解法의 가지 가지

(RC 低域 濾波器를 例들어)

李 晩 榮

[序 言]

抵抗과 容量을 圖1과 같이 接續한 四端子網(Two-terminal pair network)을 RC 低域濾波器(Low-pass filter)라고 通稱하지만 그 應用面에 따라 여러 가지로 使用할 것이다. 例컨대 ① 雜音位(Noise level)의 減少를 目的으로 增幅器段間에 挿入하는 경우도 있을 것이고, ② 또 自動制御裝置로서 遲相補償要素(Lag compensation network)로 利用할 수도 있을 것이다.

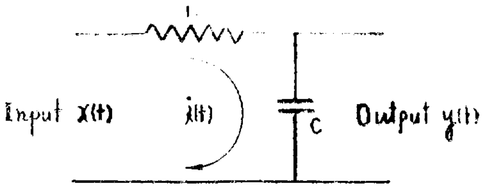

圖 1. Low-pass RC filter

要컨대 여기서는 그 利用面을 따지는 것보다도 假令 入力信號(Input signal) $x(t)$가 一定한 振幅을 가진 階段函數(Step function), *i.e.* $x(t)=Eu(t)$를 이 濾波器에 印加할 때 出力信號(Output signal) $y(t)$의 結果를 따져보자는 것이다. 勿論 利用面의 要求如何에 따라 또 解析者의 知識尺度에 따라 여러갈래의 解法이 나올 것이다. 그러므로 이 回路의 解析法을 아는대로 羅列해서 讀者와 함께 工夫해 보기로 한다.

[解 說]

[1] 古典解法(Classical method)

圖 1의 回路方程式은

$$\begin{cases} x(t)=Ri+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t idt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y(t)=\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t idt \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(2)式에서 $i(t)=C\dfrac{dy}{dt}$ 를 求하여 (1)式에 代入하면

$$x(t)=RC\frac{dy}{dt}+y(t) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

入力이 階段函數 $x(t)=Eu(t)$ 이므로

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{RC}y=\frac{E}{RC} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

이 1階線形微分方程式을 풀기 爲하여 積分因子(Integrating factor)는

$$e^{\int\frac{1}{RC}dt}=e^{\frac{1}{RC}t}$$ 인 故로

(4)式의 解는

$$y(t)=e^{-\frac{t}{RC}}\left[\int e^{\frac{t}{RC}}\left(\frac{E}{RC}\right)dt+K\right],\quad K: \text{積分常數}$$

$$y(t)=E+Ke^{-\frac{t}{RC}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

勿論 $t\geq o$ 서부터 回路가 動作하기 始作하므로 $y(0)=0$ 의 初期條件이 成立될 것이다. 即 $t=0$ 때 (5)式은

$$O=E+K,\quad K=-E,$$

이것을 (5)式에 代入하므로써 求하고저 하는 出力은

$$y(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

이 될 것이다. 勿論 이 程度는 讀者 여러분은 다 잘 알 것으로 믿는다.

古典解法의 또 다른 解法을 紹介코자 한다. 于先 原微分方程式

$$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{RC}y=\frac{E}{RC}$$

을 생각해 볼때 定常狀態(Steady state)에서는

$\dfrac{dy}{dt}=0$ 이 될 것이므로

$$\frac{1}{RC}y=\frac{E}{RC},$$

即 $y_s(t)=E \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

이 (7)式이 出力信號 $y(t)$의 定常項 (Steady state term)이 될 것이다.

다음으로 過渡狀態에 있어서의 過渡項 $y_t(t)$는

$$\frac{d}{dt}(y_s+y_t)+\frac{1}{RC}(y_s+y_t)=\frac{E}{RC}$$

에서

漢陽大學校 工科大學教授

$$\frac{dy_s}{dt}+\frac{y_s}{RC}=\frac{E}{RC}$$

의 關係가 成立되므로

$$\frac{dy_t}{dt}+\frac{y_t}{RC}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

여기서

$$y_t=ke^{\lambda t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

라 놓으면 (8)式은

$$k\lambda e^{\lambda t}+\frac{k}{RC}e^{\lambda t}=0$$

即

$$\lambda+\frac{1}{RC}=0 \quad \text{또는} \quad \lambda=-\frac{1}{RC}$$

이것을 (9)式에 代入하여 過渡項을 求해 보면

$$y_t(t)=ke^{-\frac{1}{RC}t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

따라서 圖1의 低域濾波器를 通過한 出力信號는 다음과 같이 定常項과 過渡項의 合成으로 될 것이다.

$$y(t)=y_s(t)+y_t(t)=E+ke^{-\frac{1}{RC}t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

여기서 初期條件 $y(0)=0$을 適用하면 任意의 常數 k의 값이 求해진다.

即

$$0=E+k,\quad k=-E$$

따라서 (11)式에서

$$y(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right),\quad t\geq 0$$

이 方法은 여러분이 過渡現象論을 工夫할 때 흔히 나타나는 가장 一般的인 方法이라는 것을 알 것이다.

〔2〕 變換解法 (1) (Laplace transform method)

같은 回路方程式을 Laplace 變換하면

$$X(s)=\left(R+\frac{1}{Cs}\right)I(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$Y(s)=\frac{1}{Cs}\,I(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)式을 (1)式에 代入하면

$$Y(s)=\frac{1}{RCs+1}\,X(s) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

여기서 $x(t)=Eu(t)$인 故로 $X(s)=\frac{E}{s}$

$$Y(s)=\frac{\frac{E}{RC}}{s\left(s+\frac{1}{RC}\right)}=E\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

周波數領域의 (4)式의 兩邊을 逆變換함으로써 時間領域에서의 出力信號 $y(t)$는 곧 求해질 것이다.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)\right\}=E\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{RC}}\right\}$$

$$y(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

即 低域濾波器를 通한 出力波는 直流分 E와 過渡分 $Ee^{-\frac{t}{RC}}$의의 2成分으로 이루어져 있다.

〔3〕 變換解法 (2) (Fourier transform method)

우리는 出力波中의 過渡分이 消滅된 然後에 到達된 定常値(Steady-state value) 만을 급시히 알아 볼 경우가 往往 있다. 이런 경우에는 Fourier 變換法을 쓰면 定常値만을 곧 求할 수 있을 것이다.

一般的으로

$$\mathcal{F}\left\{y(t)\right\}\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}y(t)e^{-j\omega t}\,dt=Y(\omega)$$

인 故로

$$\mathcal{F}\{y(t)\}=H(j\omega)\mathcal{F}\{x(t)\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

여기서

$$H(j\omega)=\frac{1}{j\omega RC+1}$$

는 이 系의 傳達函數이고

$$\mathcal{F}\left\{x(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty}Ee^{-j\omega t}\,dt=E\delta(\omega)$$

는 入力의 Fourier 變換値이다.

따라서 圖1이 表示하는 Fourier 變換式은

$$Y(\omega)=H(j\omega)E\delta(\omega) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

여기서 $\delta(\omega)$는 Dirac delta function 또는 unit impulse function 이라고 稱하는데

$$\text{i.e.}\quad \delta(\omega)\triangleq\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\,dt$$

다음에 (2)式을 Fourier 逆變換함으로서 出力 $y(t)$의 定常値를 얻을 수 있을 것이다.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{Y(\omega)\right\}=y_{s.s}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)E\delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad (4)$$

$$y_{s.s}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E}{j\omega RC+1}\delta(\omega)e^{j\omega t}\,d\omega=E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

이것이 求하려고 하는 所望의 定常値인 것이다.

〔4〕 合成函數에 依한 解法(Convolution integral)

單位衝擊函數(Unit impulse function) $x=\delta(t)$를 入力側에 印加할 때 그 system의 衝擊應答(Impulse response)을 우리는 往往 荷重函數(Weighting function, 또는 Green's function)라고 부르며 通常 $h(t)$의 記號를 쓴다. 이 荷重函數 $h(t)$가 回路解析(Network analysis)에서 大端히 重要한 役割을 하는 理由는 $t=0$때 그 system에 印加하는 任意의 入力에 對한 系應答(System response)을 求하는데 使用되는 까닭일 것이다.

RC 低域濾波器의 impulse response $h(t)$는

$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}},\quad t\geq 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

이다. 階段函數 $x(t)=Eu(t)$에 對한 系應答 即 出力 $y(t)$는 다음과 같이 convolution integral을 쓰면 求할 수 있다.

$$y(t)=\int_0^t x(\lambda)\ h(t-\lambda)\ d\lambda \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

따라서

$$y(t)=\int_0^t E\left[\frac{1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}(t-\lambda)}\right]d\lambda=\frac{E}{RC}\int_0^t e^{-\frac{1}{RC}(t-\lambda)}d\lambda$$

即 定積分하면

$$y(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right),\quad t>o \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

[5] 電子計算機에 依한 解法(Analog computer technique)

Low-pass RC filter의 回路方程式은 위에서 求한 바와 같이

$$x(t)=RC\frac{dy}{dt}+y$$

即 $$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{RC}(x-y) \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)式을 풀기 爲한 computer diagram은 다음과 같다.

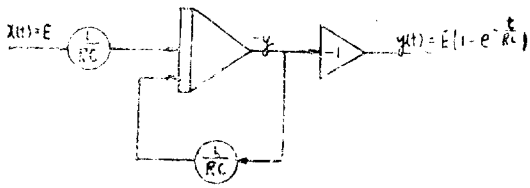

圖 2. Computer diagram

또는

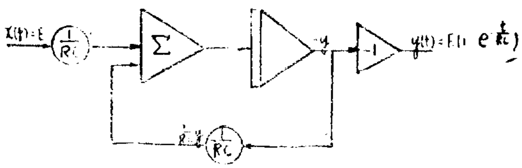

圖 3. Computer diagram

[6] 相關函數法(Input-output relation in spectrum)

Fourier transform $X(\omega)$가 存在하기 爲한 絶對條件

$$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|dt<\infty$$

을 滿足시키지 못하는 函數인지라도 그 函數의 Fourier transform은 Wiener limiting process에 依해서 求할 수 있으며 이런 class에 屬하는 函數中의 하나로서 本題의 step function을 들 수 있다.

$$x(t)=Eu(t),\qquad 0\leq t<\infty$$
$$\quad\ =0,\qquad -\infty<t<0$$

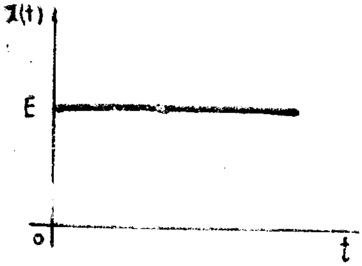

圖 4. Step function

이 階段函數 $Eu(t)$를 入力側에 印加할 때 그 入力의 自己相關函數(Autocorrelation function) $\phi_{xx}(\tau)$는 入力平均電力과 一致한다. 即 Wiener의 定理를 빌리면

$$\phi_{xx}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x^2(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_0^T E^2\,dt=\frac{E^2}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

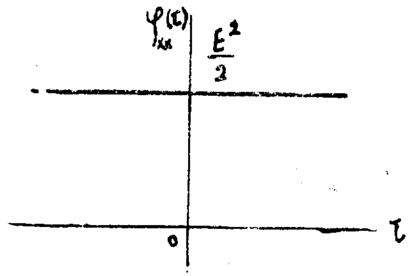

圖 5. Step function의 自己相關函數

다음으로 이 階段函數의 power density spectrum $\Phi_{xx}(\omega)$는 所謂 Wiener-Khinchin의 定理를 써서 다음과 같이 求해진다.

$$\Phi_{xx}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$
$$=\frac{E^2}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega t}\,dt$$

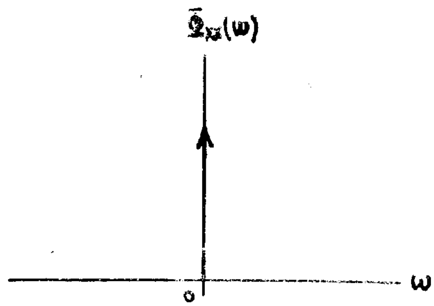

圖 6. 階段函數의 Power density spectrum

$$\Phi_{xx}(\omega)=\frac{E^2}{2}\ \delta(\omega)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

여기서 $\delta(\omega)\doteq\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\tau$(Unit impulse function)

이 入力階段函數의 spectral density 를 觀察해 보건대 오로지 d-c power 만을 가짐을 알 수 있다. 다음으로 出力自己相關函數 $\phi_{yy}(\tau)$를 求하기 爲하여 Wiener 의 定理를 引用하면

$$\phi_{yy}(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}y(t)y(t+\tau)dt\ \cdots\cdots(3)$$

여기서

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

이므로

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)d\sigma\left[\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\cdot\int_{-T}^{T}x(t-\lambda)\,x(t+\tau-\sigma)dt\right]\cdots\cdots(4)$$

그런데

$$h(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}},\quad t\geq 0 \text{ 이며}$$

$$x(t)=E,\quad 0\leq t<\infty$$

$$x(t)=0\qquad -\infty<t<0$$

인 故로

$$\phi_{yy}(\tau)=\int_{0}^{\infty}h(\lambda)d\lambda\int_{0}^{\infty}h(\sigma)d\sigma\ \phi_{xx}\ (\tau+\lambda-\sigma)(5)$$

여기서

$$\phi_{xx}(\tau+\lambda-\sigma)=\phi_{xx}(\tau)=\frac{E^2}{2}$$

의 關係가 成立되므로

$$\phi_{yy}(\tau)=\frac{E^2}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{RC}e^{-\frac{\lambda}{RC}}d\lambda\int_{0}^{\infty}\frac{1}{RC}e^{-\frac{\sigma}{RC}}d\sigma\ \cdots\cdots(6)$$

即

$$\phi_{yy}(\tau)=\frac{E^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

이것이 求하려고 하는 出力相關函數의 값이다.

다음으로 出力側의 電力 spectrum 을 求하기 爲하여, 위에서 求한 相關函數 $\phi_{yy}(\tau)$를 利用해서 Wiener-Khinchin 의 定理를 適用하면 電力 spectrum 은 亦是 $\frac{E^2}{2}\delta(\omega)$가 되어 入力側의 그것과 同一한 結果를 얻게 된다. 그러나 著者에 따라서는 相關函數 $\phi_{yy}(\tau)$에 Fourier 變換을 取해서 求하는 것을 主張하는 사람이 있어 注意를 要하며 여기서는 그 方法으로 求해 보기로 한다. 即

$$\Phi_{yy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{yy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\ \cdots\cdots\cdots(8)$$

$$\Phi_{yy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{E^2}{2}\right)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{E^2}{4\pi}\delta(\omega)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

따라서 平均電力은

$$\overline{y^2(t)}=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{yy}(\omega)d\omega\doteq\phi_{yy}(0)$$

$$=\frac{E^2}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega)d\omega$$

$$=\frac{E^2}{4\pi}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

이 結果에서 大端히 興味로운 것은 入力信號에 任意의 階段函數를 印加했을 때 出力側의 平均電力이 RC 時定數에 左右되지 않고 無關하다는 事實인 것이다.

[7] Power spectrum 에 依한 方法

[6]節에서는 自己相關函數를 써서 出力과 入力과의 應答을 論述했지만 本節에서는 spectrum 을 써서 入出力關係 即 output power density spectrum 을 求해보기로 하기.

出力側의 電力 spectrum $\Phi_{yy}(\omega)$는

$$\Phi_{yy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{yy}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-j\omega\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)d\sigma\phi_{xx}(\tau+\lambda-\sigma)\cdots\cdots(1)$$

이 式에서

$$\nu=\tau+\lambda-\sigma$$

라 놓으면

$$\Phi_{yy}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\lambda)e^{j\omega\lambda}d\lambda\int_{-\infty}^{\infty}h(\sigma)e^{-j\omega\sigma}d\sigma\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{xx}(\nu)e^{-j\omega\nu}d\nu\right]\cdots\cdots(2)$$

$$\Phi_{yy}(\omega)=\overline{H(\omega)}H(\omega)\Phi_{xx}(\omega)\ \cdots\cdots\cdots(3)$$

여기서 系傳達函數 $H(\omega)$는 $\overline{H(\omega)}$와 共軛인 故로

$$\Phi_{yy}(\omega)=|H(\omega)|^2\ \Phi_{xx}(\omega)\ \cdots\cdots\cdots(4)$$

이 (4)式이 出力側의 power density spectrum 을 表示하는 式으로서

$$|H(\omega)|^2=\frac{\left(\frac{1}{RC}\right)^2}{\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2}$$

과

$$\Phi_{xx}(\omega)=\frac{E^2}{2}\delta(\omega)\text{ 를}$$

代入하면

$$\Phi_{yy}(\omega)=\frac{\left(\frac{E}{RC}\right)^2\delta(\omega)}{2\left[\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2\right]}\ \cdots\cdots\cdots(5)$$

따라서 平均電力(Mean square output voltage)는 다음과 같이 求해지며 前節의 (10)式의 結果와 一致함을 알 수 있을 것이다.

即

$$\overline{y^2}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi_{yy}(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{E}{RC}\right)^2\delta(\omega)}{2\left[\omega^2+\left(\frac{1}{RC}\right)^2\right]}d\omega \quad\cdots\cdots(6)$$

$$\overline{y^2}(t)=\frac{E^2}{4\pi} \quad\cdots\cdots(7)$$

[8] Picard 의 方法

이 方法은 iterative process로서 初期條件 $y(0)=0$ 에 對應하는 特殊解(Particular solution)를 求해 보기로 하자.

于先 原方程式

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{RC}(E-y)$$

의 解答은

$$y(t)=y(0)+\int_0^t\frac{1}{RC}(E-y)dt$$

로 쓸 수 있다.

勿論 $y(0)=0$ 인 故로

$$y(t)=\int_0^t\frac{1}{RC}(E-y)dt \quad\cdots\cdots(1)$$

第1近似解는 積分記號內의 y 를 $y(0)$로 代置하므로 可能할 것이다.

即

$$y_1(t)=y(0)+\int_0^t\frac{1}{RC}(E-y(0))\,dt$$

$$y_1(t)=\frac{E}{RC}\int_0^t dt=\frac{E}{RC}t \quad\cdots\cdots(2)$$

第2近似解는 (1)式의 y 代身에 y_1 을 代入하면 求해질 것이다.

$$y_2(t)=y(0)+\int_0^t\frac{1}{RC}\left(E-\frac{E}{RC}t\right)dt$$

$$=\frac{E}{RC}\int_0^t\left(1-\frac{t}{RC}\right)dt$$

$$y_2(t)=\frac{E}{RC}t-\frac{Et^2}{2(RC)^2} \quad\cdots\cdots(3)$$

同一한 方法으로 第3近似解는

$$y_3(t)=y(0)+\int_0^t\frac{1}{RC}\left(E-\frac{E}{RC}t+\frac{E}{2(RC)^2}t^2\right)dt$$

$$=\frac{E}{RC}\int_0^t\left(1-\frac{t}{RC}+\frac{t^2}{2(RC)^2}\right)dt$$

$$y_3(t)=\frac{E}{RC}t-\frac{E}{2!(RC)^2}t^2+\frac{E}{3!(RC)^3}t^3 \quad\cdots\cdots(4)$$

第4近似解는

$$y_4(t)=y(0)+\int_0^t\frac{1}{RC}\left(E-\frac{E}{RC}t+\frac{E}{2!(RC)^2}t^2-\frac{E}{3!(RC)^3}t^3\right)dt$$

$$y_4(t)=\frac{Et}{RC}-\frac{Et^2}{2!(RC)^2}+\frac{Et^3}{3!(RC)^3}-\frac{Et^4}{4!(RC)^4} \quad\cdots(5)$$

$$\vdots$$

따라서

$$y(t)=E\left[\frac{t}{RC}-\frac{t^2}{2!(RC)^2}+\frac{t^3}{3!(RC)^3}-\frac{t^4}{4!(RC)^4}+\cdots\cdots\right] \quad\cdots\cdots(6)$$

$$y(t)=E\left[1-\left(1-\frac{t}{RC}+\frac{t^2}{2!(RC)^2}-\frac{t^3}{3!(RC)^3}+\frac{t^4}{4!(RC)^4}\cdots\cdots\right)\right]$$

$$\therefore\ y(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right),\quad t>0 \quad\cdots\cdots(7)$$

[9] Taylor 級數를 利用하는 方法

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{RC}(E-y) & \cdots\cdots(1)\\ y(0)=0 & \cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)式에 repeated differentiation 을 實施해서

$$\left.\begin{aligned}y'&=\frac{1}{RC}(E-y)\\ y''&=-\frac{1}{RC}y'\\ y'''&=-\frac{1}{RC}y''\\ y^{(4)}&=-\frac{1}{RC}y'''\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots(3)$$

求하고저 하는 特殊解 $y(t)$ 가

$$y(t)=y(0)+y'(0)t+\frac{y''(0)}{2!}t^2+\frac{y'''(0)}{3!}t^3+\frac{y^{(4)}(0)}{4!}t^4+\cdots\cdots(4)$$

와 같이 $t=0$ 에서 Taylor 級數로 展開 可能하다고 하자.

(3)式群에 初期條件 (2)를 適用하면

$$y(0)=0$$

$$y'(0)=\frac{E}{RC}$$

$$y''(0)=-\frac{E}{(RC)^2}$$

$$y'''(0)=\frac{E}{(RC)^3}$$

$$y^{(4)}(0)=-\frac{E}{(RC)^4}$$

$$\vdots$$

이것들을 (4)式의 各項에 代入하면

$$y(t)=\frac{Et}{RC}-\frac{Et^2}{2!(RC)^2}+\frac{Et^3}{3!(RC)^3}-\frac{Et^4}{4!(RC)^4}+\cdots \quad\cdots\cdots(5)$$

(5)式은 [8]節 Picard's method에 依해서 얻은 (6)式과 同一한 結果이므로 우리가 求하고저 하는 出力信號 $y(t)$ 는

$$y(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right),\quad t\geq 0 \quad\cdots\cdots(6)$$

가 된다.

[10] Mellin transform

係數가 變數인 微分方程式도 亦是 線形系로 取扱이 되어 그 解法도 몇가지 있으나 그中 變換法으로 푸는方法을 紹介하기로 하자. RC 時定數와 入力 信號를 다음과같이 ramp function 으로 假定하면

$$RC=t,\quad x(t)=tu(t-1)$$

따라서 原方程式은

$$t\frac{dy}{dt}+y=tu(t-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1)式 兩邊의 各項을 Mellin transform 하면

$$\mathfrak{M}\left\{y\right\}\triangleq\int_0^\infty yt^{s-1}dt=Y_M(s)$$

$$\mathfrak{M}\left\{t\frac{dy}{dt}\right\}=\int_0^\infty\frac{dy}{dt}t^s dt=yt^s\Big]_0^\infty-s\int_0^\infty yt^{s-1}dt=-sY_M(s)$$

$$\mathfrak{M}\left\{tu(t-1)\right\}=\int_1^\infty t^s dt=-\frac{1}{s+1}$$

위에서 變換한 各項을 (1)式에 代入하면

$$-sY_M(s)+Y_M(s)=-\frac{1}{s+1}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$Y_M(s)=\frac{1}{(s+1)(s-1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\quad y(t)=\frac{1}{2}(t^{-1}-t)u(t-1)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

[考　　察]

主로 RC를 定數로 看做한 線形系(Linear system)의 解析을 試圖했다. 그外에도 이 線形回路의 問題를 時間領域에서 다루는데 圖解法(Graphical method)으로써 Isocline 또는 Phase-plane method 가 있을것이고 또 數値代入法(Numerical analysis)으로서 上述한 Picard또는 Taylor series에 依한 方法外에도 Adams method, Runge Kutta method, Gill method 또는 Modified Euler method 等으로도 解析이 可能하나 紙面關係上 論하지 못함을 遺憾으로 生覺한다. 다음으로 周波數領域에서의 解析을 檢討해보건데 前章에서 이미 取扱한 Power spectrum 法및 自己相關函數法 以外에도 系傳達函數를 polar plot 한다던가 Bode diagram을 그린다던가 또는 增幅器의 利得 K를 變化시킴에 따라 複素 s—平面上에 그리는 根軌跡 等으로 解析하므로서 吟味 해보는것도 興味있는 工夫라고 생각된다. 勿論 RC時定數의 逆數 即 減衰因數(Decrement factor) σ가 時間의 函數 即 $\sigma=f(t)$인 경우에도 亦是線形系로 看做되므로 Brovinius方法을 適用해서 級數形의 解答을 얻을수 있을것이다. 또 濾波器의 入力信號와 RC時定數가 ramp function인경우(實際 이런경우는 없지만 本論稿의 趣旨가 物理的 立場에서보다 數學的 立場에서 論하는것이니 讀者의 諒解를 求하는바이다)에는 前章에 例示한바와 같이 Mellin transform을 써서 簡單히 取扱 할수도있는 問題다.

끝으로 R 또는 C가 非線形性을 가질때는 이 回路網은 非線形系(Nonlinear system)가되어 Perturbation method, Iteration method, 및 Phase-plane method 等의 近似的 解法으로 處理할수있다. 前述한바와 如히 이만한 問題를 다루는데 이와같이 가지 가지의 解法이 있다는 것을 우리는 알게 되었지만 그 解析에 對備하려면 恒常 어느程度의 知識의 幅과深을 가지야 할것으로 믿는다.

(1963年 8月 3日接受)