

非線型制御系에 使用하는 諸線型化信號의 解析

(Analysis of Nonlinear Control Systems
with Various Dither Signals)

李 相 赫*

(Sang Hyuk Lee)

Abstract

Some nonlinearities in feedback control systems, such as relay servo, Coulomb friction, saturating amplifier or backlash in gears cause some undesirable effects. These may be static errors, limit cycles or jump phenomena. So, linearizing method of these nonlinearities using dither signals was first suggested by Loeb. He pointed out that the addition of high frequency signal to either the input or the output of a nonlinear system would make the nonlinear performance approximate the performance of linear systems. He used high-frequency sinusoidal wave as dither signal.

But, in this thesis, general method of analysis is suggested for nonlinear control systems using various dither signals, such as noise signal of Gaussian amplitude distribution, sinusoidal dither signal and sawtooth dither signal. Also, the advantage and disadvantage of these dither signals are compared. Throughout the analysis statistical method is adopted and lastly analog computer is used for the experiment of various nonlinear systems using dither signals.

概 要

目前制御系統에서의 非線型要素로서는 보통 리레이 제어系, 쿨롱마찰, 백래쉬(backlash)와 增幅器의 飽和性 등을 들 수 있는데, 이들의 非線型性으로 인하여 系統의 應答特性에 우리가 願치 않는 效果가 나타나게 된다. 이 效果들은 limit cycle, 靜의 誤差나 飛躍現象(jump phenomena) 들로서 應答特性을 惡化시키는 要素들이다. 따

* 서울대학교 工科大學 電氣工學科
Dept. of Electrical Engineering, College of Eng.
Seoul National University

라서 이러한 非線型性을 減小시키는 線型化方法이 일찍이 Loeb에 의하여 提案되었는데 그 方法은 系統周波數보다 높은 周波數의 交播信號를 入力側에 重疊함으로써 系統의 非線型動作을 거의 線型系統의 動作特性과 같게 만드는 것이다.

本 論文에서는 여러가지 形態의 dither信號를 使用한 場合의 非線型系統의 一般의 解析法을 論하고 그 解析法에 依한 各種 dither信號의 長短點을 比較하려 한다. 代表的 dither信號로서 正弦波, 三角波와 Gauss確率分佈를 갖는 random雜音信號를 取扱하였고 그 解析法으로는 統計的인 方法을 擇하였고 끝으로 아나로그計算機를 使用하여 各種 非線型系統에 dither信號를 넣어 그 應答特性을 考察하였다.

I. Dither信號를 重疊하였을 때의 非線型要素의 等價利得

系統의 非線型要素에 依하여 發生하는 limit cycle이나 靜의 誤差(static error) 등을 除去하기 위하여는 系統周波數보다 큰 周波數의 任意의 交播信號를 系統에 重疊하면 된다. 이 交播信號의 周波數가 系統周波數에 比하여 훨씬 크다면 어떤 時間의 짧은 範圍內에서는 近似的으로 系統信號를 크기가 一定한 d.c.信號로 볼수있다. 따라서 非線型要素의 入力은 이 두가지信號의 重疊으로서

$$x = a_0 + \text{dither signal}$$

여기서 a_0 는 一定한 系統信號이다. 따라서 入力信號는 a_0 만큼 變位한 dither信號의 確率密度函數를 갖게 되어 非線型要素의 平均出力은 다음과 같이 된다.

$$c(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x - a_0) dx \quad (1)$$

여기서 $p(x)$ 는 dither信號의 密度函數이고 $f(x)$ 는 非線型 block의 傳達特性이다.

非線型要素의 出力信號中 높은 周波數成分은 系統傳達函數의 low-pass filter의 역함으로서 감소되므로 無視

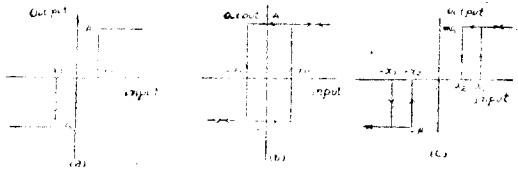
할 수 있다. 故로 dither 信號의 振幅 및 周波數가 系統 信號보다 클 경우에는 이 非線型 block 의 等價利得은 近似的으로 다음과 같이 된다.

$$K_r = \frac{\bar{c}(t)}{a_0} = \frac{1}{a_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) p(x-a_0) dx \quad (2)$$

이 等價利得은 a_0 의 函數가 되므로 a_0 의 函數로서 K 를 plot 하면 dither 信號의 線型化效果에 關한 特性을 알 수 있다. 다음 各種 非線型要素의 等價利得은 (2)式을 適用하여 求하여 본다.

II. 리레이 制御系의 線型化

리레이 制御系에서는 리레이의 不感帶와 time delay 로 因하여 停止誤差나 limit cycle 이 나타나게 된다. 이 效果를 除去하기 위하여 리레이 入力側에 適當한 filter 信號를 重疊하면 리레이 出力도 같은 周波數로 交播하나 實際로 系統의 動作은 이 出力의 平均値에 依하여 決定되고 高調波成分은 傳達函數의 filter 作用으로 系統應答에 거의 影響을 미치지 못한다.



그림(1) 各種 리레이의 特性
(Fig. 1. Transfer characteristics of relays.)

그림(1)의 代表的 리레이의 入力對 出力特性에 對하여 여러가지 dither 信號를 使用할때의 等價利得을 求하여 본다. Gauss 振幅分布를 갖는 random 雜音信號를 dither 信號로 使用하면 리레이 入力信號의 密度函數는

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2} \quad (3)$$

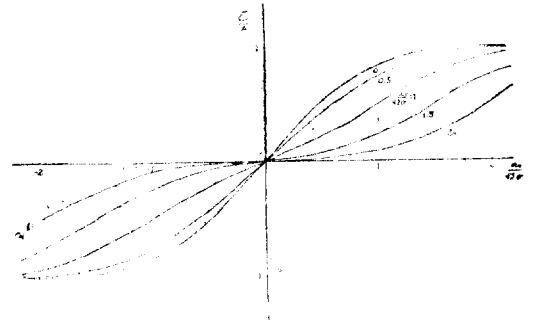
이 된다. 여기서 σ^2 는 雜音信號의 自乘平均値이다. 그림(1)의 (a)의 傳達特性을 갖는 리레이를 우선 생각하면 리레이의 平均出力은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \bar{r}(a_0) &= \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\int_{-\infty}^{-x_0-a_0} -e^{-x^2/2\sigma^2} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{x_0-a_0}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \right) \\ &= \frac{A}{2} \left(\operatorname{erf} \frac{x_0+a_0}{\sqrt{2}\sigma} - \operatorname{erf} \frac{x_0-a_0}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

雜音信號의 variance σ 가 充分히 커서 $\frac{x_0 \pm a_0}{\sqrt{2}\sigma} \ll 1$ 이 될 경우에는 誤差函數의 級數展開를 使用할 수 있다. 따라서 리레이의 block 의 近似的 線型利得은 다음式과 같아 된다.

$$K_r = \sqrt{2} \frac{A}{\sigma} \quad (5)$$

앞 式에서 보면 利得은 σ 에 逆比例하므로 σ 는 리레이의 線型利得을 크게 감소시키지 않는 範圍에서 線型化가 잘 될 수 있는 크기로 擇하여야 할 것이다. 그림(2)에서 여러가지 σ 값에 對한 入力對 出力特性을 表示하였다.



그림(2) Gaussian Dither 에 對한 리레이 平均出力
(Fig. 2. Average output of dithered relay for Gaussian dither.)

Dither 信號로서 正弦波를 使用할 경우에는 正弦波의 確率密度函數를 써서 雜音信號와 같은 方法으로 一種의 記述函數를 求할 수 있다. d.c. 信號와 正弦波 dither 를 重疊하였을 때의 確率密度函數는

$$p(x) = \frac{1}{\pi B \sqrt{1 - \left(\frac{x-a_0}{B}\right)^2}} \quad (6)$$

여기서는 a_0 는 入力信號이고 B 는 正弦波信號의 振幅이다. 리레이의 平均出力은

$$\begin{aligned} \bar{r}(a_0) &= -A \int_{B+a_0}^{x_0} \frac{dx}{\pi B \sqrt{1 - \left(\frac{x-a_0}{B}\right)^2}} \\ &\quad + A \int_{x_0}^{B+a_0} \frac{dx}{\pi B \sqrt{1 - \left(\frac{x-a_0}{B}\right)^2}} \\ &= \frac{A}{\pi} \left(\sin^{-1} \frac{x_0+a_0}{B} - \sin^{-1} \frac{x_0-a_0}{B} \right); \\ &\quad \left| \frac{x_0 \pm a_0}{B} \right| < 1 \quad (7) \end{aligned}$$

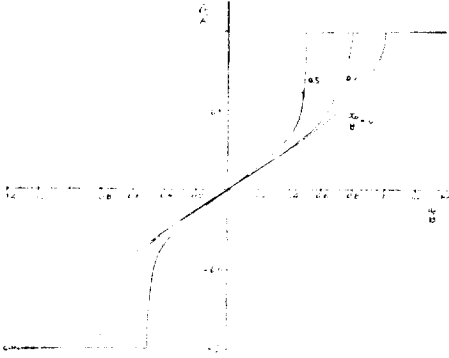
入力信號가 充分히 커서 $\left| \frac{x_0 \pm a_0}{B} \right| > 1$ 일 경우에는 dither 信號는 리레이 出力의 符號變化를 示할 수 없으므로 dither 信號는 아무 役用도 하지 못한다. 즉

$$\begin{aligned} \bar{r}(a_0) &= \frac{A}{\pi} [\sin^{-1}(1.0) - \sin^{-1}(-1.0)] \\ &= \frac{A}{\pi} \left(2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = A \left(1 - \left| \frac{x_0 \pm a_0}{B} \right| > 1.0 \right) \quad (8) \end{aligned}$$

리레이의 近似的 線型利得은 級數展開을 하면 다음 과 같다.

$$K_r = \frac{\bar{c}_r(a_0)}{a_0} = \frac{A}{\pi a_0} \left(\frac{x_0 + a_0}{B} - \frac{x_0 - a_0}{B} \right) = \frac{2A}{\pi B} \quad (9)$$

即 리레이의 平均出力은 系統信號가 작을 경우에는 거의 入力에 比例한다는 것을 알수있다. 그림(3)은 入力에 대한 平均出力信號曲線이다.



그림(3) 正弦 dither 信號에 對한 리레이의 平均出力 (Fig. 3. Average output of dithered relay for sinusoidal dither.)

그림(3)에서 보면 dither 信號가 重疊된 리레이 制御系統은 近似的으로 一種의 dual mode 制御系統과 같은 作用을 한다는 것을 알수있다. 即 리레이의 入力誤差信號가 dither 信號의 振幅보다 클때는 完全히 리레이 制御系로 作用하나 誤差信號가 작을때는 線型制御系統과 같은 作用을 하게 된다.

三角波를 dither 信號로 使用할때도 위와 같은 統計的方法에 依하여 平均出力을 求할 수 있다. 振幅이 B인 三角波를 一定信號 a_0에 重疊하였을 때의 第一 確率密度的 數는

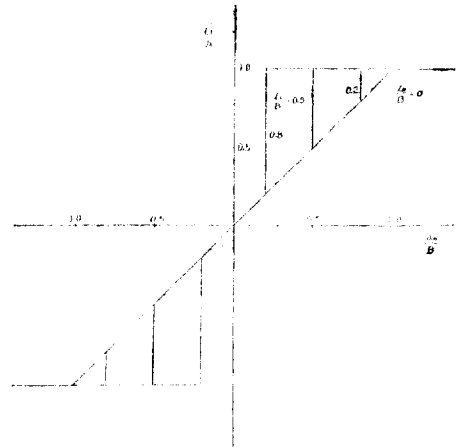
$$p(x) = \frac{1}{2B} \quad (B - a_0) \leq x \leq B + a_0 \quad (10)$$

따라서 리레이의 平均出力은

$$\bar{c}_r(a_0) = A \int_{B-a_0}^{x_0} \frac{1}{2B} dx + A \int_{x_0}^{B+a_0} \frac{1}{2B} dx = \frac{A}{B} a_0 \quad (B \pm a_0) < x_0 \quad (11)$$

그림(4)에는 이 경우의 平均出力을 그린것이다. 즉 平均出力은 dither 信號가 作用하는 範圍內에서는 完全히 入力에 比例한다는 것을 알수있다. 그러나 다른 dither 信號들과는 달리 리레이 mode 와 線型動作의 境界에서 不連續의인 飛躍點이 나타나게 된다. 따라서 三角波信

號를 使用하면 리레이 制御系는 完全히 dual mode 制御系로 動作하게 된다.



그림(4) 三角波 dither 에 對한 리레이 平均出力 (Fig. 4 Average output of relay for sawtooth dither.)

위의 세가지 dither 信號에 對한 리레이 利得을 比較하여 보면 單位量들에 對하여 雜音信號는 $2/\sqrt{\pi}$ 이고, 正弦波는 $2/\pi$ 이고, 三角波는 1 이된다. 따라서 雜音 dither 信號에 對한 利得이 제일 크다는 것을 알수 있다. 다음 出力曲線의 形態는 雜音信號가 제일 원만하고 三角波에서 제일 變化가 심하므로 그림(3)과 그림(4)의 경우에는 飽和 增幅器를 使用할 때 나타나는 jump 現象이 發生할 우려가 雜音信號의 경우보다 더욱 크다고 볼수 있다. 따라서 雜音 dither 信號가 제일 適當하다고 생각된다.

III. 非線型磨擦의 線型化

制御系統에 存在하는 非線型要素로서 靜的磨擦과 庫容磨擦이 있는데 이 非線型要素로 因하여 系統應答에 停止誤差가 생기거나 動作信號가 작을 경우에는 應答의 動的特性이 나빠진다. 庫容磨擦力이란 被動作部分의 運動을 억제하는 方向으로 作用하는 一定한 크기의 힘으로 數式的으로 表示하면 다음의 같다.

$$F_c(t) = C \frac{\partial c}{\partial t} \quad (c \neq 0) \\ -\alpha C < F_c(t) < \alpha C \quad (c = 0) \quad (12)$$

여기서 α 는 靜的磨擦力과 庫容磨擦力의 比이고 ∂c 는 磨擦部分의 相對的 速度이다. 따라서 이와같은 庫容磨擦을 包含하는 代表的 位置制御系統을 block diagram 으로 表示하면 그림(5)와 같다. 여기서 非線型 block 은 不感帶가 없는 리레이 特性和 같으나 入力이 速度가 되는 點이 다르다.



그림(5) 쿠롱 磨擦을 包含하는 位置制御系
(Fig. 5. Position control servo with Coulomb friction.)

(4) 式을 使用하여 非線型 block 의 出力을 求하면

$$v_{f0} = \frac{C}{2} \left[\operatorname{erf}\left(-\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{-v_0}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma}\right) \right]$$

$$= C \operatorname{erf}\left(\frac{v_0}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma}\right) \quad (13)$$

$$\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{C}{\sigma}\right) v_0, \quad \frac{v_0}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sigma} \ll 1$$

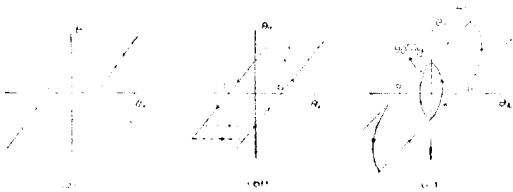
Dither 信號가 正弦波일 경우에는 이 limiter block 의 平均出力은 (7) 式을 使用하여

$$v_{f0} = -\frac{2C}{\pi} \sin^{-1} \frac{v_0}{B} \approx -\frac{2C}{\pi B} v_0 \quad (14)$$

三角波의 dither 信號에 對하여도 같은 方法으로 平均出力 및 近似的線型利得을 求할 수 있다. 이 limiter block 의 線型化한 特性曲線은 그림 (2), (3), (4)에서 $x_0=0$ 인 曲線이 된다.

그림(5)와 같은 制御系에 適用하는 dither 信號가 入力側에 重疊된 電氣의 交播信號라면 이 信號는 첫번 block 에서 filtering 이 되어 高調波分은 減小되어 基本波만 남게 되므로 이러한 경우에는 dither 信號의 波形은 應答에 큰 影響을 미치지 못한다. 그러나 dither 信號가 機械의 信號이던가 또는 計器적 表現에서와 같이 時定數 τ 가 매우 작은 값일 경우에는 dither 信號의 波形의 影響은 無視하지 못한다.

IV. Backlash 效果의 線型化



그림(6) 各種 Backlash 의 特性
(Fig. 6. Characteristics of backlashes.)

制御系의 要素로서 各種 gear 가 使用되며 여기에 存在하는 backlash 의 效果에 依하여 limit cycle 이나 停止誤差가 나타난다. backlash 의 種類는 그림에서와 같이 세가지가 있다. (a) 의 경우는 入力에 對한 單價函數

이므로 간단히 統計의 方法으로 dither 信號의 效果를 解析할 수가 있다. Gauss 分布의 랜덤信號에 對하여는 이 非線型 block 의 平均出力은 다음과 같다.

$$\bar{\theta}_c(a_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left(\int_{-\infty}^{-b} x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a_0)^2} dx \right. \\ \left. + \int_b^{\infty} x e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a_0)^2} dx \right) \\ = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \right) a_0 \quad (15)$$

다음 正弦波信號에 對하여는

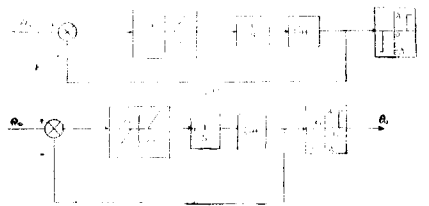
$$\bar{\theta}_c(a_0) = \int_{-B+a_0}^{-b} \frac{x dx}{\pi B \sqrt{1 - \left(\frac{x-a_0}{B}\right)^2}} \\ + \int_b^{B+a_0} \frac{x dx}{\pi B \sqrt{1 - \left(\frac{x-a_0}{B}\right)^2}} \\ = \left(1 + \frac{2b}{\pi B} \right) a_0 \quad (16)$$

윗式들에서 dither 信號가 backlash 效果를 線型化한다는 事實을 알 수 있고 또 實際의 解析에 이 近似的線型利得을 適用할 수 있다.

다음 hysteresis 形 backlash 는 單價函數가 아니므로 平均出力을 直接 確率을 使用하여 求할 수는 없으므로 아나로그 計算機의 simulation 法을 使用하여 單價函數로 變化시켜 求한다. 그림(7)은 hysteresis 形 backlash 과 그 simulation 法이다.



그림(7) Backlash 의 計算機 Simulation
(Fig. 7. Hysteresis backlash and its analog computer simulation.)

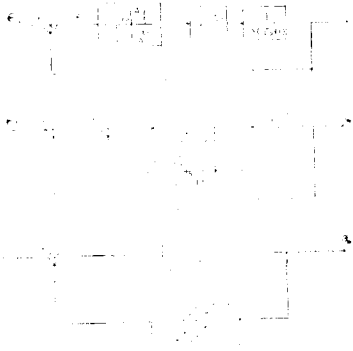


그림(8) 그림(1)-(b), (c) 의 計算機 Simulation.
(Fig. 8. Analog computer simulation of relays in Fig. (1)-(b), (c).)

그림(7)의 비선형 block 은 앞에서 取扱한 不感帶形의 單價函數이므로 (15) 및 (16) 式의 近似的線型利得을 넣어서 解할 수 있다. 그림(1)의 (b) 및 (c)에 주어진 單價函數가 아닌 리레이特性도 이와 類似한 方法으로 simulation 하여 dither 信號가 重疊될때의 特性을 求할 수 있다. 즉 그림(8)의 (a)와 (b)는 各各 그림(1)의 (b)와 (c)의 아나로그計算器의 simulation 이다.

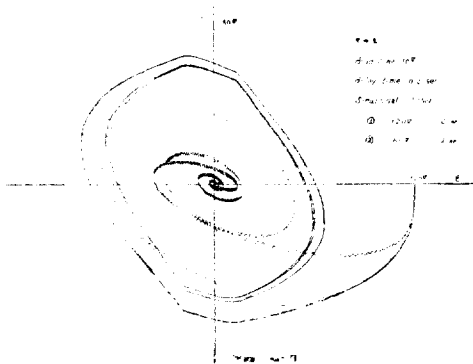
V. 아나로그計算機 依한 解析

그림(9)-(a)의 리레이制御系에서 時定數를 1 秒로 잡고 리레이의 time delay 를 0.2 秒로하여 正弦波와 三



그림(9) 非線型 表素를 包含하는 設置制御系의 Block Diagram

(Fig. 9. Block diagram representation of servo systems with nonlinear elements.)

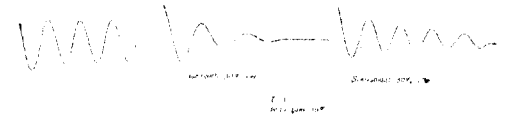


그림(E-1) Dither 信號를 사용하는 리레이 制御系의 位相面表示
(Fig. (E-1). Phase plane of a relay systems with dither signal.)

角波를 dither 信號로 사용하여 그 應答을 求한것이 그림(E-1) 및 그림(E-2)이다. 그림(E-2)에서보면 三角波의 경우가 應答特性이 더 좋다는 것을 알 수 있다.

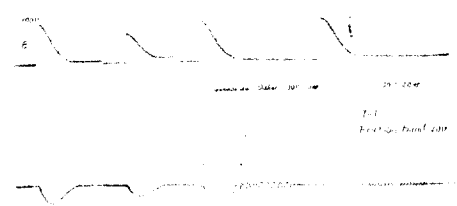
그림(9)-(b)는 時定數 1 秒에 庫容磨擦力을 10 V 로한 位置制御系로서 그 應答特性이 그림(E-3) 및(E-4)에 주어졌다. 여기서는 dither 信號의 波形이 出力曲線에 별 影響을 미치지 못한다는 것을 알 수 있다.

다음 그림(9)-(c)는 hysteresis 形 backlash 가 feedback 回路에 있는 制御系로 그림(E-5)에 그 應答特性이 주어졌다.

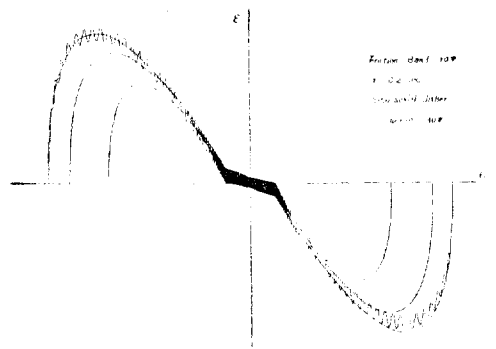


그림(E-2) Dither 信號를 사용한 리레이制御系의 應答

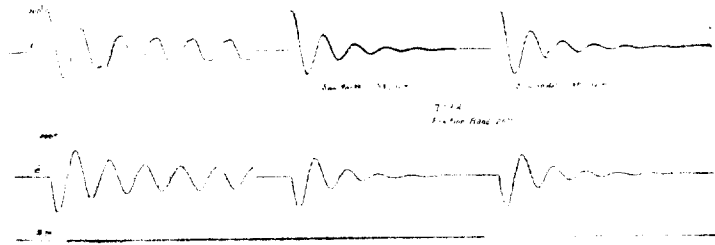
(Fig.(E-2). Response of relay servo with dither signal.)



그림(E-3) 庫容磨擦을 包含하는 制御系의 應答
(Fig.(E-3). Response of servo system with Coulomb friction.)



그림(E-4) 庫容磨擦을 갖는 制御系의 位相表示
(Fig.(E-4). Phase plane of servo system with Coulomb friction.)



그림(E-5) Feedback 回路에 Backlash 를 포함하는 制御系의 應答
(Fig. (E-5). Response of servo system with backlash in feedback loop.)

Ⅵ. 結 論

Dither 信號를 使用할 때의 非線型系統의 解析法을 確率論으로 取扱함으로서 圖式的으로 해석하는것 보다 簡單하고 一般的인 것을 알았고 이와같은 解析法으로 各種 dither 信號의 比較가 容易하게 된다. 一般的으로 Gauss 分布의 雜音信號가 가장 適當한 dither 信號임을 알 수 있고 庫容磨擦이나 backlash 에서는 dither 信號의 波形은 별 影響을 미치지 못함을 알았다. 그러나 이와 같은 解析法이 實際의 解析에 어느정도의 利用價値가 있는지는 疑問이나 dither 信號의 解析法에 어떤 一般性を 附與하였다는데 약간의 意義가 있다고 할 수 있다.

(1964 月 6 年 3 日 接受)

參 考 文 獻

1. Analysis of Nonlinear Control Systems (Book).
D. Graham, D. McRuer, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.
2. Nonlinear Control Systems (Book).
R.L. Cosgriff, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1958.
3. Input-Output Cross-Correlation Functions for Some Memory-Type Nonlinear Systems with Gaussian Inputs.
Harold R. Leland. AIEE Trans. Pt. II, Vol. 79, 1960, pp.219--223.