

# 凸極同期機の 負荷時 3相短絡

李 晚 榮

## 序 言

凸極同期機(Salient-pole synchronous machine)를 無負荷로 運轉할때의 3相短絡現象은 本學會誌 第10輯에서 論及한바 있으므로 이번에는 負荷運轉時의 3相短絡에 隨伴되는 過渡現象을 究明해보기로한다. 勿論 이 경우도 無負荷運轉時의 경우와 極히 類似한 解法과 現象을 가진다는것을 알게 될것이며 單只 差異點을 든다면 初期條件(Initial conditions)에 左右 되어서 얻어지는 結果에 若干의 變動이 있을 다름일 것이다. 本論에 들어가기 前에 몇가지 前提條件을 마련하는 것이 解說上의 便利와 讀者의 便宜를 提供하는것으로 믿는다.

① 制動捲線(Damper winding)이 없는 凸極機를 取扱할것이며 ② 電機子抵抗(Armature resistance)은 減衰定數(Decrement factor)에 限해서만 影響을 주는 以外에는 이를 無視하고 ③ 計算에 나오는 모든 量은 單位法(Per-unit notation)을 使用할것이며 ④ 零相分(Zero-sequence effects)은 考憲할 必要가 없다는 것과 ⑤ 代表的인 同期機定數를  $x_d=0.8, x_q=0.5, r=0.01, x'_d=0.2$  및  $T_0=200$  으로 假定 하자는 것이다.

## 本 論

電機子抵抗  $r$  를 無視한 경우의 同期機의 電壓方程式은

$$(T_0 p + 1) I - (x_d - x'_d) T_0 p i_d = E \quad (1)$$

$$p I - x_d p i_d + x_q i_q = e_a \quad (2)$$

$$I - x_d i_d - x_q p i_q = e_q \quad (3)$$

이다. 여기서  $p = \frac{d}{dt}$  이다.

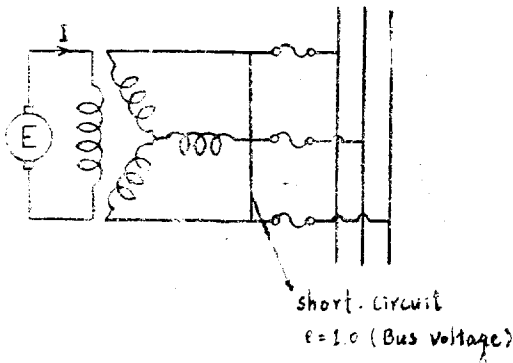


Fig 1. Balanced three-phase short circuit from load.

Fig 1. 과 같이 平衡負荷運轉을 할때 同期機가 突發短絡시킨 경우를 생각해 보자. 勿論 短絡前 定常運轉時의 vector diagram 을 살펴보면

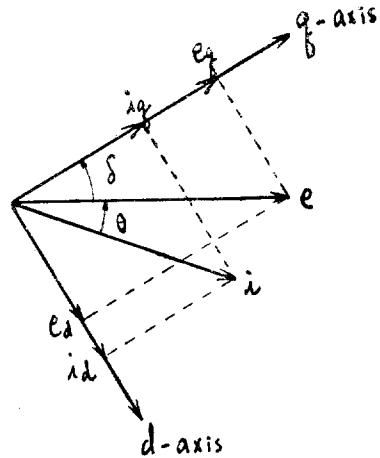


Fig 2. Vector diagram under condition of balanced load.

Fig 2 와 같으며 發電機 端子電壓  $e$  의 直軸分  $e_d$  와 橫軸分  $e_q$  는 各各

$$e_d = e \sin \delta \quad (4)$$

$$e_q = e \cos \delta \quad (5)$$

와 같을 것이다. 그러나 3相短絡直後에는 端子電壓  $e$  는 消滅 될것이므로 (4), (5)式에 明示된 바와같이  $e_d$  와  $e_q$  는 各各 零으로 되나 勵磁電壓  $E$  는 變함이 없을 것이다. 따라서 3相短絡 瞬間을 前後해서 境界條件을 따져보면 Table 1 과 같다.

Table 1. Boundary conditions under 3φ short-circuit from load

負荷運轉時	$E$	$e_d$	$e_q$
3相短絡直前	$E$	$e \sin \delta$	$e \cos \delta$
3相短絡直後	$E$	0	0
瞬間變化量	0	$-e \sin \delta$	$-e \cos \delta$

定常運轉時의 同期機方程式 (1), (2) 및 (3)式은 突發 3相短絡을 시킴으로써 아래와 같은 瞬時變化에 依한 過渡方程式으로 代置하게 된다.

$$(T_o p + 1) I - (x_d - x_d') T_o p i_d = 0 \quad (6)$$

$$p I - x_d p i_d + x_q i_q = -e \sin \delta \quad (7)$$

$$I - x_d i_d - x_q p i_q = -e \cos \delta \quad (8)$$

이 方程式系를  $I, i_d$  및  $i_q$  의 順으로 解를 얻어 3相短絡에 따르는 界磁電流의 變化和 短絡各相電流  $i_a, i_b$  및  $i_c$  를 求해보기로 한다.

過渡方程式系 (6), (7) 및 (8) 式에 Laplace 變換을 實施하면

$$(T_o s + 1) I(s) - (x_d - x_d') T_o s I_d(s) = 0 \quad (9)$$

$$s I(s) - x_d s I_d(s) + x_q I_q(s) = -\frac{e}{s} \sin \delta \quad (10)$$

$$I(s) - x_d I_d(s) - x_q s I_q(s) = -\frac{e}{s} \cos \delta \quad (11)$$

먼저  $I(s)$  를 求해 보면

$$I(s) = \frac{1}{D(s)} \begin{vmatrix} 0 & -(x_d - x_d') T_o s & 0 \\ -\frac{e}{s} \sin \delta & -x_d s & x_q \\ -\frac{e}{s} \cos \delta & -x_d & -x_q s \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$= \frac{x_q}{D(s)} (x_d - x_d') T_o (s e \sin \delta + e \cos \delta)$$

여기서

$$D(s) = \begin{vmatrix} T_o s + 1 & -(x_d + x_d') T_o s & 0 \\ s & -x_d s & x_q \\ 1 & -x_d & -x_q s \end{vmatrix}$$

$$= x_d' x_q T_o \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)$$

따라서 (12) 式은

$$I(s) = \left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) \left( s e \sin \delta + e \cos \delta \right) \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1) \quad (13)$$

(13) 式의 極點(Pole)  $s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}$  와  $s = \pm j$  에 對한 留數(Residue)를 求해 보기로 하자.

먼저 極點  $s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}$  에 對해서  $I(s)$  의 分子中

$e \sin \delta$  의 係數는

$$\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) s = \left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) \left( -\frac{x_d}{x_d' T_o} \right) = (3) (-0.02) = -0.06$$

이고

또  $e \cos \delta$  의 係數는

$$\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) = 3$$

이다. 即 주어진 同期機定數에 對한 母線電壓(Bus voltage)  $e$  의 直軸成分  $e \sin \delta$  의 係數는 橫軸成分  $e \cos \delta$  의 係數에 比하면 無視할 程度로 적은 數字 이므로 (13) 式은 다음과 같이 簡素化 할 수 있을 것이다.

$$I(s) = \frac{\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) e \cos \delta}{\left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)} \quad (14)$$

이와같이 해서 極點(Pole)  $s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}$  에 對한 留數(Residue)는

$$\left. \frac{\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) e \cos \delta}{s^2 + 1} e^{st} \right|_{s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}} = \left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) e \cos \delta e^{-\frac{t}{T_o}} \quad (15)$$

여기서  $\left( \frac{x_d}{x_d' T_o} \right)^2 = 0.0004 \ll 1$  인 故로 無視했고  $T_o$  는 界磁回路의 短絡過渡時定數이다. 다음에 極點  $s = \pm j$  에 對해서는 直軸成分  $e \sin \delta$  의 係數  $\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) (\pm j)$  는 無視할 수 없으므로

$$I(s) = \frac{\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) (e \sin \delta + e \cos \delta)}{\left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)} = \frac{N_1(s)}{D(s)} \quad (16)$$

여기서

$$D'(s) = (s^2 + 1) + 2s \left( s \cdot \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) \text{ 이며}$$

$$\frac{N_1(+j)}{D'(+j)} = \frac{\left( \frac{x_d}{x_d'} - 1 \right) e (\cos \delta + j \sin \delta)}{(2j) \left( j + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right)}$$

$\left( \frac{2x_d}{x_d' T_o} \right) = 0.04 \ll 1$  인 故로 無視할 수 있으므로

$$\frac{N_1(+j)}{D'(+j)} = -\frac{(x_d - x_d') e}{2x_d'} e^{j\delta}$$

따라서  $s = \pm j$  에 對한  $I(s)$  의 成分은

$$-\frac{(x_d - x_d')}{x_d'} \cos(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_o}} \quad (17)$$

여기서  $T_a = \frac{2x_d' x_q}{(x_d' - x_q)r}$  는 電機子 時定數 이다. 이와 같이 해서 界磁電流(Field current)의 過渡成分은 (15) 式과 (17) 式과를 合한것 即

$$\frac{(x_d - x_d')}{x_d'} e \cos \delta e^{-\frac{t}{T_o}} - \frac{(x_d - x_d')}{x_d'} e \cos(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_a}} \quad (18)$$

가 될 것이고 이것에 直流分  $E$  를 加算함으로써 求하고자 하는 短絡後의 界磁電流는

$$I = E + \frac{(x_d - x_d')}{x_d'} \left\{ e \cos \delta e^{-\frac{t}{T_o}} - e \cos(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_a}} \right\} \quad (19)$$

이 된다. 即 界磁電流는 過渡電機子電流의 直軸分을 그 直軸의 同期 reactance  $x_d$  와 過渡 reactance  $x_d'$  와의 差를 乘한것과 恰似한 形式을 갖는것으로 볼 수 있다.

Torque angle  $\delta = 30^\circ$  로 잡고 同期機定數를 (19) 式에 代入 함으로써 界磁電流  $I$  는

$$I=1.0+2.60 e^{-0.02t}-3 \cos(t+0.52) e^{-0.035t}$$

가 되고 이것을 그려보면 Fig 3 과 같다.

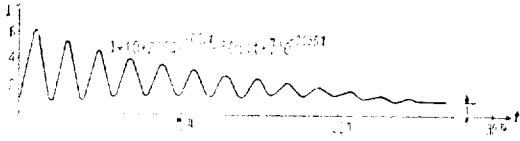


Fig 3. Transient field current on balanced three-phase short circuit from load. (Salient-pole machine without damper winding)

다음에는 變換方程式群 (9), (10) 및 (11) 式으로 부터 過渡 電機子 電流의 直軸分  $i_d$  를 求하기 爲하여 Cramer's rule 를 適用하면

$$I_d(s) = \frac{(T_o s + 1)(s e \sin \delta + e \cos \delta)}{x_d' T_o s \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)} \quad (20)$$

이 되고, (20) 式의 極點은 4 個이며 그의 값은 0,  $-\frac{x_d}{x_d' T_o}$  및  $\pm j$  이다.

$s=0$  에 對한  $i_d$  의 成分은

$$s I_d(s) e^{st} \Big|_{s=0} = \frac{e \cos \delta}{x_d} \quad (21)$$

$s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}$  에 對해서는 (20) 式의 分子中  $e \sin \delta$  의 係數는  $s(T_o s + 1) = 0.06 \ll 1$  인 故로 無視可能하여

$$I_d(s) = \frac{(T_o s + 1) e \cos \delta}{x_d' T_o s \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)} \quad (22)$$

로 表示할 수 있을 것이다.

여기서

$$\left( -\frac{x_d}{x_d' T_o} \right)^2 = 0.0004 \ll 1 \text{ (無視)}$$

따라서

$$\begin{aligned} \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) I_d(s) e^{st} \Big|_{s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}} &= \frac{(x_d - \lambda_d')}{x_d x_d'} e \cos \delta e^{-\frac{t}{T_o'}} \\ &= \left( \frac{1}{x_d'} - \frac{1}{x_d} \right) e \cos \delta e^{-\frac{t}{T_o'}} \quad (23) \end{aligned}$$

또  $s = \pm j$  에 對해서는

$$N_d(s) = (T_o s + 1)(s e \sin \delta + e \cos \delta)$$

$$D(s) = x_d' T_o s \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)$$

$$D'(s) = x_d' T_o \left[ \left( 2s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1) + 2s^2 \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) \right]$$

即

$$\frac{N_d(\pm j)}{D'(\pm j)} = \frac{e(1+jT_o)e^{\pm j}}{-2x_d' T_o \left( \frac{x_d}{x_d' T_o} + j \right)} \approx \frac{e e^{\pm j}}{-2x_d'}$$

따라서  $s = \pm j$  에 對한 成分은

$$-\frac{e}{x_d'} \cos(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_o}} \quad (24)$$

勿論 3 相短絡前의 定常電流의 直軸分  $i_{d(s)}$  는

$$i_{d(s)} = \frac{E}{x_d} - \frac{e \cos \delta}{x_d} \quad (25)$$

인 故로 短絡後에 生기는 過渡電流의 直軸分  $i_d$  는 위에 서 얻은 (21), (23), (24) 및 (25) 式을 加算한 것으로 成立 할 것이다.

即

$$\begin{aligned} i_d &= i_{d(s)} + i_{d(t)} \\ i_d &= \frac{E}{x_d} + \frac{(x_d - x_d')}{x_d x_d'} e \cos \delta e^{-\frac{t}{T_o'}} \\ &\quad - \frac{e}{x_d'} \cos(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_o}} \quad (26) \end{aligned}$$

Torque angle  $\delta = 30^\circ = 0.52$  radian 과 同期機定數를 式에 代入한 結果式은

$$i_d = 1.25 + 3.26 e^{-0.02t} - 5 \cos(t + 0.52) e^{-0.035t}$$

가 되며 이것을 plot 하면 Fig 4 와 같다.

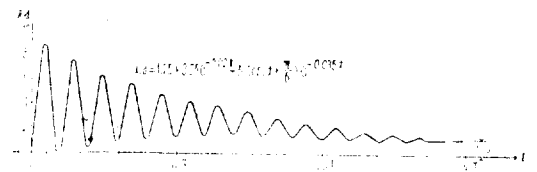


Fig 4. Direct axis component of transient armature current under load.

다음으로 (9)~(11) 式에서

$$I_q(s) = \frac{(x_d + x_d' T_o s)(s e \cos \delta - e \sin \delta)}{x_d' x_q T_o s \left( s + \frac{x_d}{x_d' T_o} \right) (s^2 + 1)} \equiv \frac{N_q(s)}{D(s)} \quad (27)$$

은 容易하게 算出이 되며  $I_d(s)$  의 경우와 똑같이  $I_q(s)$  의 極點도 4 個이다.

極點  $s=0$  에 對해서는

$$-\frac{e \sin \delta}{x_q} \quad (28)$$

이며 (27) 式의 分子의 因數  $(x_d + x_d' T_o s)$  가 極點  $s = -\frac{x_d}{x_d' T_o}$  에 對해서 零이 됨으로 이 極點에 對한 解答은 없다.

또 極點  $s = \pm j$  에 對해서는 (27) 式으로 부터

$$\frac{N_q(\pm j)}{D'(\pm j)} = \frac{e}{2x_q} e^{j\left(\delta - \frac{\pi}{2}\right)}$$

따라서

$$\frac{e}{x_q} \sin(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_o}} \quad (29)$$

이것이  $s = \pm j$ 에 대한 성분이다. 따라서 橫軸分  $i_q$ 의 過渡項은 (28)式과 (29)式과를 合한것.

即

$$i_q(t) = -\frac{e \sin \delta}{x_q} + \frac{e}{x_q} \sin(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_a}}$$

이 되며 또  $i_q$ 의 定常項은  $i_{qs} = \frac{e \sin \delta}{x_q}$  인 故로

$$i_q = i_{qs} + i_{q'}(t)$$

에서

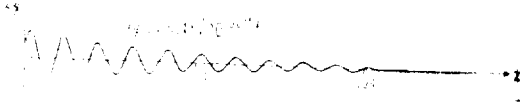


Fig. 5. Quadrature axis component of transient armature current under load.

$$i_q = \frac{E}{x_q} \sin(t + \delta) e^{-\frac{t}{T_a}} \quad (30)$$

이 될것이다. (30)式에 亦是 torque angle  $\delta = 30^\circ$ 와 同期機定數  $e = 1.0$ ,  $x_q = 0.5$  등을 代入하면 短絡過渡電流의 橫軸成分  $i_q$ 의 式은

$$i_q = 2 \sin(t + 0.52) e^{-0.035t}$$

이더 이것을 plot 하면 Fig. 5와 같이 된다.

以上에서의 解析은 過渡界磁電流  $I(t)$ 와 短絡電機子電流의 直軸分  $i_d$ 와 橫軸分  $i_q$ 를 求한것이었다. 그러므로 다음에는 3相短絡時의 各相電流를 다음의 公式에서 容易하게 解決지을 수가 있다.

即

$$i_a = i_d \cos(t + \alpha) - i_q \sin(t + \alpha) \quad (31)$$

$$i_b = i_d \cos(t + \alpha - 120^\circ) - i_q \sin(t + \alpha - 120^\circ) \quad (32)$$

$$i_c = i_d \cos(t + \alpha + 120^\circ) - i_q \sin(t + \alpha + 120^\circ) \quad (33)$$

平衡 3相 短絡의 경우인 故로 電機子  $b$ 相 및  $c$ 相의 短絡電流  $i_b, i_c$ 는  $a$ 相의 그것과  $120^\circ$ 의 位相差를 갖는다는것 以外에는 다름이 없다.  $a$ 相의 短絡電流  $i_a$ 는 위에서 얻은 (26)式의 直軸分과 (30)式의 橫軸分과를 (31)式에 代入 함으로써 곧 求할수 있을것이다.

$$i_a = \frac{E}{x_d} \cos(t + \alpha) + \frac{e(x_d - x_d')}{x_d x_d'} e^{-\frac{t}{T_d'}} \cos \delta \cos(t + \alpha) - \frac{e}{x_d'} e^{-\frac{t}{T_d'}} \cos(t + \alpha) \cos(t + \alpha) - \frac{e}{x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \sin(t + \delta) \sin(t + \alpha) \quad (34)$$

이것을 簡單히 整理하면

$$i_a = \frac{E}{x_d} \cos(t + \alpha) + \frac{e(x_d - x_d')}{x_d x_d'} e^{-\frac{t}{T_d'}}$$

$$\cos \delta \cos(t + \alpha) - \frac{e(x_d' + x_q)}{2x_d' x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(\delta - \alpha) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d' x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(2t + \delta + \alpha) \quad (35)$$

더욱이

$$\cos(2t + \delta + \alpha) = \cos \delta \cos(2t + \alpha) + \cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

의 恒等式과

$$i_{d(s)} = \frac{E}{x_d} - \frac{e}{x_d} \cos \delta$$

即

$$-\frac{e}{x_d} \cos \delta = i_{d(s)} - \frac{E}{x_d}$$

의 關係式을 (35)式에 代入해서 簡潔히 整理하면 所望의 電機子  $a$ 相의 短絡電氣  $i_a$ 는 또

$$i_a = \frac{E}{x_d} \cos(t + \alpha) + \left(-\frac{e}{x_d'} \cos \delta - \frac{E}{x_d} + i_{d(s)}\right) e^{-\frac{t}{T_d'}} \cos(t + \alpha) - \frac{e(x_d' + x_q)}{2x_d' x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(\delta - \alpha) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d' x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos \delta \cos(2t + \alpha) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d' x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2t + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \quad (36)$$

으로 볼 수 있을 것이다. (36)式의  $a$ 相 短絡電流를 살펴보면 第1項이 基本波持續分(Sustained fundamental component), 第2項이 基本波交流分(Damped fundamental component), 第3項이 減衰直流分(Damped d-c component), 即 短絡瞬間에 存在하는 磁束鎖交數(Flux linkages)를 維持하기 爲하여 電機子에 흐르는 直流, 故로 第4, 5項은 第2高調波分(Damped second harmonic component)으로써 磁極이 廻轉함에 따라 電機子 inductance의 變化에 依하여 發生하는 電流分이며 이와같은 成分으로 이루어진것을 알 수 있다.

다음으로 既知定數  $x_d = 0.8$ ,  $x_q = 0.5$ ,  $x_d' = 0.2$ ,  $T_d' = 200$  및  $\alpha = 30^\circ$ ,  $\delta = 15^\circ$  등을 (35)式에 代入하여  $a$ 相 短絡電流의 波形을 檢討해보면

$$i_a = 1.25 \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + 3.61 e^{-0.021t} \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) - 3.38 e^{-0.035t} - 1.5 e^{-0.035t} \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$$

가 되고 이것을 時間의 函數로 圖示하면 Fig 6과 같다.

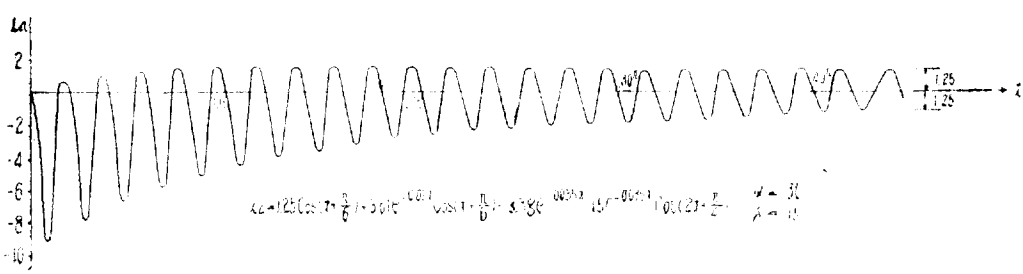


Fig. 6. Transient armature current in phase a on balanced three-phase short circuit from load. (Salient pole machine without damper winding)

위와 똑같은 방법으로  $i_c$  와  $120^\circ$  의 위相差를 갖는  $b$  相 및  $c$  相의 過渡相電流  $i_b, i_c$  는 各各 다음과 같다.

$$i_b = \frac{E}{x_d} \cos(t + \alpha - 120^\circ) + \left( \frac{e}{x_d'} \cos \delta - \frac{E}{x_d} + i_{d,s} \right) e^{-\frac{t}{T_d'}} \cos(t + \alpha - 120^\circ) - \frac{e(x_d' + x_q)}{2x_d'x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(\delta - \alpha + 120^\circ) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d'x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos \delta \cos(2t + \alpha - 120^\circ) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d'x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2t + \alpha - \frac{\pi}{2} - 120^\circ\right), \quad (37)$$

$$i_c = \frac{E}{x_d} \cos(t + \alpha + 120^\circ) + \left( \frac{e}{x_d'} \cos \delta - \frac{E}{x_d} + i_{d,s} \right) e^{-\frac{t}{T_d'}} \cos(t + \alpha + 120^\circ) - \frac{e(x_d' + x_q)}{2x_d'x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos(\delta - \alpha - 120^\circ) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d'x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} \cos \delta \cos(2t + \alpha + 120^\circ) + \frac{e(x_d' - x_q)}{2x_d'x_q} e^{-\frac{t}{T_a}} .$$

$$\cos\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(2t + \alpha - \frac{\pi}{2} + 120^\circ\right) \quad (38)$$

### 結 論

凸極同期機에 負荷를 걸고 運轉을 할때는 發電機 界磁電壓과 端子電壓 사이에 power-angle  $\delta$  만큼 位相差가 생겨 無負荷 運轉의 경우와는 初期條件이 달라진다. 따라서 過渡短絡電流를 誘導하는 課程에서 若  $\Gamma$  의 差가 있음은 當然하다. 그러나 無負荷 運轉의 경우는 界磁電壓과 端子電壓은 一致가 되어 即  $\delta=0$  인故로 短絡電流  $i_a$  의 (35) 式中  $\delta$  를 零으로 代置하면 本學會誌 第10輯에서 求한 (33) 式과는 完全一致가 된다. 故로 위에 求한 모든 誘導式의 正確함도 아울러 檢討가된 셈이다.

### 參 考 文 獻

1, Doherty, R.E. and C.A. Nickle, "Synchronous Machine-V, Three-phase Short Circuit," AIEE Transaction, Vol. 49, 1930, pp. 709-712.

2. 李晚榮: "無負荷 運轉時의 凸極同期機의 3相短絡", 大韓電氣學會誌 第10輯, 1963, pp. 55-61.

(1963年 8月 7日 接受)