複素周波數面上의 直交函數近似法에 依한 時間領域에서의 回路網構成法

論文資料 10—2

金 榮 祖

目 次

概 要

本論文은 Laguerre 函數의 Fourier 變換에 依한 Wiener 와 Lee 의 回路網構成法을 一般化한 것이다. 即 Laplace 變換을 使用하여 時間領域에서 任意의 過渡特性을 나타내는 回路를 構成하는 問題를 複素周波數面上의 直交函數系에 依한 近似問題로 歸着시켰으며 이때 얻어진 近似函數의 物理的實現性을 確認하고 實際構成例를 드렀다. 이때 近似函數로는 複素極이 包含되었을 때도 適用할수 있도록 理論과 方法이 一般化되었다.

Ⅰ. 緖 言

線型回路網의 旣往에 發表된 構成理論은 大部分이 周波數領域에서의 것이며 時間領域에서 주워진 過渡特性을 實現하는 回路網構成法은 前者에 比하여 더욱 困難하고 發表된 方法도 比較的 적다.[1]

N. Wiener 와 Y.W. Lee 는 Laguerre 函數의 Fourier 變換을 利用하므로서 任意 過渡特性을 나타내는 回路網을 構成하는 한 方法을 考案하였으며[2] 後에 Kautz[3]와 Lee[1]는 그 方法을 더욱 넓은 種類의 函數를 利用하는데까지 發展시켰으나 使用된 近似函數의 極이오직 實根일때만 適用할수 있는 것이었다.

本論文에서는 Laplace 變換을 利用하여 잘 研究되어 있는 古典的 直交函數系에 依한 近似展開論을 複素周波數面上의 關係로 擴張하였으며 任意 過渡特性을 實現시키는데 있어서 가장 一般的인 函數에 對한 理論을 展開하므로서 實極일때나 複素極일때 또는 그들이 混在할 境遇에도 適用할수 있는 가장 一般的 回路網構成法을 提示하였다.

이 理論에 依하면 個別的으로 얻어진 Wiener, Lee 및 Kautz 等의 몇가지 方法은 이 一般論의 特殊例로서 誘導되며 그들의 方法보다 有利한 또다른 特殊方法도 確認되었다.

Ⅱ. 安定系의 過渡應答函數

一般的으로 線型系에 있어서는 入力變換函數(Excitation transform)를 E(s), 出力應答變換函數(Response transform)를 W(s)라 할때 傳達函數(Transfer function) H(s)는 $H(s)=W(s)/E(s)$로써 定義된다. (여기서 $s=\sigma+j\omega$는 Laplace 變換의 複素變數임.) H(s)는 系의 parameter 로써 決定되는 常數係數를 가진 有理分數函數로 表示되므로 $H(s)$의 極 $s_j(j=1,2,3,\cdots\cdots)$ 全體에 對應하는 時間領域에서의 過渡應答函數(Transient response function)는

仁荷工科大學 助敎授

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{r_j}\frac{1}{(i-1)!}k_{ij}t^{i-1}e^{s_jt}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

여기서 r_j 는 正整數로서 s_j 의 重複度를, k_{ij} 는 $H(s)$ 의部分展開式에서 項 $1/(s-s_j)^i$ 의 係數를 表示한다[5]

一般的으로 安定系에 있어서는 $H(s)$ 의 分母有理函數는 所謂 Hurwitz 의 多項式이며 $H(s)$의 極은 複素周波數面上에서 右半面에 存在할 수 없으므로

$$s_j=-\sigma_j+j\omega_j\ (\sigma j\geq 0)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

라 놓면 (1)式은 s_j 가 實數인가 複素數인가에 따라 各各 아래와 같이 된다.

$$\sum_{i=1}^{r_j}\frac{k_{ij}}{(i-1)!}t^{i-1}e^{-\sigma_j t}$$

또는 $$\sum_{i=1}^{r_j}\frac{2|k_{ij}|}{(i-1)!}t^{i-1}e^{-\sigma_j t}\cos(\omega_j t+\phi_{ij})$$

여기서 $k_{ij}=|k_{ij}|e^{j\phi_{ij}}$

以上으로부터 有理分數函數 $H(s)$에 對應하는 過渡應答函數의 가장 一般的인 形式은 (2)式으로부터 아래 型임을 알수 있다.

$$t^{i-1}\varepsilon^{s_jt}\quad(s_j=-\sigma_j+j\omega_j,\ \sigma_j\geq 0)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

Ⅲ. 時間領域 規格化直交函數系에 依한 過渡應答函數의 展開

加重函數(weight function) $w(t)$에 關하여 區間 $(0,\infty)$內에서 條件:

$$\int_0^\infty\phi_m(t)\phi_n(t)w(t)dt=\delta_{m,n}$$

$(\delta_{m,n}$ 는 Kroneckcr 의 記號$)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

를 滿足하는 規格化直交函數系(System of Orthonormal functions) $\{\phi_n(t)\}$를 使用하여 任意函數 $h(t)$에 對한 n 次近似函數:

$$h_n(t)=\sum_{k=0}^{n}A_k\phi_k(t)\quad(n=0,1,2,\cdots\cdots)\cdots\cdots(5)$$

를 生覺하면 平均自乘誤差 $\epsilon_n(t)$는

$$\epsilon_n(t)=\int_0^\infty[h(t)-h_n(t)]^2w(t)dt$$

$$=\int_0^\infty h^2(t)w(t)dt-2\sum_{k=0}^{n}A_k\int_0^\infty h(t)\phi_k(t)w(t)dt$$

$$+\sum_{k=0}^{n}A_k^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

따라서 $\dfrac{\partial\epsilon_n(t)}{\partial A_k}=0$ 로 부터 A_k 의 値를

$$A_k=\int_0^\infty h(t)\phi_k(t)w(t)dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

와 같이 取하면 $\epsilon_n(t)$는 最小가 되며 이런 意味에서 (5)式은 $h(t)$에 對한 最良近似函數가 된다. $\epsilon_n(t)$는 次數 n 가 增加할수록 減少할뿐만아니라 近似度를 向上시키기위하여 (5)式 右邊의 項數를 n 에서 $(n+1)$로 增加시켰을때도 最初의 n 項은 變化치않는 長點이 있다.

따라서 指定된 過渡應答函數를 $h(t)$라 할때 이와 近似한 特性을 나타내는 傳達函數를 가진 回路網을 構成하는 問題는 (1) 適當한 加重函數 $w(t)$에 對하여 (4)式을 滿足하는 規格化直交函數系 $\{\phi_n(t)\}$를 發見하여 (2) 이들의 一次結合으로 (5)式과 같은 $h_n(t)$를 만들었을때 (3) (5)式에 對應하는 傳達函數를 가진 回路網을 物理的으로 實現할수 있으면 解決된다.

그 自體는 直交函數가 아닌 任意函數群 $f_i(i=1,2,3,\cdots\cdots)$로 부터 (例컨대 Gram-Schmidt 의 方法으로) f_i 를 部分函數로 하는 直交函數系 $\{\phi_n(t)\}$를 언제나 求할수있으나[6] 次數 n 가 增大함에 따라 途中의 數値計算이 複雜하게 될뿐만 아니라 이리하여 얻은 $h_n(t)$도 物理的實現性(Physical realizability)에 對해서는 何等保證되는 바가 없다.

자주 使用하는 加重函數로서 $w(t)=-2at$ 의 境遇를 生覺하면 (4),(7)式은 各各

$$\int_0^\infty\phi_m(t)\phi_n(t)e^{-2at}dt=\int_0^\infty\varphi_m(t)\varphi_n(t)dt=\delta_{m,n}\cdots(8)$$

但 $\varphi_k(t)=\phi_k(t)e^{-at}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

(8)式은 $\{\varphi_k(t)\}$가 加重函數 $w(t)=1$ 에 關하여 그自身이 規格化直交函數系임을 表示하므로 이때 過渡函數는 (5)式으로부터

$$h(t)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\varphi_k(t)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

가되며 (7)式의 係數 A_k 는 아래와 같이 된다.

$$A_k=\int_0^\infty h(t)\varphi_k(t)dt\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

Ⅳ. 複素周波數領域 規格化直交函數系에 依한傳達函數의 展開

$\mathfrak{L}[f_1(t)]=F_1(s)$, $\mathfrak{L}[f_2(t)]=F_2(s)$ (여기서 $\mathfrak{L}$ 는 Laplace 變換演算子임)라하고 $f_1(t)$, $f_2(t)$의 絕對收斂橫座標(Abscissas of absolute convergence)를 各各 σ_1,σ_2, 또 s 의 實數部: $R[s]=\sigma$ 라하면 $\sigma_1<c<\sigma-\sigma_2$ 인 c 에 對하여 complex convoluition:

$$\mathfrak{L}[f_1(t)\,f_2(t)]\equiv\int_0^\infty f_1(t)f_2(t)e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}F_1(\lambda)F_2(s-\lambda)d\lambda\cdots\cdots\cdots(12)$$

가 成立된다.[7] 여기서 $s=0$ 라놓면 (12)式은

$$\int_0^\infty f_1(t)f_2(t)dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}F_1(\lambda)F_2(-\lambda)d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}F_1(s)F_2(-s)ds\cdots\cdots(13)$$

(13)式은 Fourier 變換에 있어서의 Parseval 의 關係式[8]에 對應하는 式이다.

지금 (10)式 兩邊의 Laplace 變換을 擇하되 $\mathcal{L}[h(t)]=H(s)$, $\mathcal{L}[\phi_k(t)]=\mathcal{L}[\phi_k(t)e^{-at}]=\Phi_k(s+a)=\Psi(s)$ 라 놓면

$$H(s)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\phi_k(s+a)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\Psi_k(s)\cdots\cdots(14)$$

(13)의 關係式을 (8)式에 適用하면

$$\int_0^{\infty}\phi_n(t)\phi_m(t)dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Psi_n(s)\Psi_m(-s)ds=\delta_{n,m}\cdots\cdots(15)$$

(14)式 兩邊에 $\frac{1}{2\pi j}\Psi_n(-s)$를 乘한後 虛數軸에 따라 積分하면 (15)式에 依하여

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}H(s)\Psi_n(-s)ds$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_k\Psi_k(s)\Psi_n(-s)ds$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Psi_k(s)\Psi_n(-s)ds=\sum_{k=0}^{\infty}A_k\delta_{k,n}$$

$$\therefore\ A_k=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}H(s)\Psi_k(-s)ds\cdots\cdots(16)$$

(15)式은 $\{\Psi_n(s)\}=\{\Phi_n(s+a)\}$가 直交函數系임을 나타낸다. (14), (15), (16)式은 複素周波數領域에서의 直交函數系를 規定지우는 基本式으로써 各各 時間領域에서의式 (10), (8), (11)에 對應한다. 여기서 (16)式과 (11)式의 A_k 의 値는 同一하다.

V. 變形指數函數型 直交函數 展開

1. 一 般 型

앞서 Ⅱ 에서 가장 一般的인 過渡應答函數型은 (3)式과 같은 變形指數函數型(Modified exponential functions)임을 말했다. 이들을 部分函數群으로하는 直交函數系를 直接 時間領域에서 求하여 回路網을 構成할려면 Ⅱ 에서 指摘한바와같은 難點이 있음으로 여기서는 周波數領域에서의 直交化에 關한 Lee 의 方法을 一般化하는 方式으로 이 困難을 避하기로 하자.

變形指數型函數에 對한 Laplace 變換은

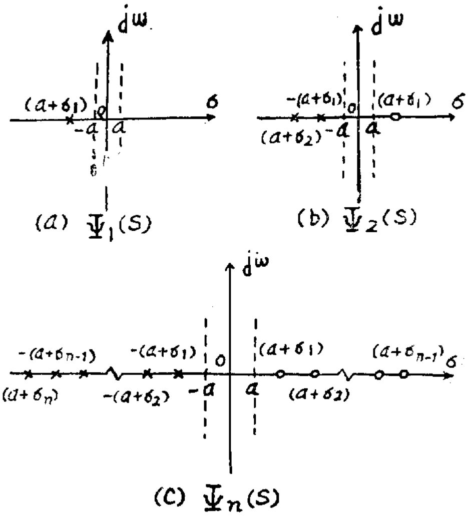
$$\mathcal{L}[t^{i-1}e^{s_jt}]=\frac{(i-1)!}{(s-s_j)^i}\cdots\cdots(17)$$

이므로 지금 $\phi(t)=t^{i-1}e^{s_jt}$ 라 놓면 $\psi(t)=\phi(t)e^{-at}$ 의 Laplace 變換은

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{L}[\psi(t)]=\Psi(s)=\Phi(s+a)&=\frac{(i-1)!}{(s+a-s_j)^i}\\&=\frac{(i-1)!}{(s+a+\sigma_j-j\omega_j)^i}\end{aligned}\right\}(18)$$

먼저 $\Psi_n(s)$의 모든 極이 實數일때를 生覺한다. 이때는 $s_k=-\sigma_k$

지금 直交函數系 $\{\Psi_n(s)\}$를 誘導함에 있어서 $\Psi_1(s)$에는 1개의 極: $-(a+\sigma_1)$을, $\Psi_2(s)$에는 2개의 極: $-(a+\sigma_1)$, $-(a+\sigma_2)$를, $\Psi_3(s)$에는 3개의 極: $-(a+\sigma_1)$, $-(a+\sigma_2)$, $-(a+\sigma_3)$를, 以下 같은 方法으로 一般的으로 $\Psi_n(s)$에 對해서는 n개의 極: $-(a+\sigma_1)$, $-(a+\sigma_2)$, ……, $-(a+\sigma_n)$를 割當한다. (**第1圖**)



第1圖 直交函數系 $\{\Psi_n(s)\}$의 極 및 零點
(極 및 零點이 모두 實數일때)

이때 $\Psi_n(s)$와 $\Psi_{n-1}(s)$의 函數形은 아래와 같을 것이다.

$$\Psi_n(s)=A_n\frac{g_n(s)}{\prod_{r=1}^{n}[s+(a+\sigma_r)]}\cdots\cdots(19)$$

$$\Psi_{n-1}(s)=A_{n-1}\frac{g_{n-1}(s)}{\prod_{r=1}^{n-1}[s+(a+\sigma_r)]}\cdots\cdots(20)$$

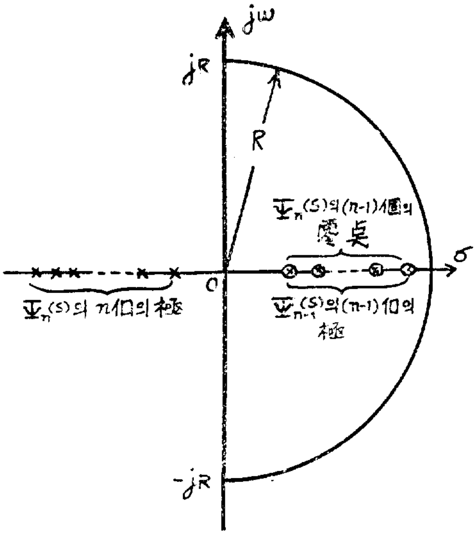
여기서 A_n, A_{n-1}은 定數이고 $g_n(s)$, $g_{n-1}(s)$는 s의 適當한 函數이다.

$\Psi_n(s)$와 $\Psi_{n-1}(s)$가 直交하려면 (15)式에 依하여

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Psi_n(s)\Psi_{n-1}(-s)ds=0\cdots\cdots(21)$$

(21)式의 被積分函數 $\Psi_n(s)\Psi_{n-1}(-s)$를 第2圖의 閉積分路에 따라서 積分할때 Cauchy 의 定理[9]에 依하여 積分路의 內部 및 周邊上에 $\Psi_n(s)\Psi_{n-1}(s)$의 特異點이 하나도 없을때만 積分値가 零이된다. 그림에서 R를 無限大로하면 積分路는 結局 右半平面을 全部 內包하게 되는데 이때 無限半圓周上의 積分은 Jordan 의 補助定理[10]에 依하여 零이되므로 閉積分路에 對한 積分中 虛數軸上의 無限積分만이 남게된다. 一方 $\Psi_n(s)\Psi_n(-s)$의 特異點中 右半平面上에 存在하는 것은 $\Psi_{n-1}(-s)$의 $(n-1)$개의 極: $(a+s_r)$, $(r=1, 2, \cdots\cdots, n-1)$뿐이므로 $g_n(s)$가

$$g_n(s)=\prod_{r=1}^{n-1}[s-(a+\sigma_r)]\cdots\cdots(22)$$



第 2 圖 (21)式에 對한 積分路

란 形式일때는 $g_n(s)$의 零點이 $\Psi_{n-1}(-s)$의 極을 完全히 相殺해버리므로 $\Psi_n(s)\Psi_{n-1}(-s)$는 右半平面上에서 正則函數가 되어 (21)式이 自動的으로 滿足된다. 따라서 (22), (19)式으로부터

$$\Psi_n(s)=A_n\frac{\prod_{r=1}^{n-1}[s-(a+\sigma_r)]}{\prod_{r=1}^{n}[s+(a+\sigma_r)]}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

여기서 規格化條件을 生覺하면 (15)式에 依하여

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Psi_n(s)\,\Psi_n(-s)\,ds=1\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

(23)式으로부터

$$\Psi_n(s)\Psi_n(-s)=A_n^2\frac{\prod_{r=1}^{n-1}[s-(a+\sigma_r)]}{\prod_{r=1}^{n}[s+(a+\sigma_r)]}\cdot\frac{\prod_{r=1}^{n-1}[-s-(a+\sigma_r)]}{\prod_{r=1}^{n}[-s+(a+\sigma_r)]}=\frac{A_n^2}{[s+(a+\sigma_r)]\,[-s+(a+\sigma_r)]}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

가 되므로 (24)式은

$$\frac{A_n^2}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{-1}{[s+(a+\sigma_r)][s-(a+\sigma_r)]}ds=1\cdots(25)$$

(25)式의 積分에다가 같은 被積分函數의 右 또는 左無限半圓周上의 積分을 添加하면 積分路는 閉路가 되나 無限半圓周上의 積分은 Jordan의 補助定理에 依하여 零이므로 結局 (25)式과 같은 虛數軸上의 無限積分은 前記한 閉積分路에 對한 積分을 留數定理[11]에 依하여 求한 것과 同一한 値를 갖는다. 이리하여 (25)式은 結局 아래와 같게된다.

$$A_n^2\cdot\frac{1}{2(a+\sigma_n)}=1$$

$$\therefore\quad A_n=\sqrt{2(a+\sigma_n)}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

(26), (23)式으로부터 $\Psi_n(s)$의 完全한 式은

$$\Psi_k(s)=\frac{\sqrt{2(a+\sigma_k)}}{[s+(a+\sigma_k)]}\prod_{r=1}^{k-1}\frac{[s-(a+\sigma_r)]}{[s+(a+\sigma_r)]}\cdots\cdots(27)$$

다음에 $\Psi_n(s)$의 모든 極이 複素數일때를 生覺한다. 이때는 $s_k=-\sigma_k+j\omega_k$이란 極이 있을때는 반드시 $\bar{s}_k=-\sigma_k-j\omega_k$란 共扼複素極도 共存하므로 $\Psi(s)$의 構成單位因子로서는 $1/[s+(a+\sigma_k)]$代身에 $1/[s+(a-s_k)][s+(a-\bar{s}_k)]$를 使用해야한다. 이리하여 實數極때와 꼭 같은 方法으로 $\Psi_k(s)$를 求해보면 k는 偶數이므로

$$\left.\begin{aligned}\Psi_k(s)&=\frac{\sqrt{2(a+\sigma_k)}\ \sqrt{2[(a+\sigma_k)^2+\omega_k^2]}}{[s+(a-s_k)][s+(a-\bar{s}_k)]}\cdot\prod_{r=1}^{\frac{k}{2}-1}\frac{[s-(a-s_r)][s-(a-\bar{s}_r)]}{[s+(a-s_r)][s+(a-\bar{s}_r)]}\cdot\\&=\frac{\sqrt{2(a+\sigma_k)}\ \sqrt{2[(a+\sigma_k)^2+\omega_k^2]}}{[(s+a+\sigma_k)^2+\omega_k^2]}\cdot\prod_{r=1}^{\frac{k}{2}-1}\frac{[(s-a-\sigma_r)^2+\omega_r^2]}{[(s+a+\sigma_r)^2+\omega_r^2]}.\end{aligned}\right\}(28)$$

(27), (28)式을 比較해보면 $\Psi_n(s)$가 實數極과 複素數極을 모두 갖고 있을때는

$$\left.\begin{aligned}\Psi_k(s)&=\frac{\sqrt{2(a+\sigma_k)}\ (\sqrt{2[(a+\sigma_k)^2+\omega_k^2]})^*}{[s+(a-s_k)][s+(a-\bar{s}_k)]^*}\cdot\prod_r\frac{[s-(a-s_r)][s-(a-\bar{s}_r)]^*}{[s+(a-s_r)][s+(a-\bar{s}_r)]^*}\cdot\\&=\frac{\sqrt{2a_k}\ (\sqrt{2b_k})^*}{[s+(a_k-j\omega_k)][s+(a_k+j\omega_k)]^*}\cdot\prod_r\frac{[s-(a_r-j\omega_r)][s-(a_r+j\omega_r)]^*}{[s+(a_r-j\omega_r)][s+(a_r+j\omega_r)]^*}\cdot\\&\text{여기서}\quad a_k=a+\sigma_k,\quad b_k=a_k^2+\omega_k^2\\&\qquad\qquad=(\sigma+a_k)^2+\omega_k^2\end{aligned}\right\}(29)$$

여기서 *印이 붙은 因子는 實極에 對해서는 1로 代替해야 함을 意味한다.

(29)式은 生覺할수 있는 모든 境遇에 適用할수 있으며 變形指數函數型直交函數系를 複素周波數領域에서 表現한 가장 一般的인 式이다.

2. Laguerre 函數型

特別한 境遇로써 $a=p$, $s_k=0$ $(k=1,2,3,\cdots\cdots,k)$일때를 生覺하면 (29)式은 아래와 같이된다.

$$\Psi_k(s)=L'_k(s)=\frac{\sqrt{2a}}{(s+a)}\left(\frac{s-a}{s+a}\right)^{k-1},\quad k=1,2,3.\cdots$$

여기서 $L'_{k-1}(s)=L_k(s)$라 놓면 上式은

$$\Psi_k(s)=L_k(s)=\frac{\sqrt{2a}}{(s+a)}\left(\frac{s-a}{s+a}\right)^k,\quad k=0,1,2,3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

가 된다.

지금 $L_k(s)$에 對應하는 時間領域의 函數를 $\phi_k(t)$라 하면 이 境遇의 規格化直交條件 (8)式은

$$\int_0^\infty \psi_m(t)\psi_n(t)dt=\int_0^\infty \phi_m(t)\phi_n(t)e^{-2pt}dt=\delta_{m,n} \quad (31)$$

變數變換 : $2pt=x$ 를 하면 (31)式은

$$2p\int_0^\infty \phi_m\left(\frac{x}{2p}\right)\phi_n\left(\frac{x}{2p}\right)e^{-x}dx=\delta_{m,n} \cdots\cdots(32)$$

(32)式은 $\{\sqrt{2p}\,\phi_n(x)\}$가 區間$(0, \infty)$內에서 e^{-x}를 加重函數로 하는 規格化直交函數系를 形成함을 나타낸다. 그러한 函數는 오직 Laguerre의 多項式 :

$$\left.\begin{aligned} L_k(x)&=\frac{1}{k!}e^x\frac{d^k}{dx^k}(x^ke^{-x}) \\ \int_0^\infty L_m(x)&L_n(x)e^{-x}dx=\delta_{m,n} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

뿐이므로[12] 따라서 $\phi_k(t)$는 一種의 Laguerre函數라 볼수 있다. (30)式은 內容的으로 Wiener 와 Lee[13] 가 最初로 얻은結果와 一致한다.

(30)式에서 볼수있는 極의 種類는 오직 하나뿐이므로 Laguerre函數에 依하여 一般的인 過渡函數를 充分히 近似시킬려면 極히 높은 次數의 近似函數를 使用해야한다.

3. 指數函數型

(29)式에서 萬若 s_k 가 複素極일때는 (29)式은 아래와 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned} \Psi_k(s)=U_k{}^c(s)&=\frac{\sqrt{4(a+\sigma_k)[(a+\sigma_k)^2+\omega_k{}^2}}{[s+(a-s_k)][s+(a-\bar{s}_k)]} \\ &\prod_C^m\frac{[s-(a+\sigma_R)]}{[s+(a+\sigma_R)]}\prod_C^n\frac{[s-(a-s_c)][s-(a-s_c)]}{[s+(a-s_c)][s+(a+s_c)]} \\ &=\frac{\sqrt{4a_kb_k}}{[s+(a_k-j\omega_k)][s+(a_k-j\omega_k)]} \\ &\prod_R^m\frac{(s-a_R)}{(s+a_R)}\prod_C^n\frac{[s-(a_c-j\omega_c)][s-(a_c+j\omega_c)]}{[s+(a_c-j\omega_c)][s+(a_c+j\omega_c)]} \\ &=\frac{\sqrt{4a_kb_k}}{(s^2+2a_ks+b_k)}. \\ &\prod_R^m\frac{(s-a_R)}{(s+a_R)}\prod_C^m\frac{(s^2-2a_cs+b_c)}{(s^2+2a_cs+b_c)} \\ \text{여기서 } a_k=a+\sigma_k, &\ b_k=(a+\sigma_k)^2+\omega_k{}^2=a_k{}^2+\omega_k{}^2 \end{aligned}\right\}(34)$$

여기서 $\prod_R^m$는 k보다 低次인 因子中에 있는 모든 實極 m個에 對한, 또 $\prod_C^n$는 k보다 低次인 因子中에 있는 모든 複素極 $2n$個에 對한 乘積을 意味한다.

(29)式에서 萬若 s_k 가 實數極일 때는 (29)式은 아래와 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned} \Psi_k(s)=U_k{}^R(s)&\frac{\sqrt{2(a+\sigma_k)}}{[s+(a+\sigma_k)]}. \\ &\prod_R^m\frac{[s-(a+\sigma_R)]}{[s+(a+\sigma_R)]}\prod_C^n\frac{[s-(a-s_c)][s-(a-\bar{s}_c)]}{[s+(a-s_c)][s+(a-\bar{s}_c)]} \\ &=\frac{\sqrt{2a_k}}{(s+a_k)}. \\ &\prod_R^m\frac{(s-a_R)}{(s+a_R)}\prod_C^n\frac{[s-(a_c-j\omega_c)][s-(a_c+j\omega_c)]}{[s+(a_c-j\omega_c)][s+(a_c+j\omega_c)]} \\ &=\frac{\sqrt{2a_k}}{(s+a_k)}. \\ &\prod_R^m\frac{(s-a_R)}{(s+a_R)}\prod_C^n\frac{(s^2-2a_cs+b_c)}{(s^2+2a_cs+b_c)} \\ \text{여기서 } a_k=a+\sigma_k, &\ b_k=a_k{}^2+\omega_k{}^2=(a+\sigma_k)^2+\omega_k{}^2 \end{aligned}\right\}(35)$$

特히 모든 極이 實數일때는 (29)式은 아래와 같이 된다.

$$\left.\begin{aligned} \Psi_k(s)=U_k{}^{RR}(s)&=\frac{\sqrt{2a_k}}{(s+a_k)}\prod_{r=1}^{k-1}\frac{s-a_k}{s+a_k} \\ \text{여기서} \quad a_k&=a+\sigma_k \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(36)$$

(34), (35), (36)式에는 各種의 極이 包含되어있으므로 주워진 過渡特性에 對應하는 極에 近似한 極을 擇할때는 같은 次數의 近似函數로써 Wiener-Lee의 Laguerre函數近似보다 近似度가 높은 回路網을 構成할 수 있다.

(36)式에서 또다시 $a=0$, $\sigma_k=kp$라 놓면 (29)式은 아래와 같이 된다.

$$\Psi_k(s)=U_k{}^{RRR}(s)=\frac{\sqrt{2p}}{(s+p)}\prod_{r=1}^{k-1}\frac{(s-np)}{(s+np)} \cdots(37)$$

$U_k{}^{RR}(s)$나 $U_k{}^{RRR}(s)$에 對應하는 時間領域의 函數를 $\phi_k(t)$라하면 이 境遇에 $\phi_k(t)$는 指數函數가됨을 알 수 있다.

(37)式은 內容的으로 Lee[14]나 Kautz 가 얻은 結果와 一致한다. 이 函數系에 依한 近似法은 (34), (35), (36)式에 比하여 極의 選擇自由度가 적기때문에 近似度도 若干 떨어진다.

4. Legendre 函數型

(29)式에서 $a=p/2$ $\sigma_k=kp$, $\omega_k=0(k=1,2,3,\cdots\cdots)$ 일때를 生覺하면 (29)式은 아래와 같이된다.

$$\Psi_k(s)=V_k(s)=\frac{\sqrt{(2k+1)p}}{[s+\frac{(2k+1)}{2}p]}\prod_{n=0}^{k-1}\frac{[s-\frac{(2n+1)}{2}p]}{[s+\frac{(2n+1)}{2}p]} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

지금 $V_k(s)$에 對應하는 時間領域의 函數를 $\phi_k(t)$라 하면 이 境遇의 規格化直交條件 (8)式은

$$\int_0^\infty \psi_m(t)\psi_n(t)dt=\int_0^\infty \phi_m(t)\phi_n(t)e^{-pt}dt=\delta_{m,n}\cdots(39)$$

變數變換 : $e^{-pt}=y$ 를 하면 (39)式은

$$\frac{1}{p}\int_0^1\phi_m\left(-\frac{1}{p}\ln y\right)\phi_n\left(-\frac{1}{p}\ln y\right)dy=\delta_{m,n}\cdots(40)$$

여기서 또다시 變數變換 : $y=\frac{x+1}{2}$를 하면 (40)式은

$$\frac{1}{2p}\int_{-1}^1\phi_m\left(\frac{1}{p}\ln\frac{2}{x+1}\right)\phi_n\left(\frac{1}{p}\ln\frac{2}{x+1}\right)dx=\delta_{m,n}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

(41)式은 $\left\{\frac{1}{\sqrt{2p}}\phi_n(x)\right\}$가 區間$(-1,\ 1)$內에서 1을 加重函數로 하는 規格化直交函數系를 形成함을 나타낸다. 그러한 函數는 오직 Legendre의 多項式:

$$\left.\begin{aligned} P_n(x)&=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dn^n}(x^2-1)^n \\ \int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)dx&=\frac{2}{2n+1}\delta_{m,n} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(42)$$

뿐에므로[15] 따라서 $\phi_k(t)$는 一種의 Legendre函數라 볼수 있다. (38)式은 內容的으로 Lee[16]의 結果와 一致한다.

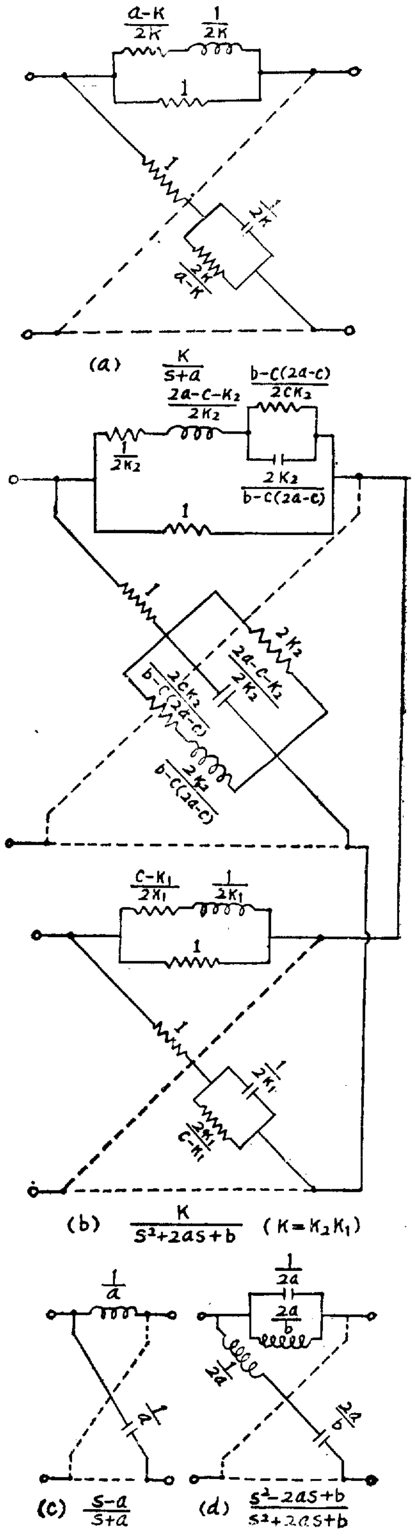
Ⅵ. 直交函數에 依한 回路網構成法

1. 回路網基本構成要素

以上에서 얻은 $\Psi_k(s)$의 物理的實現性을 檢討하기 위하여 (29)式을 비롯하여 (30), (34), (35), (36), (38)式等으로 表示되는 모든 $\Psi_k(s)$의 構成基本因子를 추려보면 4個의 型으로 分類되는데 이들은 모두 定抵抗格子型(Constant resistance lattice)回路로서 構成이 可能하며 各各에 對應하는 具體的回路를發見할수 있다. (第1表)

第 1 表

傳達函數	定抵抗格子型對稱回路로서의 物理的 實現條件	備 考	回路例	文獻
$\frac{k}{s+a}$	$k\geq a$		第3a圖	(17)
$\frac{k}{s^2+2as+b}$	$\frac{k}{s-z}+\frac{\bar{k}}{s-\bar{z}}$ 와 같은 形式일때는 $\frac{\sigma}{\omega}\geq\frac{v}{u}$ 但 $z=-\sigma+j\omega$, $k=u+jv$	左條件이 成立치 않을때는 padding法을 使用함.	第3b圖	(18)
	$\frac{k}{(s^2+2as+b)}$ 와 같은 形式일때는 $k<b$			(19)
	$\frac{k_2(s+c)}{(s^2+2as+b)}\cdot\frac{k_1}{(s+c)}=H_2\cdot H_1$라 變形했을 때 $(k=k_2k_1)$ H_1에 對해서는 $k_1\leq c$ H_2에 對해서는 $k_2\leq 2a$, $k_2\leq\frac{b}{c}$, $k_2\leq 2a-c$	要는 k가 充分히 적으면 可.		(20)
$\frac{s-a}{s+a}$	언제나 可		第3c圖	(21)
$\frac{(s-z)(s-\bar{z})}{(s+z)(s+\bar{z})}$	$\frac{(s^2-2as+b)}{(s^2+2as+b)}$라 變形해서도 使用함. 언제나 可.	all-pass型	第3d圖	(21)

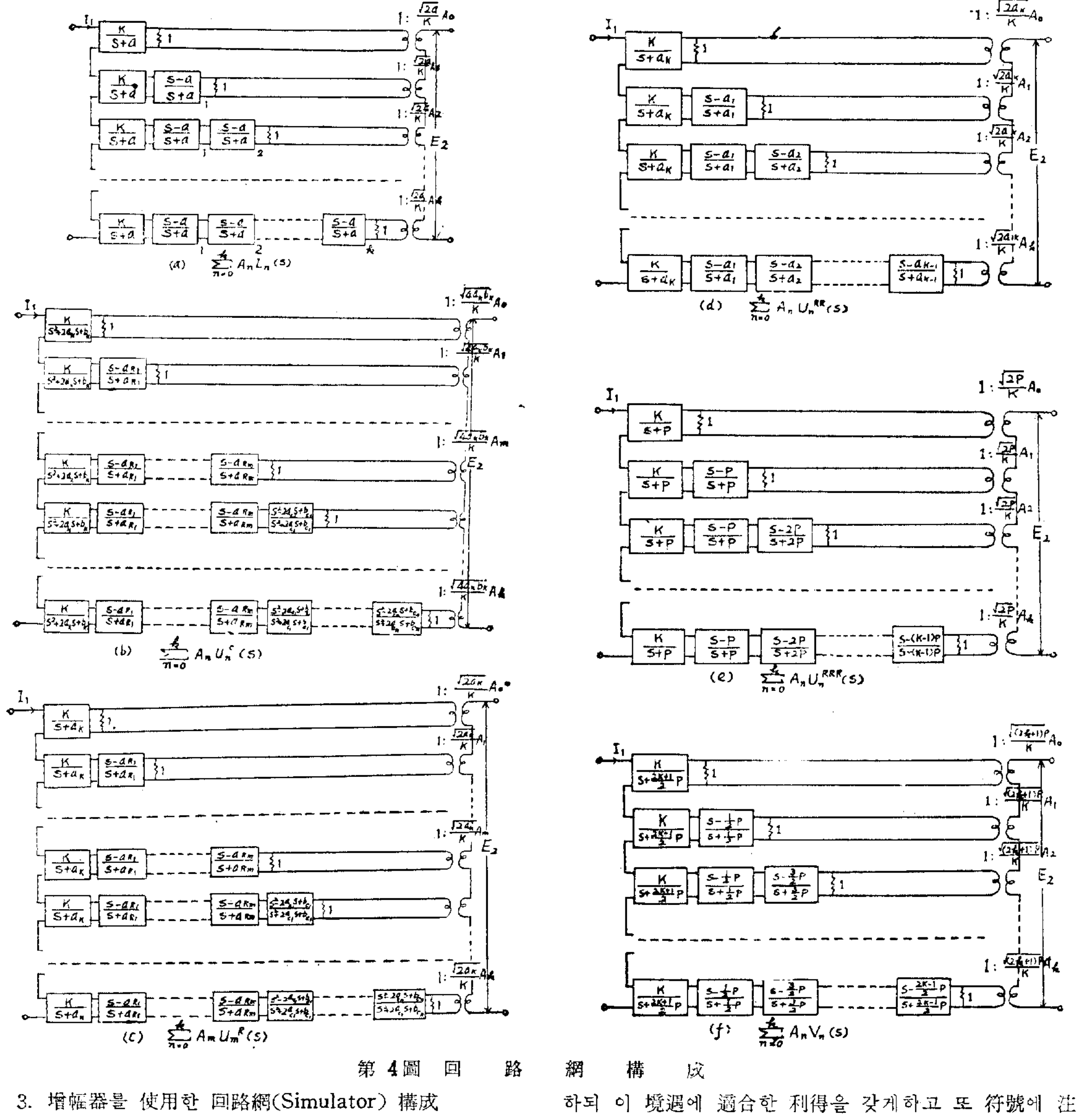


第 3 圖 基本傳達函數에 對應하는 定抵抗對稱格子型回路例

2. 受動回路網構成

$\Psi_k(s)$의 物理的實現性이 肯定的이므로 $\{\Psi_k(s)\}$에 對應하는 回路를 例컨데 第3圖와 같은 構成單位回路들로 만든後 이들을 (14)式에 따라 必要한 數만큼 連結해주면 所要 回路網構成은 끝난다. (→)

(30), (34), (35), (36), (37), (38)式等에 對應하는 回路網構成例를 第 4 圖에 表示하였다. (第 4 圖에서 A_k는 (16)式 또는 (11)式으로부터 求해지며 그値는 $\Psi_k(s)$의 種類에따라 다르다. 또 impedance level을 1로하여 表示하였음)



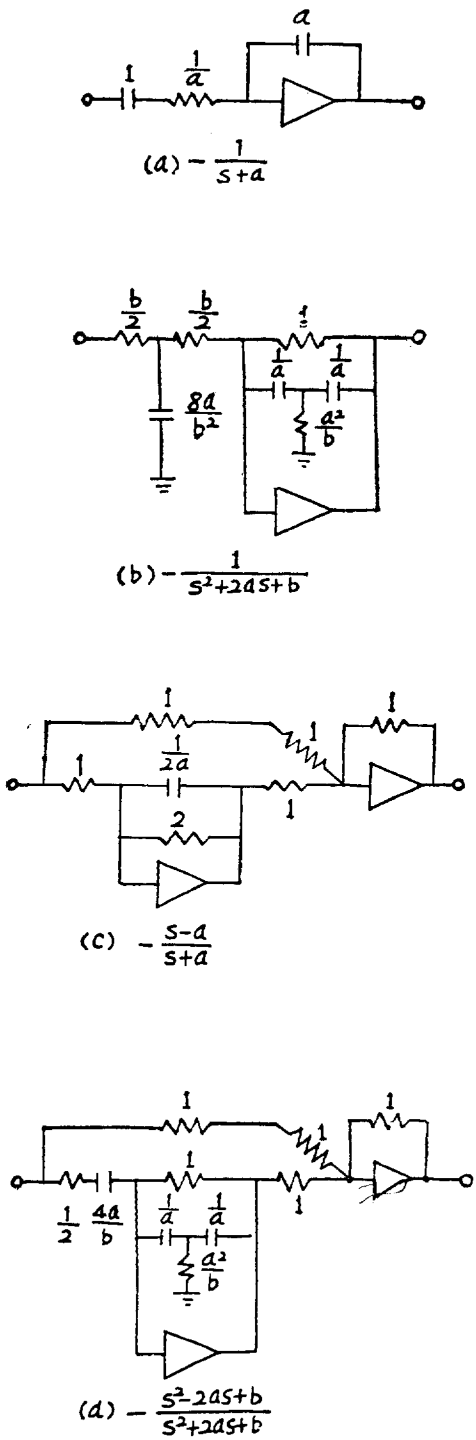
第 4圖 回 路 網 構 成

3. 增幅器를 使用한 回路網(Simulator) 構成

第 1 表의 4 種의 傳達函數는 모두 第 5 圖와 같이(第 5 圖에서 모든 抵抗은 megohm로 capacitance는 microfarad로 表示하였음) Analog-computer로 表現할수 있으므로[22] 이들을 (14)式에 따라 必要한 數만큼 連結해주면 所要 回路網(Simulator) 構成을 할수 있으며 이때 Simulator의 Elock diagram은 第 4 圖를 그대로 利用할수 있다. (但 理想變壓器代身에 增幅器를 使用하되 이 境遇에 適合한 利得을 갖게하고 또 符號에 注意하여야 함.)

Ⅶ. 結 論

本論文에서는 任意過渡特性을 나타내는 回路網을 構成하는데 있어서 複素周波數領域에서 所要傳達函數를 直交函數展開式으로 近似시키는 方式으로 考察하였다. ((14)式)



第 5 圖　傳達函數의 Analog computer 에 依한 表現

이 境遇에 가장 一般的인 直交函數系로서 變形指數函數型函數((12)式)에 對해서 硏究하였으며 그結果 얻은 展開式((29)式等)은 物理的實現性이 保證된다.

이 方法은 近似式의 次數를 增加하면 近似度가 順次로 向上되는 完全構成法이며 또 近似度에 對한 評價가 確實하다. ((6)式)

여기서 誘導한 式((29)式)은 Wiener-Lee 의 結果를 特殊한 一例로서 內包하는 가장 一般的인 式이며 그들의 方法보다 훨신 收斂速度가 빠른 特殊한 構成式도 이로부터 誘導할수 있다.

(西紀 1963 年 1 月 19 日 接受)

文　　獻

(1) E. A. Guillemin, "Synthesis of Passive Networks," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957, pp 659-731.
J. E. Storer, "Passive Network Synthesis," McGraw-Hill Book Co.,Inc., New York, 1957 pp 303-315.
J. G. Truxal, "Automatic Feedback Control System Synthesis," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1955, pp 375-390.
W. W. Seifert and C. W. Steeg, Jr., "Control Systems Engineering," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1960, pp 780-841.

(2) N. Wiener and Y. W. Lee, U. S. Patent Nos. 2,024,900 Dec. 17. 1935; 2,124,599, July 26. 1938; 2,128,257, Aug. 30. 1938.
Y. W. Lee, "Synthesis of Electric Networks by Means of Fourier Transforms of Laguerre's Functions," J. Math. and Phys., M. I. T., Vol. 11, 1932, pp 83-113.

(3) W. H. Kautz, "Transient Synthesis in the Time Domain," IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-1, no.3, pp 29-39, September, 1954.

(4) Y. W. Lee, "Statistical Theory of Communication," John Wiley & Sons, Inc., New York, 1960, pp 459-501.

(5) E. S. Kuh and D.O. Pederson, "Principles of Circuit Synthesis," McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1959, p 8.

(6) E. T. Whittaker and G.N. Watson, "A Course of Modern Analysis," Cambridge University Press, 1927, p 224.

(7) M. F. Gardner and J. L. Barnes, "Transients in Linear Systems" Vol. 1 John Wiley & Sons, Inc., New York, 1957, pp 275-277.
(8) E. C. Titchmarsh, "Introduction to the Theory of Fourier Integrals", Oxford Clarendon Press, 1937, p 51.
(9) E. T. Whittaker and G.N. Watson, ibid., p85.
(10) E. T. Whittaker and G. N. Watson ibid., p 115.
(11) E. T. Whittaker and G. N. Watson, ibid., pp 111-112.
(12) R. Courant und D. Hilbert, "Methoden der mathematischen Physik", Julius Springer, Berlin, Vol.1, 1931, pp 79-80.
(13) Y. W, Lee, ibid., p 476.
(14) Y. W. Lee, ibid., p 473.
(15) R. Courant und D. Hilbert, ibid., pp 70-72.
(16) Y. W. Lee. ibid., p 479.
(17) E. A. Guillemin, ibid., p 484.
(18) N. Balabanian, "Network Synthesis", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1958, pp 339-343.
(19) N. Balabanian, ibid., p 326.
(20) E. A. Guillemin, ibid., pp 484-488.
(21) J. E. Storer, ibid., pp 136-137.
(22) G. A. Korn and T. M. Korn, "Electronic Analog Computers". McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1956, pp 415-422.