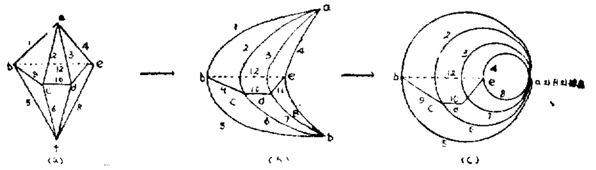


그림 1·1

에서는 완전히 다른 두 圖形임은 두말할 것도 없다.

幾何學的 圖形(面, 線등)의 位相的인 變形을 다음과 같이 생각하면 쉽게 이해할 수 있을 것이다. 지금 3角形 abc를 **그림 1·2**의 (a)와 같이 gum膜上에 그렸다고 하자 다음 gum膜을 꾸부리되 서로 접촉하지 않은 범위내에서 (a)圖와 같이 접으면 이들 두 3角形은 위에서 말한 位相的 變形이 될것이다. 왜냐하면, (a)圖의 3角形

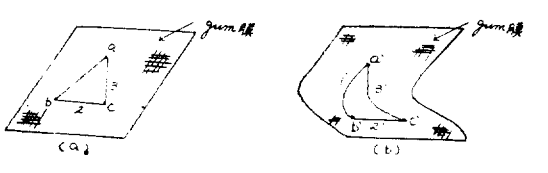


그림 **1·2**

을 구성하는 頂點 a. b. c와 邊 1. 2. 3와의 接觸關係는 (b)圖의 3角形을 구성하는 頂點 a′, b′, c′ 와 邊 1′, 2′, 3′와의 接觸關係와 완전히 1對 1의 對應關係를 유지하면서 서로 mapping 할 수 있기 때문이다. 이러한 두 圖形을 位相同形 혹은 同相(homeo morphic)이라 한다.

電氣工學에서 다루는 回路網은 손쉽게 位相同形인 다른 回路網으로 變形할 수 있다. 예를들면 **그림 1·3**(a)(b)와 같이 세個의 抵抗으로된 回路는 Euclid 幾何學的인 모양은 다르지만, 이것은 相互 同相 임과 동시에 電氣的 等價回路이다. 이 事實은 位相幾何學的 概念을 回路網理論에 적용할 수 있다는 암시를 우리에게 던져 준다.

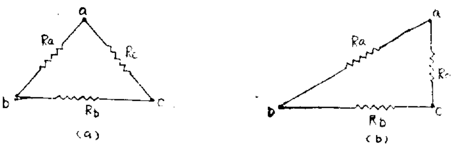


그림 **1·3**

(2) Königsberger bridge 문제

앞에서 말한바와 같이 Euler는 1736年에 graph theory (3절을 참조)에 관한 첫 論文을 Königsberger bridge에 관한 문제를 발표 하였다. Königsberger bridge란 **그림 1·4**와 같이 東프로시야의 [都市인 Königsberger 市內에 가설된 7個의 人道橋를 의미하는데, 이들 다리를 각각 한번만 건너가서 7個의 人道橋 전부를 건너갈 수 있을까 하는 문제이다.

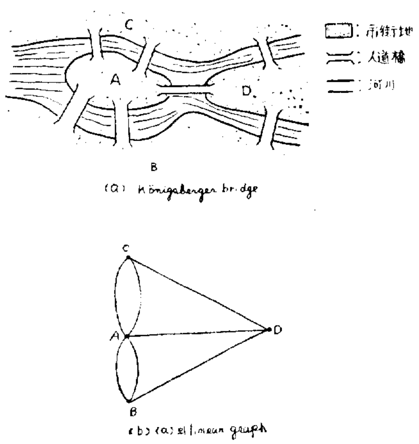


그림 **1·4 Königsberger bridge** 문제

그림 1·4(a)에서의 流線부분은 江을 표시하고, A,B,C 및 D는 각각 이들 江의 주변에 있는 市街地를 의미한다. 지금 그림 1·4(a) 에서의 市街地를 한 點으로 생각하고 이를 (•)으로 표시하되 그림 1·4(a)와 같이 부호 A,B,C 및 D를 부친다. 다음 人道橋를 이들點을 연결하는 線分 혹은 折線으로 표시하면, 곧 그림 1·4(b)가 될것이다. **3** 절에서 설명하겠지만, 그림 1·4(b)를 **그림1·4**(a) 의 소위 linear graph 라고 한다. 그림 1·4(a)와 1·4(b)를 비교함으로써 Königsberger bridge 문제란 그림 1·4(b)에서 人道橋를 나타내는 線分을 1回만 지나서 이 圖形을 완전히 그리는 문제라고 볼 수 있다. 단 A,B,C 및 D로 표시되

點(・)에서는 이를 지나는 回數의 제한을 받지 않는다.

그런데 위에서 말한 Königsberger bridge 문제를 풀기 위해서는 다음과 같은 定理가 필요하다.

〔定理 1〕 有限個의 點과 이를 연결하는 線分으로 된 圖形 G에서 각 點에서 나온 線分의 個數가 偶數인 경우, G는 임의의 點을 출발하여 이 點에 돌아오는 單純閉折線을 포함하게 된다.

證明 : G의 임의의 한點 a에서 출발하되, 한 線分을 두번 지나지 않도록 진행할 경우, 點은 有限個이므로 전에 한번 지난 點 b(a와 일치할 경우도 있다)에 되도라 올 것이다. 이때 點 b로 부터 도중의 點과 線分을 지나 b로 되돌아옴으로써 이루워지는 閉折線은 單純閉折線이 되며, 이를 G_1이라 하자. G에서 閉折線 C_1의모든 線分을 제거한 圖形에 만일 孤立點(線分이 없는點)이 있으면 이것마저 제거한 나머지 圖形 G_1 역시 G와 같은 성질을 계속 유지 하지만, 線分의 수는 확실히 C보다 적다. 다음 위와 같은 방법으로 G_1에 함유된 單純閉折線 G_2를 작성하여 G_1에서 G_2를 제거한 圖形을 G_2라 한다. 이러한 과정을 계속 번복하여 같은 종류의 圖形의 系列 G, G_1, G_2, G_3……을 작성해 나가면 임의의 번호 n에 대해서 Gn는 單純閉折線 Cn+1 으로된 圖形이 될것이다. 따라서 n+1 個의 單純閉折線 C_1, C_2, C_3……, Cn, Cn+1을 중첩시키면 G가 될 것이다. 그런데 圖形 G의 임의의 頂點은 이들 單純閉折線에 속하는 어느 한 點이라고 생각할 수 있으므로 本定理는 성립한다.

[定理 2]

有限個의 點과 線分으로 된 圖形이 단지 한개의 연결된 部分으로 되어 있을 때, 이 圖形의 線分을 1回만 지나서 이 圖形을 완성할 수 있는 條件은 한點에서 나온 線分의 個數가 奇數인 點이 없거나, 혹은 있어도 두개만인 경우이다.

證明 : 우선 주어진 條件이 必要 條件임을 증명하자. 그러기 위해서는 定理에서 주어진 圖形 G가 한번에 완성할 할 수 있다고 가정한다. 圖形을 그리기 시작하는 點과 끝맺는 點이 共通點이라고 생각해도 무방할 것이다. 出發點 부터 그리는 순서에 따라서 圖形을 진행하여 終點에 이르렀을 때, 모든 線分은 한번만을 통과한 결과가 된다. 그러나 出發點과 絡點 이외의 도중의 點과 연결된 線分을 생각하면, 이들 點을 1回 지나갈 때 마다 이미 통과된 두個의 線分들이 各點에 생기게 될 것이므로, 이러한 點에서 나오는 線分의 數는 偶數임이 틀림없다. 다음 出發點과 終點이 일치하고 있을 때는 도중의 點과 마찬가지로 확실히 偶數이고, 出發點과 終點이 일치하지 않을 경우에는 이들 두 點과 연결된 線의 수는 奇數이다. 따라서 必要條件임이 증명 되었다.

다음 充分條件임을 증명하자・圖形 G의 各點과 연결된 線分의 개수가 전부 偶數인 경우, G에서 한線分을 제거함으로써 奇數個의 線分과 연결된 點 A,B가 생겼다고 하자. G는 연결된 圖形 이므로 A부터 G의 線分을 1回만 지나가면서 B에 도달할 수가 있을 것이다. 이 길을 C라한다. G에서 C의 線分을 제거한 圖形에서 다시 孤立點까지 제거시킨 나머지 圖形을 G이라 한다. G_1의 각 點에 연결된 線分의 數는 偶數이다. 그런데 가정에 의하여, C는 연속 圖形이므로, G_1와 C間에는 共通點이 있을 것이다. 이 共通點중 A에서 출발하여 길(路) C에 따라 진행할 때 처음 도달하는 點을 p_1이라 하자. 定理 1에 의하여 G_1에는 p_1에서 출발하여 p_1에 되돌아오는 閉折線이 있을 것이며 이를 C_1'라 한다. 지금 A에서 C에 따라 p_1까지 간 후 길 C_1'에 따라 p_1에 되돌아 오고 그후, 재차 C에 따라 B까지 이르는 길을 C_1이랴 한다. 이번에는 G와 C_1부터 같은 圖形 G_2와C_2'를 만들고 새로운 길 C_2를 선정하다. 이하 同一한 方法을 번복하여 A에서 B에 이르는 길의 系列 C, C_1, C_2,……을 만들어 나가면, 먼저 구성된 길의 線分은 반드시 후에 구성되는 길의 線分의 일부가 되며, 線分의 수는 증가한다. 따라서 n에 대한 길 Cn는 G의 全線分을 통과함과 동시에 각 線分을 1回씩 통과한다. 즉 G는 이 Cm에따 라 지나가므로써 한번에 전부 그릴 수 있을 것이다.

定理 2에 의하여 Königsberger bridge 문제는 다음과 같이 해결할 수 있을 것이다. 즉 그림 1・4(b)에서 奇數個의 線分이 있는 點은 A,B,C,D의 네개이므로 그림 1・4(a)의 人道橋를 전부 1回씩만 건너갈 수 있는 方法은 不可能함을 알 수 있다.

(3) Euler의 定理

凸多面體의 頂點의 수를 v, 邊의수를 e, 面의 數를 f라 하면 v,e,f 間에는 다음 관계가 成立하며 이를 Euler의 定理라 한다.

$$v-e+f=2 \tag{1}$$

식(1)의 증명에는 Steiner의 方法, Legender의 方法 및 기타 여러가지의 증명法이 있으나 식 (1)의 증명은 생략한다. 그런데 3次元 Euchid空間內에서 한平面은 空間을 두部分으로 나누지만 한쪽을 平面上의 點까지 포함시켜 半空間이라 한다. 有限個의 半空間의 共通部分이되는 空間內의 한정된 圖形을 Euler 定理에서 말하는 凸多面體과 한다.

위에서 선명한 Königsberger bridge 및 Euler의 定理가 network topology에서 차지하는 분야란 단지 이들 문제와 결부된 基本 idea 뿐이라는 것을 강조하고 싶다.

또한 이들 문제에서 취급한 바와같은 直線圖形, 多面體 및 이들의 一般化圖形이라고 생각할 수 있는 複體등이 代數的 位相幾何學에서 다루는 基本圖形이 된다.

3. Network Topology

電氣回路網을 해석 한다는 것은 대부분의 경우 回路網의 임의의 점에서의 電壓, 電流를 구하는 문제로 귀착된다. 電氣回路網은 각기 고유한 電壓, 電流特性을 가진 要素(R,L,C)의 집합인데, 이를 要素의 幾何學的構造 여하에 따라 回路網 전체로서의 電壓,電流特性이 달라진다. 즉 回路網要素의 幾何學的 構造는 回路網을 해석하는데 필요한 獨立된 閉路電流(loop current) 혹은 節點對 電壓(node-pair voltage)의 수를 완전히 결정하므로 回路網의 幾何學的 構造를 연구하는데 필요한 topology 분야만을 취급한다. 그러므로 topology 의 數學的理論보다 오히려 回路網의 幾何學的構造를 나타내는 線型圖形(linear graphs)의 基本性質에 관한 組合論的 位相幾何學의 기초만을 설명한다. 1847年에 Kirchhoff 에 의해서 처음으로 제창된 閉路電流의 개념은 應用數學의 중요한 部分을 차지하고 있는 topology 의 실질적인 原理이다.

(1) 回路網圖形學(network geometry)

回路網圖形學이란 주어진 電氣回路網을 구성하고 있는 각종 要素(R,L,C 및 電壓源과 電流源)들이 어떠한 群를 形成하고 있으며, 또한 이들의 端子가 어떻게 서로 결합되어 있는가를 연구하는 學問이다. 즉 回路網의 幾何學的 構造 및 이에 관련된 性質을 論하기 위하여 回路網 graph 를 사용하는데, 이는 要素의 종류를 구별하지 않고 이들 모든 要素를 邊(線分 또는 枝路라 한다)으로 표시하고, 각 要素의 兩端에 있는 端子를 적은圓(이를 點, 節點. 頂點이라고도 함)으로 나타낸 graph 를 의미한다. **그림 3·1** 은 受動形 回路網과 그 graph 을 표시한다.

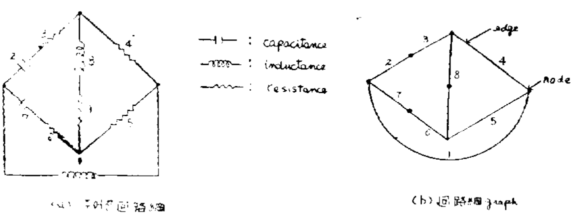


그림 3·1

다음 能動回路網 즉 電源이 있는 경우, 電源의 종류에 따라 短絡 또는 開路상태로 표시한다. 즉 電壓源은 一般化된 短絡要素로 볼 수 있으므로, 이를 graph 에서 표시할 때는 短絡상태로, 電流源인 경우에는 이를 一般化된 開路要素가 되므로 開路상태로 표시한다. 즉 **그림 3·2** 는 이의 한 例이며 (b)圖에서 (16)은 電壓源이므로 短絡되었고 (17)은 電流源이므로 開路되었음을 알수 있다.

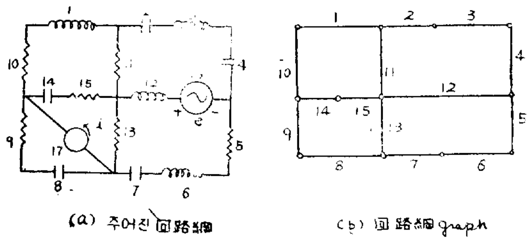


그림 3·2 能動回路網과 그 graph

다음 **그림 3·3** 은 回路網의 各部가 誘導 즉 두變의 相互 conductance 로 결합한 例이며, 이에 대응하는 graph 는 세개의 분리된 부분으로 구성된다. 이와같이 분리된 graph 를 分離部(seperate part)라하며, 이 경우의 分離部는 3 個이다

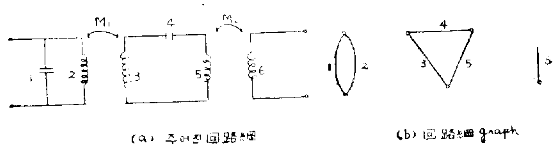


그림 3·3 M 로 결합된 受動 回路網과 그 graph

이상의 몇가지 例로, graph 란 回路網의 圖形學的 特性을 나타냄을 알 수 있다. 回路網의 동작을 電壓과 電流로 특정짓게 하는 가장 效果的인 方法을 연구한다던가 또는 이들 電壓 電流 變數의 獨立的인 集合을 구한다던가 혹은 어떤 순간에서의 回路網의 상태를 특정짓기 위한 適性여부를 판단하는데, 이들 graph 가 有用하다. 예를 들면 그림 3·3에서의 각 分離部를 한 節點에 중첩시키면 **그림 3·4** 와같이 分離部가 하나가 된 간단한 graph 가 됨을 알 수 있다. 즉 중첩시킨 節點이 等電位

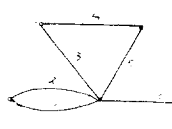


그림 3·4

가 된다는 것 以外는 節點과 分離部의 총수를 同數로 감소 시킨 이러한 變更에 의해서는 各枝路의 電壓과 電流는 아무런 제한도 받지 않음을 알수 있다.

(2) 各種 述語의 定義

여기서는 Networt topology를 論하는데 필요한 基本 述語의 定義 및 이에 관련된 사항에 대해서 기술한다.

定義 1. 邊(edge); 각기 다른 2個의 終點을 가진 線分을 邊(edge)라 하며 電氣回路에서 사용하는 要素(element) 혹은 枝路(branch)와 同意語이다. 이를 1次元의 單體(one-dimensional simplex), 弧(arc) 혹은 單胞(1-cell)라고도 부른다.

定義 2. 頂點(vertex): 한 枝의 終點을 頂點(vertex)이라 하며, 電氣回路의 節點(node)와 同意語이며 點(point), 零次元單體(zero-dimensional simplex), 혹은 0-胞(cell)라고도 한다. 그런데 network topology에 관한 定理를 간단히 표시하기 위하여 慣例上 孤立點은 頂點이라고 보통 생각하지 않지만, 경우에 따라서는 孤立點도 頂點이라고 할 때가 있으니 주의하기를 바란다.

定義 3. 自己閉路枝(self-looped edge): 한 枝에 속한 두 節點이 서로 일치할 경우의 枝를 특히 自己閉路枝(self-looped edge)라 한다. 그리고 節點이 枝의 終點이 될 경우 節點과 枝는 서로 접속(incidence)되었다고 말한다. 그리고 여러개의 0胞의 集合을 零次元複體(zero-dimensional complex)라 한다.

定義 4. 線型 graph(linear graph): 自己閉路枝가 없는 枝의 集合을 線型 graph라 한다. 이의 同意語로서는 線型複體(linear complex), 1複體(1-complex) 혹은 graph 등이 있다. 다음 graph를 구성하는 각 枝에 方向을 표시한 경우 이를 有向性 graph(oriented graph 혹은 directed graph)라하고, 枝에 아무런 方向표시도 없는 것을 無向性 graph(nonoriented graph 혹은 nondirected graph)라고 한다. 앞으로 취급하는 graph는 어디까지나 有限個의 枝로 구성된 graph 즉 有限 graph(finite graph) 뿐이며, 無限 graph(枝數가 무한히 많은 것)는 제외 한다. 無限 graph의 성질에 관해서는 König가 주로 발전시켰다.

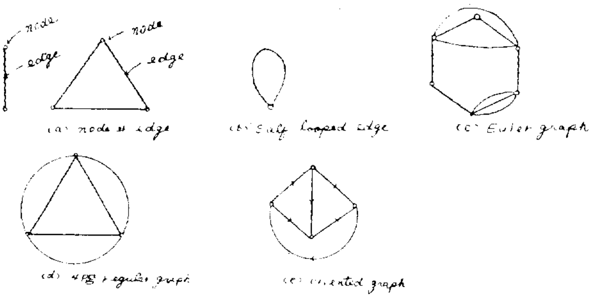


그림 3·5 Inear graph: (a)~(d)는 nonoriented graph (e)는 oriented graph

定義 5. 階數(order): 한 節點의 階數(order)란 그 節點에 직접 연결된 枝의 數를 의미한다.

定義 6. Euler graph: 모든 節點의 階數가 偶數인 線型 graph를 Euler graph라 부른다. 특히 graph의 모든 節點의 階數가 같을 때 이를 正則 graph (regular graph)라하며, 모든 節點의 次數가 k인 graph를 k階 正則 graph라 한다.

그림 3·5는 이상에서 말한 諸 定義를 실지 graph로 설명한 것이다.

定義 7. 枝路(path): 주어진 線型 graph에서 節點 i와 j間의 枝路(path)란 i와 j만이 1階이고 나머지 節點은 전부 2階인 경우, 이 graph의 枝의 可附系系列(ordered sequence)을 의미한다. 특히 方向이 표시된 枝路를 有向性 枝路(directed path)라 한다. **그림 3·6**은 枝路와 有向性 枝路를 표시 한다.

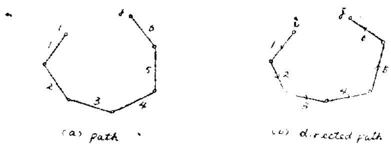


그림 3·6 Path와 directed path

定義 8. 位相同形(isomorphic): 두개의 graph G와 G'의 각 節點이 서로 1對1의 對應관계가 있을 뿐만아니라, 接續關係(incidence relationships)를 유지하고 있는 각 枝間에도 1對1의 對應관계가 성립할 경우, 이들 두 graph G와 G'는 位相同形(isomorphic, 혹은congruent)이라고 한다. **그림 3·7**의 (a)와 (b) 및 (c)와 (d)는 각각 位相同形인 例이다.

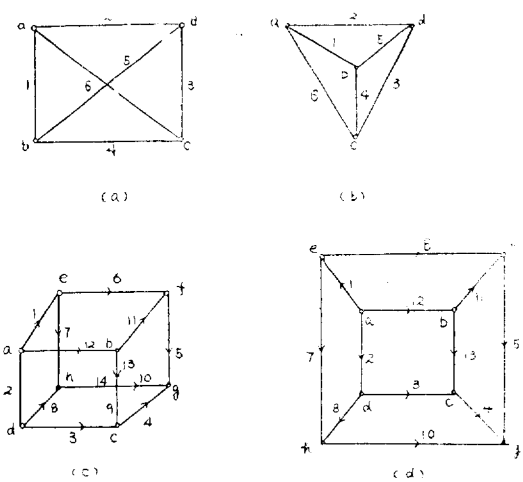


그림 3·7 Somorphic graph

定義 9. 部分 graph(subgraph): 이것은 graph枝 들의 어떤 subset을 의미하며, 이 subgraph 자신은 graph 이다. 만일 subgraph가 주어진 graph의 모든 枝를 포함하지 않은 경우에는 이를 proper subgraph라 한다.

定義 10 枝系列(edge sequence): 만일 graph 혹은 subgraph의 각 枝들을 可附番된 前枝와 後枝에 공통인 節點을 각각 하나씩 갖도록 順序를 정할수 있는 경우, 이를 枝系列(edge squence)이라 한다. 그리고 어떤 枝系列 역시 한 graph임에 주의하라. 만일 어떤 graph를 枝系列로 표시하는 경우 각 枝는 여러번 나타날수도 있다. 만일 이러한 系列을 graph上에서 실시한다면, 결과적으로 나타나는 線은 자기 자신과 교차되거나 혹은 한부분을 여러번 번복할 수 도 있다. 지금 **그림 3·8**에서 1236645347는 임의의 枝系列의 順序이며, 이경우의 枝系列는 graph 전체를 표시하고 있다.

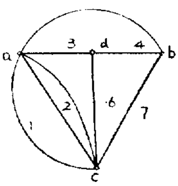


그림 3·8

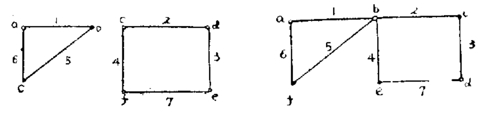
定義 11. 倍率(multiplicity): 어떤 枝系列에 나타난 한 枝의 回數를 그枝의 倍率(multiplicity)이라 한다. 定義 10의 枝系列의 例에서 枝 3, 4, 5 및 6의 倍率은 2이나 나머지 枝들의 倍率은 전부 1이다.

定義 12. 枝連續列(edge train): 어떤 枝系列의 각 枝의 倍率이 1인 경우 이를 枝連續列(edge train)이라 한다. 이의 例를 들면 다음과 같다. 즉 그림 3·8에서의 어떤 枝連續列은 123476이다. 따라서 枝連續列은 자기자신을 横斷 즉 어떤 節點을 2回以上 지나갈수는 있으나, 枝系列과 같이 그 일부분 (즉 枝)을 중복하여 지나갈 수 없는 것을 의미한다.

定義 13. 初節點, 終節點 및 端部節點(initial, final and terminal vertices): 어떤 枝系列 혹은 枝連續列에서 第2枝와 관계없는 처음枝의 節點을 初節點(initial vertex)이라 하고, 前枝와 공통되지 않은 제일나종의 枝의 節點을 終枝(final vertex)이라 한다. 그리고 初節點과 終節點을 系列의 端部節點(terminal vertices)이라 한다. 따라서 이들 初節點과 終節點은 어디까지나 枝系列의 순서와 관계가 된다. 바꾸어 말하면 edge sequence란 初節點과 終節點間에 존재하며, 端部節點은 edge sequence에 의하여 연결되었다고 볼 수 있다.

定義 14. 閉 및 開枝連續列(closed and open edge train): 枝連續列의 端部 節點이 서로 일치하는 경우 이를 閉枝連續列(closed edge train)이라하고, 그렇지 않은 경우를 開枝連續列(open edge train)이라 한다.

定義 15. 연결된 graph(connected graph): 주어진 graph G의 임의의 두 節點間에 한 枝路가 있는 경우, G는 연결되었다고 말한다. 즉 分離部가 1인 graph는 항상 연결되었다고 말할 수 있다. 그림 3·9의(a)는 연결되지 않은 graph의 例이고 (b)는 연결된 graph이다.



(a) 연결되지 않은 graph (b) 연결된 graph

그림 3·9

定義 16. 閉路 혹은 回路(loop or circuit): 階數가 2인 연결된 正則 graph 혹은 subgraph를 閉路(loop) 혹은 回路(circuit)라 한다. 만일 연결된 graph의 한 閉路가 주어진 graph의 모든 節點을 포함하고 있을때, 이를 Hamilton loop 혹은 Hamilton circuit라 한다. 여러개의 閉路의 集合을 閉路의 union라 부르며, 만일 union內의 두閉路가 서로 共通枝(혹은 節點)를 가지지 않을 때, 이를 非接合閉路의 union 혹은 非接合節點의 union (union of edge-disjoint loops or union of node-disjoint loops)라 한다. 單一閉路를 形成하는 枝의 集合을 主閉路枝(prime loop-edges)혹은 主閉路集合(prime loop-set)이라 한다. 그리고 閉路枝 (loop-edges) 혹은 閉路集合(loop set)이란 말은 非接合枝閉路(edge-disjoint loops)의 union을 形成하는 枝의 集合을 나타낼 때 사용한다.

定義 17. 非回路要素와 回路要素(noncircuit and circuit elemants): graph G의 임의의 回路 즉 閉路에 포함되지 않은 graph G의 要素를 非回路要素라 하고, 나머지 모든 枝를 回路要素라 한다.

(3) 나무와 回路網變數(tree and network variable)

a) 나무(tree): 電氣回路網理論에 관한 限 linear graph 理論에서 가장 중요한 것이 나무에 관한 개념이다. 나무란 말은 그 subgraph의 幾何學的 構造가 실제 나무와 같이 여러개의 枝로 되어 있기 때문이며, 여기에는 枝로 된 어떤 閉路도 없다는 것이 특징이다.

定義 18. 나무(tree): 주어진 linear graph의 모든 節點을 포함하되 閉路가 없는 어떤 subgraph 또는 연결된 linear graph를 나무라 한다. 주어진 linear graph에서 한개의 나무를 구성하는 枝를 除外한 나머지 枝로 된 graph를 補木(complement of tree)라 하며, 어떤 연결된 graph의 補木을 co-tree라고도 부른다. 節點이 n個인 연결된 graph의 k-tree란 閉路가 없고 n個의 節點

을 포함하고 있는 graph 의 k 個의 非接合 subgraph (k disjoint subgrath)의 集合을 의미한다. k-chord 혹은 k-co-tree 란 어떤 connected graph 의 k-tree 의 補木을 의미한다.

定義 19. 가지, 枝 (branch): 나무를 구성하고 있는 要素를 枝 혹은 나무가지(tree branch)라 한다.

定義 20. 連結枝(chord or link): 補木의 要素를 連結枝(chord 또는 linaer)라 한다.

위에서 기술한 나무에 관한 定義가 位相數學에서 말하는 나무와 다른 點은, 모든 節點을 포함하고 있다는 條件이다. 그런데 電氣回路網理論에서 다루는 나무는 항상 위에서 정의된 條件을 가추어야만 그 기능을 발휘할 수 있기 때문에, 이러한 定義上의 差異點이 발생하였다. Cauer 는 위에서 정의한 나무를 完全나무(complete tree)라 하였고, 모든 節點을 포함하지 않은 나무를 不完全나무(incomplete tree)라는 말로 표현 하였다.

위에서 말한바와 같이 나무에 관계된 graph 의 여러가지 성질 때문에 나무란 매우 중요한 개념의 하나이다. 즉 獨立된 Kirchroff 方程式의 數, 獨立方程式의 선택법, 係數行列의 구조 및 回路網函數의 位相幾何學的인 表示 등 여러 문제가 나무란 單純한 개념에서 출발된다.

다음에는 위에서 정의한 사항을 실제의 graph 를 이용하여 설명한다. **그림 3·9** 의 (a)는 주어진 linear graph 이

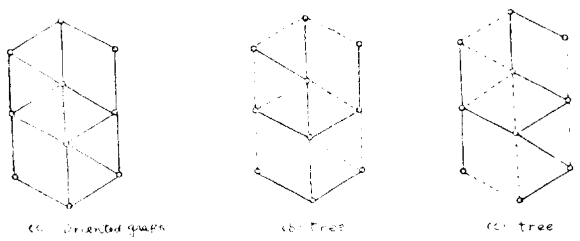


그림 3·10 graph 의 tree

고 (b)와 (c)의 實線은 각각 (a)를 기준으로 한 임의의 나무이다. 즉 (b)와 (c)를 보면 (a)의 모든 節點을 포함하되 閉路가 하나도 없음을 알 수 없다. 따라서 (b)와 (c)는 주어진 graph 에서의 모든 節點을 연결하는데 필요하고도 충분한 數의 枝의 集合인 나무가 됨을 알 수 있다. 다음 (b)와 (c)의 각 點線은 連結枝(chord or link)를 표시하며, 이들의 集合은 곧 補木이다.

지금 주어진 graph 의 全節點의 數를 n_t 라 하면, 우리가 만들 수 있는 節點對(node pair: 두 節點을 枝로 이은것)의 數 J 는 組合法則에 의하여

$$J=\frac{1}{2}n_t(n_t-1) \qquad (3\cdot1)$$

로 주어지지만, 나무에서 필요한 것은 節點의 全組合이 아니라 그림 3·9 의 (b) (c)와 같은 나무가지(tree branch) 즉 獨立 節點對(independent node pair)의 數 n 이다. 이 나무가지는 주어진 graph(a) 에서의 電壓分布를 一義的으로 결정하는 역할을 하며 (다음節에서 증명한다), 소위 獨立된 電壓變數의 數를 결정한다. 일반적으로 주어진 network 의 linear graph 의 分離部가 S 라 하면 나무가지의 數 n 는 분명히

$$n=n_t-S \qquad (3\cdot2)$$

로 주어질 것이며, 그림 3·9(a)와 같이 分離部가 1 인 경우에는

$$n=n_t-1 \qquad (3\cdot3)$$

가 된다. 다음 주어진 graph 의 枝의 총수를 e 라하고, 그림 3·9 의 (b)혹은 (c)에서의 點線 즉 閉路役割을 하는 連結枝의 수(이것은 獨立된 電流變數의 數와 一致하며, 이의 증명은 다음節에서 한다)를 l 라하면

$$e=l+n$$

따라서 $l=e-n$ (3·2)

식(3·1)과 (3·2)에 의하여

$$l=e-n_t=S \qquad (3\cdot3)$$

가 되며 $S=1$인 경우에는

$$l=e-n_t+1 \qquad (3\cdot4)$$

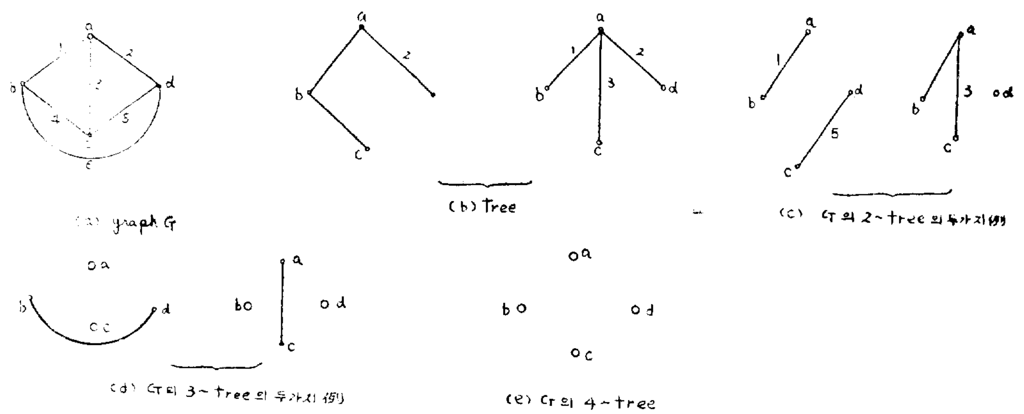


그림 3·11 k-tree 의 개념도

인 관계가 성립한다. 식(3·3)와 (3·4)는 graph 理論에서 자주 이용되는 중요한 관계식이다.

그림 3·10 은 어떤 graph 의 k-tree 의 개념을 표시한다.

b) 回路網變數 (network variable)

電氣回路網의 應答 혹은 特性은 그 回路網을 구성하고 있는 모든 要素에서의 電壓과 電流를 알게되면 완전히 해결된다. 또한 각 枝電流는 그들 要素에서의 電壓電流應答을 결정하는 基本方程式에 의해서 枝電壓과 관계 된다. 즉 R,L,C 의 基本要素에서는 다음과 같은 電壓一電流關係式이 成立함은 이미 잘 알려진 사실이다. (相互 inductance 에 관한 것은 나중에 취급함)

$$e_R=iR \quad e_L=L\frac{di}{dt}, \quad e_C=\frac{\int idt}{C} \qquad (3\cdot5)$$

따라서 回路網의 동작을 연구할때 우선 枝電流 혹은 枝電壓만을 고려하면 충분하다. 지금 枝의 총수를 e 라하면 回路網應答을 구하는 과정에서의 未知數 혹은 變數의 數는 어느 경우던지 e 個가 필요하다. 그러나 電流나 電壓어느것을 기준으로하여도 이들의 獨立變數의 數가 e 個보다 적어지는 것이 일반적이다.

주어진 回路網에 대한 나무로써 그림 3·9 또는 3·10 (b)와 같은 것을 선택하면 e 個의 枝는 결국 나무가지수와 連結枝의 數 l 로 나눠지므로 電流역시 나무가지電流와 連結 枝電流(link current)의 두가지로 분류될 것이다. 지금 連結枝를 제거하여 즉 閉路를 없애면, 全枝電流는 分明히 零이 되므로, 결국 連結 枝電流만으로 주어진 回路網의 生死를 지배한다고 볼수 있다. 즉 連結 枝電流로 全電流値 즉 모든 나무가지電流(tree branch current)를 一義的으로 표시할 수 있을 것이다. 以上의 理由로 回路網의 e 個의 要素 電流중 l 個만이 獨立이며 이 l 個의 電流는 모든 다른 電流를 一義的으로 나타내는 電流의 最小數라고 생각할 수 있다. 따라서 다음과 같은 結論을 얻는다. "주어진 回路網에서 獨立된 電流變數의 數는 l 보다 크지도 않고 적지도 않다." 왜냐하면 나무가지電流의 한개가 獨立이라고 가정하면 全連結枝電流가 零이된 상태하에서도 이 나무가지電流는 계속 零이 아닌 어떤 有限値가 되어야하는 소위 物理的인 不可能 狀態를 일으키는 모순을 가져온다. 다음 l 個보다 적을 경우에는 한개이상의 連結枝가 殘留하여도 回路網의 全電流가 零이되어야 하는 모순을 가져온다. 이는 곧 連結枝가 한個라도 남어 있는한 閉路가 존재하는 사실로 인하여 불가능하다.

이와 같이하여 獨立變數를 電流로 표시한 경우에는 l 個의 變數만으로 回路網의 상태를 一義的으로 표시할 수 있음을 알 수 있다. 이는 또한 後述하는 바와 같이 이들의 變數는 나무의 선택법에 의하여 결정되는 連結枝電流의 적당한 集合이면 足하지만, 일반적으로 여러개의 특수한 요구를 만족하도록 여러가지 方法으로 선택하여도 무방하다.

이상에서 論한것으로 부터 주어진 graph 의 각 枝路電壓도 나무가지 電壓과 連結枝路電壓의 두가지로 나누어 생각할 수 있을 것이다. 그런데 나무가지는 定義 17 에 의하여 주어진 graph 에서의 모든 節點을 연결시킨 것이므로, 나무가지 電壓을 零으로 (예를들면 나무가지의 短路으로) 만들면 全節點의 電位는 일치되어, 모든 枝電壓는 零이 될 것이다. 따라서 나무가지 電壓만을 零으로 한다는 것은 주어진 回路網의 모든 部分에서의 電壓이 零이 됨을 의미한다. 바꾸어 말하면 나무가지 電壓만이 全回路의 生死를 장악하고 있는 결과가 된다. 따라서 나무가지 電壓으로 모든 連結枝電壓을 一義的으로 표시한다고 볼 수 있다. 따라서 다음과 같은 結論을 내릴 수 있을 것이다.

"주어진 回路網에서 獨立된 電壓變數의 數는 선택된 나무의 나무가지의 數인 n 個보다 많지도 않고 적지도 않다".

왜냐하면 만일 한개 혹은 그 이상의 連結枝電壓이 獨立이라고 가정하면, 이 가정은 나무가지만을 短絡함으로써 全電壓이 零이 된다는 사실과 모순되기 때문이다. 다음 n 個보다 적을 경우에는 支配集合 (controlling set)를 만들 수 없다. 왜냐하면 나무가지 電壓중 한개라도 零으로 하지 않고 모든 節點電位를 일치시킨다는 것은 物理的으로 그 實現이 不可能하기 때문이다.

이상의 論述로 分離部가 1 인 回路網의 상태는 $l=e-n_t+1$ 個의 電流 혹은 $n=n_t-1$ 個의 電壓의 어느 한가지에 의해서 一義的으로 특성 짓게됨을 알 수 있다. 이러한 문제들은 특히 配電會社에서 복잡한 配電系統에 대한 문제를 해결할 때 매우 중요한 思考方式의 하나이다. 즉 位相幾何學的인 관점에서 파생된 "나무"라는 개념을 이용함으로써 주어진 系統 解析을 손쉽게 해결할 수 있을 것이다.

例　　題

그림 3·12 과 같은 回路網에서의 獨立된 電流變數 및 電壓變數의 수를 결정하라.

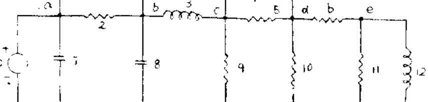
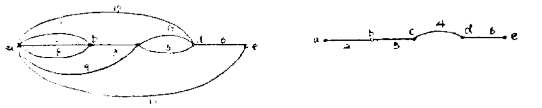


그림 3·12

(解) 이 문제를 풀기위하여 주어진 回路網의 linear graph를 그리는데, 여기서 주의할 것은 $v(t)$는 電壓源이므로 이를 短絡상태로 취급하는 점이다. 따라서 枝 7인 condenser는 단락되어 결국 linear graph에서는 節點 a와 f가 合치게된다. 다음 節點 f, g, h, i및 j들은 사실상 한 節點으로 볼 수 있다 따라서 그림 **3·13** (a)와 같은 linear graph가 생긴다.



(a) linear graph　　(b) tree

그림 3·13

그림 3·13(b)는 주어진 graph서 枝 2346으로 된 나무 이다. (a)도에서 節點의 수 n_t는 5, 分離部 S는 1 이므로 나무가지 n는 식(3·3)에 의하여

$$n=n_t-1=5-1=4 \qquad (3\cdot6)$$

다음 주어진 graph에서의 全枝의 수 e는 11이므로 식 (3·4)에 의하여 連結枝의 수 l는

$$l=e-n_t+1$$
$$=11-5+1=7 \qquad (3\cdot7)$$

즉 獨立된 電壓變數의 수는 4個이고, 獨立된 電流變數의 수는 7個이다. 따라서 그림 3·13과 같은 回路網에서의 電壓—電流特性을 구할때 Kirchhoff의 電流法則에 따라서 方程式을 세우면 4個의 方程式을 세우면 되지만, Kirchhoff의 電壓法則에 따르면 7個의 方程式을 세워야 하므로 前者를 택함으로써 훨씬 쉽게 解를 구할 수 있을 것이다. 이것이 바로 位相幾何學的인 관점에서 파생된 tree를 回路網解析에 이용한 가장 간단한 例이다.

後記: network topology에 관한 參考 文獻중 몇가지 單行本 만을 소개하면 다음과 같다.

1. Guillemin E.A.: Intrdouctory Circuit Theory, Chapter 1, New York: Wiley, 1953
2. Reza. F.M.; Modern Network Analysis, Chapter 4. McGraw-Hill, 1959
3. Seshu, Reed: Linear Graphs and Electrical Networks,. Addison-Wesley, 1961
4. W. H. Kim, R. T. Chien: Topological Analysis and WSynthesis of Communication Networks, 1962 ColundiaUniv.

(1965年 5月 15日 接受)