論文·資料
9—4

指數線路의 圖式解法

朴 松 培

目 次

Ⅰ. 緖 言

指數線路는 特히 microwave 工學에서 Impedance 變換用으로 널리 使用되고 있으나 그 Impedance 函數 또는 反射係數의 表示式의 複雜性으로 因하여 이 線路의 特性硏究, 設計에 있어서 적지 않은 計算의 困難이 따른다. 따라서 이의 圖式解法이 歡迎된다. 本論文에서 우리는 指數線路의 Impedance 函數를 一次變換하면 普通의 均一線路에 對한 것과 類似한 表示式이 얻어짐에 着眼하여 複素數의 一次變換을 代表하는 W-平面과 Smith chart 또는 直交 Impedance diagram 를 併用하던지 W-平面을 直交 Impedance diagram 에 重疊시키던지 또는 Smith chart 의 constant-r constant-x 圓의 label 를 고쳐서 使用하던지 하여 指數線路의 問題를 圖式으로 解決하는 方法을 模索하였다. 또 같은 着眼으로부터 指數線路의 集中定數 等價回路가 興味있게 求해짐을 附隨的으로 指摘하였다.

Ⅱ. 指數線路의 Impedance 函數

任意의 傳送線路에 대한 電壓 電流의 微分方程式은 다음과 같은 形式으로 表示된다.

$$\frac{dV}{dy}=Z(y)I, \quad \frac{dI}{dy}=Y(y)V \quad \cdots\cdots(1)$$

여기서 $Z(y)$와 $Y(y)$는 各各 受電端으로부터의 距離가 y 인 點에서의 單位長當의 線路의 直列 Impedance 와 並列 Admittance 를 나타낸다.

公稱特性 Impedance $Z_o(y)$와 公稱傳播定數 $\gamma(y)$를 다음과 같이 定義하자.

$$Z_o(y)=\sqrt{Z(y)/Y(y)}$$

$$\gamma(y)=\sqrt{Z(y)\cdot Y(y)}=\alpha+j\beta$$

그러면

$$\gamma=Z/Z_o=YZ_o \quad \cdots\cdots(2)$$

無損失線路에 對해서는 Z_o는 實數이고 γ는 純虛數가 된다.

線路의 任意點에서의 Impedance V/I를 Z_o로서 規準化한 것을 z라 하면

$$z=\frac{V}{Z_oI} \quad \cdots\cdots(3)$$

이 兩邊의 對數를 y로 微分하면

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dy}=\frac{1}{V}\cdot\frac{dV}{dy}-\frac{1}{I}\cdot\frac{dI}{dy}-\frac{1}{Z_o}\cdot\frac{dZ_o}{dy} \quad \cdots(4)$$

式(2), (3)을 利用하여 式(1)을 고쳐 쓰면

$$\frac{dV}{dy}=V\cdot\frac{\gamma}{z}, \quad \frac{dI}{dy}=I\gamma z \quad \cdots\cdots(5)$$

이것들을 式(4)에 代入하면

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{dz}{dy}=\frac{\gamma}{z}-z\gamma-\frac{1}{Z_o}\cdot\frac{dZ_o}{dy}$$

또는

$$\frac{dz}{dy}=\gamma-\left(\frac{d}{dy}\ln Z_o\right)z-\gamma z^2 \quad \cdots\cdots(6)$$

이것이 不均一傳送線路의 任意點에서의 規準化된 Impedance 에 對한 微分方程式이다.

指數線路에 있어서는

$$Z_o(y)=Z(y)\exp(-\alpha y)$$

이므로 式(6)은

$$\frac{dz}{dy}=(1-z^2)\gamma+\alpha z \quad \cdots\cdots(7)$$

와 같이 된다. 이 方程式을 풀기 위하여 다음과 같은 一次變換을 생각하여 보자. 卽

$$z=A+BW \quad \cdots\cdots(8)$$

여기서 A, B는 새로운 變數 W에 關한 微分方程

서울大學校工科大學 電子工學科專任講師

式이 簡單하게 되도록 決定할 수 있는 任意의 常數다. 式(8)을 式(7)에 代入하면

$$B\frac{dW}{dy}=(1-A^2-2ABW-B^2W^2)\gamma+\alpha(A+BW)$$

이 右邊에서 爲先 W의 一次項을 없애기 위하여

$$A=\frac{\alpha}{2\gamma}\quad\cdots\cdots(9)$$

라 놓으면

$$B\frac{dW}{dy}=\left(1+\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}-B^2W^2\right)\gamma$$

여기서 다시

$$B=\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}}\quad\cdots\cdots(10)$$

와 같이 定하면

$$\frac{dW}{dy}=\bar{\gamma}(1-W^2)\quad\cdots\cdots(11)$$

와 같이 簡單하게 된다. 但

$$\bar{\gamma}\equiv\gamma\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4\gamma^2}}\quad\cdots\cdots(12)$$

그리고 W와 z와의 關係는 式(8), (9), (10), (12)들로부터

$$z=\frac{\alpha}{2\gamma}+\frac{\bar{\gamma}}{\gamma}\cdot W$$

또는

$$W=\left(z-\frac{\alpha}{2\gamma}\right)\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\quad\cdots\cdots(13)$$

와 같이 된다.

微分方程式 (11)의 解는 容易하게

$$W=\tanh(\bar{\gamma}y+c')\quad\cdots\cdots(14)$$

와 같이 求해진다. 여기서 c'는 境界條件으로부터 定해지는 積分常數다. 지금 受電端이 規準化된 Impedance z_L로서 終端되어 있다면 $y=0$에서

$$W=W_L=\left(z_L-\frac{\alpha}{2\gamma}\right)\frac{\gamma}{\bar{\gamma}}\quad\cdots\cdots(15)$$

이 境界條件을 式(14)에 代入하면

$$c'=\tanh^{-1}W_L$$

따라서 線長이 l일 때 入力 Impedance를 變換된 形式으로 表示하면

$$W_{in}=\tanh(\bar{\gamma}l+\tanh^{-1}W_L)$$

또는

$$W_{in}=\frac{W_L+\tanh\bar{\gamma}l}{1+W_L\tanh\bar{\gamma}l}\quad\cdots\cdots(16)$$

이것은 均一한 傳送線路의 入力 Impedance에 對한 表示式과 全혀 同一한 形式을 갖고 있다.

無損失指數線路는 低域通過濾波器의 性質을 갖고 있으며 그 遮斷周波數에 對한 動作周波數의 比가 $\frac{\alpha}{2\beta}$로서 表示됨이 알려져 있다.[1] 이 比를 ν라 하면

$$\nu\equiv\frac{\alpha}{2\beta}\quad\cdots\cdots(17)$$

ν를 써서 式(12)—(16)을 고쳐 쓰면

$$\bar{\gamma}=j\beta\sqrt{1-\nu^2}\equiv j\bar{\beta}\quad\cdots\cdots(18)$$

但 $$\bar{\beta}\equiv\beta\sqrt{1-\nu^2}\quad\cdots\cdots(19)$$

또 $$W=(z+j\nu)\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}\quad\cdots\cdots(20)$$

$$W_L=(z_L+j\nu)\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}\quad\cdots\cdots(21)$$

$$W_{in}=\frac{W_L+j\tan\bar{\beta}l}{1+jW_L\tan\bar{\beta}l}\quad\cdots\cdots(22)$$

式(20), (22)로부터

$$z_{in}=-j\nu+\sqrt{1-\nu^2}\cdot\frac{W_L+j\tan\bar{\beta}l}{1+jW_L\tan\bar{\beta}l}\quad\cdots\cdots(23)$$

여기에 式(21)을 代入하여 簡單하게 하면

$$z_{in}=\frac{(\sqrt{1-\nu^2}\cot\bar{\beta}l+\nu)z_L+j}{\sqrt{1-\nu^2}\cot\bar{\beta}l-\nu+jz_L}\quad\cdots\cdots(24)$$

이 結果는 Burrows가 全혀 相異한 方法으로 얻은 것과 一致함을 容易하게 證書할 수 있다.[1]

Ⅲ. 指數線路의 圖式解法

無損失指數線路의 負荷 Impedance가 주어졌을 때 入力 Impedance를, 또는 反對로 入力 Impedance가 주어졌을 때 負荷 Impedance를 圖式으로 求하는 問題의 關鍵은 式(20)—(22)를 考察하는데 있다. 即 前述한 바와 같이 式(20)에 의하여 Impedance 函數를 一次變換하면 均一線路에 對한 關係式과 同一한 式(22)가 얻어지므로 가장 初步的인 圖式解法은 이 一次變換을 나타내는 W-平面과 均一線路에 對한 Impedance diagram을 併用하는 것이다. 그러나 W-平面을 直角 Impedance diagram 上에 重疊하던지 또는 Smith chart를 適當히 修正하면 하나의 diagram로서도 目的을 達할 수 있다.

1. W-平面과 Smith chart를 併用하는 方法

두 diagram을 併用하는 경우 Impedance diagram로서는 더 흔히 쓰이는 Smith chart가 直角 Impedance diagram보다 有利할 것이다. 그리고 W-平面은 z-平面의 原點을 (0, ν)에 移動시킨 다음 모든 尺度를 $\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$倍로 擴大시켜서 얻는다(遮斷周波數 以上에서는 $\nu<1$이므로 $\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}>1$이다). 이리하여 constant-$r$ constant-x($z=r+jx$)의 直線들을 容易하게 W-平面上에 plot할 수 있다.

旣知의 負荷 Impedance Z_L로부터 入力 Impedance를 얻는 節次는 다음과 같다.

$$Z_L\xrightarrow[Z_{o2}\text{로서 規準化}]{}z_L\xrightarrow[W\text{-平面을 使用}]{}W_L\xrightarrow[\text{Smith chart를 使用}]{}W_{in}\xrightarrow[W\text{-平面을 使用}]{}z_{in}\xrightarrow[Z_{o1}\text{로 規準化된 것을 還元}]{}Z_{in}$$

여기서 Z_{o1}, Z_{o2}는 各各 入力과 出力端子에서의 特性 Impedance 다.

以上의 節次를 反對方向으로 하면 入力 Impedance 를 알므로써 負荷 Impedance 를 求할 수 있다. 지금 假想的인 反射係數 ρ_w 를 다음과 같이 定義하자.

$$\rho_w=\frac{W-1}{W+1}$$

式(20)에 의하여 이것은 $\rho_w=\frac{z+j\nu-\sqrt{1-\nu^2}}{z+j\nu+\sqrt{1-\nu^2}}$와 같이 表示되므로 ρ_w는 實際의 反射係數 $\rho=\frac{z-1}{z+1}$ 와는 直接的인 關係가 없다. 따라서 z로부터 ρ를 또는 ρ로부터 z를 求하려면 Smith chart 를 다시 한번 使用하지 않으면 안 된다.

2. W-平面을 重疊한 直角 Impedance diagram 를 利用하는 方法

만일 두 개의 diagram 代身에 하나의 diagram 만을 써서 문제를 해결하려면 Smith chart 보다 直角 Impedance diagram 가 더 便利할 것이다. 왜냐 하면 後者의 경우에는 아무런 수정없이 이에 W-平面을 重疊할 수 있기 때문이다. 그림 1은 一例로 $\nu=0.6$ 따라서 $\sqrt{1-\nu^2}=0.8$인 경우에 대하여 W-平面을 直角 Impedance diagram 上에 重疊시킨 것이다. 이 그림의 利用法은 明白하므로 說明을 略하겠다. 한 가지 興味있는 事實은 $r=1$ 線과 $x=0$ 線과의 交點 P가 $\nu\left(=\frac{\alpha}{2\beta}=\frac{\text{動作周波數}}{\text{遮斷周波數}}\right)$의 變化에 따라서 單位直角双曲線上을 移動한다는 것이다(證明 : 點 P의 座標를 $(u_o,\ v_o)$라 하면 $u_o=\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$, $v_o=\frac{\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}$ 이므로 $u_o^2-v_o^2=1$). 이 事實은 特히 周波數가 變할 때 constant-r, constant-x 線들을 迅速하게 plot 하는데 도움이 될 것이다(註 : $\overline{O'P}$의 길이가 새로운 尺度로서는 單位長이 됨).

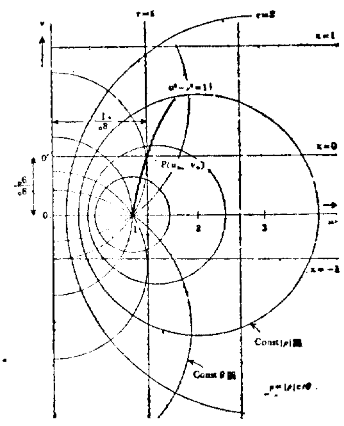

그림 1.

3. 修正된 Smith chart 를 利用하는 方法

Impedance diagram 로서는 Smith chart 가 가장 널리 使用되고 있으므로 다음에는 W-平面을 쓰지 않고 Smith chart 를 修正하여 問題를 解決하는 方法을 생각해 보자. 簡易을 위하여 以下 原來의 Smith chart 를 OSC(Orignal Smith chart), 修正된 smith chart 를 MSC(Modified Smith chart)라 부르기로 하자. 문제는 變換 $W=(z+j\nu)\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$을 考慮에 넣어서 OSC 에서의 const-$\gamma$, const-$x$ 圓들의 label 를 달리하는데 있다. 即 $W=u+iv$, $z=r+jx$라 하면 $u=\frac{r}{\sqrt{1-\nu^2}}$, $v=\frac{x+\nu}{\sqrt{1-\nu^2}}$ 이므로 OSC 에서의 const-r 圓의 label $r=r_1$을 $r=r_1\sqrt{1-\nu^2}$으로 고치고 또 const-x 圓의 label $x=x_1$을 $x=x_1\sqrt{1-\nu^2}-\nu$으로 고치면 MSC 가 얻어진다. 그림 2는 $\nu=0.6$에 대한 MSC 의 代表的인 const-r, const-x 圓들을 나타낸다. 여기서 보다 싶이 MSC 에서는 $x=0$ 圓과 $r=1$ 圓과의 交點 O'는 中心 O와 一致하지 않는다.

이 MSC 를 利用하여 旣知의 z_L로부터 z_{in}을 求하려면

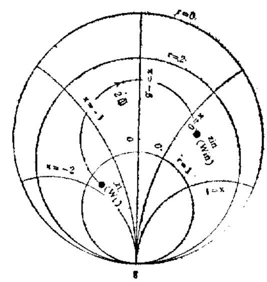

그림 2.

1. MSC 上에 z_L 點을 찍는다(이 點은 OSC 上에서는 W_L에 對應한다).
2. 이 點을 中心 O 周圍에 時計方向으로 角度 $2\bar{\beta}l$만큼 回轉시킨다.
3. 그 終點 z_{in}(OSC 上에서는 W_{in}에 對應)을 MSC 上에서 읽는다. 이것이 곧 規準化된 人力 Impedance 의 値를 준다.

const-r, const-x 圓의 label 를 고치는 計算過程이 煩雜하므로 다음에는 이것을 圖式으로 求하는 方法을 생각해 보자. 위선 OSC 上에서의 constant $r=r_1$ 圓을 생각해 보자. 이 圓의 中心 C는 $\left(\frac{r_1}{1+r_1},\ 0\right)$에 있고 그 半經은 $\frac{1}{1+r_1}$ 이다. 그림 3에서 FC와 ED와의 延長의 交點을 H라 하면 $\overline{DH}=2r_1$이다. (證明 : $\overline{KG}=2\overline{AC}=\frac{2}{1+r_1}$이므로 $\overline{DK}=2-\frac{2}{1+r_1}=\frac{2r_1}{1+r_1}$. 그런

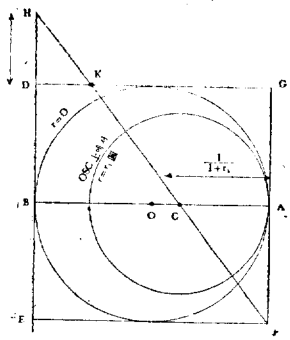

그림 3.

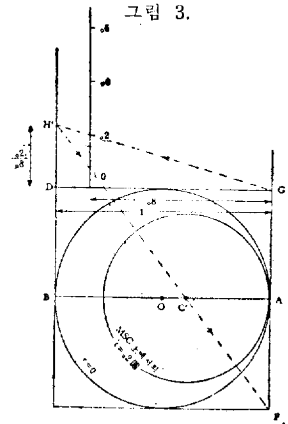

그림 4.

데 $\overline{DK}/\overline{EF}=\overline{DH}/\overline{HE}$ 또는 $\dfrac{2r_1}{1+r_1}:2=\overline{DH}:(\overline{DH}+2)$ 따라서 $\overline{DH}=2r_1$). MSC 에서는 $\overline{DH}$의 尺度가 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$ 倍가 되므로 그림 4에 表示한 바와 같은 節次를 밟아서 MSC 에서의 const-r 圓을 얻을 수 있다(이 그림은 $\nu=0.6$에 對한 것).

다음에 OSC 上에서의 constant $x=x_1$ 圓을 생각해 보자. 이 圓의 中心 c''는 $\left(1,\ \dfrac{1}{x_1}\right)$에 있고 그 半經

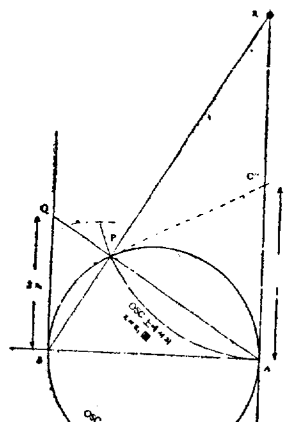

그림 5.

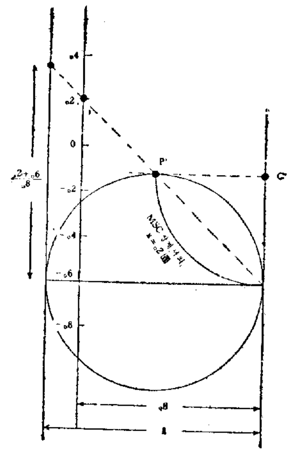

그림 6.

은 $\dfrac{1}{x_1}$이다(그림 5 參照). 지금 $x=x_1$ 圓과 $r=0$ 圓과의 交點을 P, 또 直線 AQ와 BS와의 延長의 交點을 Q라 하면 $\overline{BQ}=2x_1$이다(證明 : $\overline{BQ}:\overline{AB}=\overline{AB}:\overline{AR}$ 이므로 $\overline{BQ}=2\times2/2\times\dfrac{1}{r_1}=2r_1$). MSC 上에서 $\overline{BQ}$의 尺度는 ν만큼 偏移된 다음 $\dfrac{1}{\sqrt{1-\nu^2}}$ 倍로 擴大된다. 따라서 그림 6에 表示한 바와 같은 節次를 밟아서 MSC 上에서의 const-x 圓을얻을 수 있다(이 그림은 $\nu=0.6$에 대한 것).

Ⅳ. 指數線路의 等價回路

式(23)을 觀察하면 z_{in}이 容量器, 理想變成器, 負荷 Impedance W_L로서 終端된 均一線路에 의하여 表現될 수 있음을 알 수 있다. 또 이 W_L는 式(21)로부터 z_L로 終端된 理想變成器와 誘導器로서 表現될 수 있음을 알 수 있다. 따라서 指數線路의 等價回路를 그림 7 (a)와 같이 表示할 수 있다. 여기서 均一線路는 特性 Impedance가 1이고 傳播定數가 β이고 길이는 實際의 指數線路의 길이 l와 같다. 實際로는 遮斷周波數 以上이 考慮의 對象이 되므로 $\nu<1$이고 따라서 變成器의 捲線比는 實數다. 均一線路의 部分은 다시 等價 T回路로 表現할 수 있으므로 그림 7 (b)을 얻는다. 여기서 다시 두 變成器內側에 있는 T回路要素와 誘導 Reactance를 n^2倍 해줌으로써 結局 指數線路에 對한 集中定數 T型等價回路〔그림 7 (c)〕의 要素는 다음과 같은 値를 갖는다.

$$z_1=j\left(\sqrt{1-\nu^2}\tan\frac{\bar{\beta}l}{2}-\nu\right)$$

$$z_L=j\left[\sqrt{1-\nu^2}\tan\frac{\bar{\beta}l}{2}+z\right]$$

$$z_3=-j\sqrt{1-\nu^2}\csc\bar{\beta}l$$

또 $Y-\Delta$ 變換에 의하여 π型等價回路를 求하면 그림 7 (d)에서 各要素의 값은 다음과 같다.

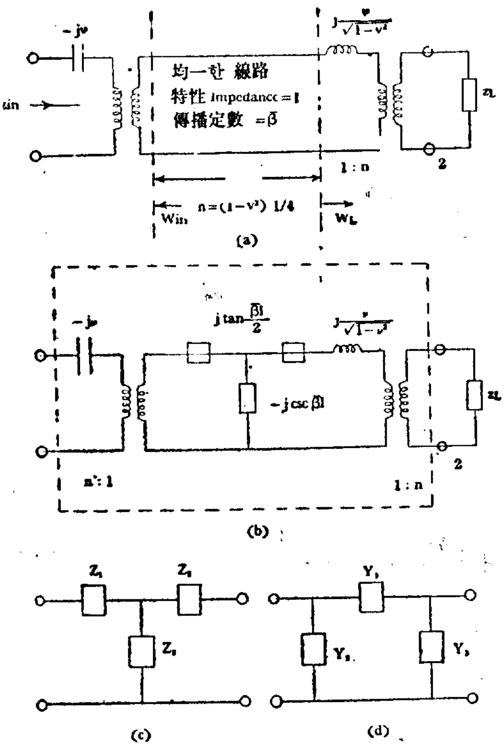

그림 7. (a), (b), (c) (d)

$$Y_1=-j\sqrt{1-\nu^2}/\csc\bar{\beta}l$$

$$Y_2=-j\left[\sqrt{1-\nu^2}\tan\frac{\bar{\beta}l}{2}+\nu\right]\sin^2\bar{\beta}l$$

$$Y_3=j\left[\sqrt{1-\nu^2}\tan\frac{\bar{\beta}l}{2}-\nu\right]\sin^2\bar{\beta}l$$

V. 結　語

指數線路의 設計에 있어서 때로는 Impedance 函數 代身에 反射係數를 다루는 경우가 있다. 多幸이 後者의 表示式이 前者와 類似함으로(附錄參照) 以上의 圖式解法은 反射係數의 경우에도 適用될 수 있다. 그러나 Impedance 函數와 反射係數間의 關係는 Smith chart 로서 容易하게 求해지므로 따로히 反射係數專用의 diagram 을 만들 必要는 없을 것이다. 이러한 理由로 세가지 圖式解法中 修正된 Smith chart 가 가장 便利하고 넓은 利用度를 가질 것은 틀림 없다.

〔附錄〕 指數線路의 反射係數

反射係數와 Impedance 函數와의 關係式 $\rho=\dfrac{z-1}{z+1}$ 을 y 에 관하여 微分한 다음 $\dfrac{dz}{dy}$ 에 式(7)을 代入하면 ρ 에 關한 微分方程式이 얻어진다. 卽

$$\frac{d\rho}{dy}=(1-\rho^2)\frac{\alpha}{2}-2\gamma\rho$$

이것은 式(7)과 同一한 形式을 갖고 있다. 따라서 그 解도 同一한 形式을 取한다. 無損失線路에 對하여 實際로 그 解를 求해 보면 一次變換

$$\Gamma=\left(\rho+\frac{j}{\nu}\right)\frac{\nu}{j\sqrt{1-\nu^2}}$$

$$\Gamma_L=\left(\rho_L+\frac{j}{\nu}\right)\frac{\nu}{j\sqrt{1-\nu^2}}$$

에 의하여

$$\Gamma_{in}=\frac{\Gamma_L+j\tan\bar{\beta}l}{1+j\Gamma_L\tan\bar{\beta}l}$$

와 같이 된다. 이 諸式들은 式(20)—(22)에 對應하며 相互 類似한 形式을 갖고 있음을 알 수 있다.

(西紀 1962年 7月 21日 接受)

參考文獻

(1) Burrow, "Exponential Transmission Lines," Bell System Technical Journal, P. 555; Oct. 1938.

(2) Gruner, "Synthesis of Non-uniform Transmission Lines and Ricatti's differential equation," Proc. of IRE, P. 224; Feb. 1962.