

의 自動振動에 關하여

朴 晸 鎬

[1] 緒 言

Relay Servo 制御系의 특이한 성질의 하나로, 다른 非線型系에서도 그렇지만 외부의 동작에 의한 것이 아니고, 制御系 自體내의 조건에서 계속적으로 周期的運動, 즉 自動周期振動(Sustained Oscillation)이 발생 하는 경우가 있다.

制御系가 自動振動의 상태에 있을 때 그 振幅 및 角周波數는 각 부분의 要素에 의하여 결정되고 固有한 값을 가지게 된다. 이러한 상태는 線型制御系의 입장에서 보려는 不安定狀態이나, Relay 制御系에서는 이 周期振動이 制御量의 一定目標値에 대한 比率이 미리 규정되는 요구조건에 비하여 실제상 허용할 수 있는 정도면 制御系는 安定하다고 할 수 있다. Relay Servo 系의 安定, 不安定은 Describing 函數의 方法에 의하여 Nyquist, Attenuation-phase Margin Criteria 를 사용하여 Kochenburger, Johnson⁽¹⁾의 연구에서 규정되었다.

Relay-Servo 自動振動상태는 制御系의 Gain 定數 중에서도 그 종류에 따라 角周波數 및 振幅에 미치는 영향이 달라진다. 本文은 위에 설명한 상태를 알아내기 위하여 간단한 Relay 位置制御系를 구성하고 Gain 定數를 변화시키면서 自動振動의 角周波數 및 振幅의 변화를 計算하고 記錄計의 測定値와 比較검토하고자 한다.

[2] 實驗에 使用한 Relay-Servo Control System

그림 1에서 D-C Servo-motor, 制御用 Relay(有極性) 및 Potention meter 는 이 制御系를 구성시키고 있다. 非線型 Contactor 를 가진 制御用 Relay 는 Error sensing 으로 동작하게 되어 있고 Error signal 電壓으로 勵磁된다. Potention meter 는 Relay 의 電壓을 入力軸과 出力軸의 回轉位置差에 비례하도록 Bridge 回路를 만들었다. 따라서 有極性 Relay 에 의하여 入力 θ_i 와 出力 θ_o 의 차이를 零으로 만드는 位置

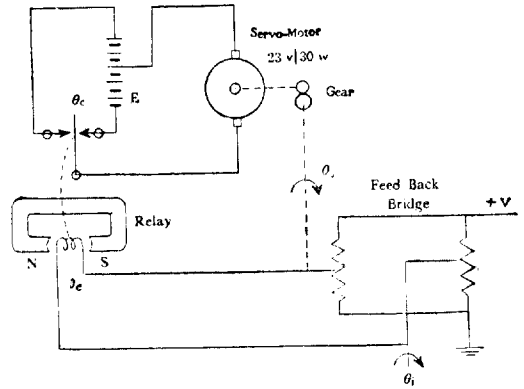


그림 1. Relay 位置制御回路

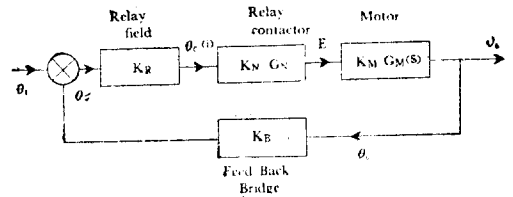


그림 2. 그림 1의 Block Diagram

制御系가 된다. 이 制御系의 Block 線圖는 그림 2와 같이 표시된다.

지금 고찰을 간단히 하기 위하여 각 要素의 傳達函數를 먼저 취급하여 보자. 여기에서

K_R = Relay 의 Gain 定數

G_M = 電動機의 傳達函數

K_M = 電動機의 Gain 定數

τ_M = 電動機의 時定數.

K_B = Feed Back Bridge 의 Gain 定數

V = Bridge 의 電壓

Δd = Relay 의 Dead-zone

i_f = Relay field 電電

w = 角周波數

E = 電動機의 供給電壓

θ_e = Error signal 電壓

$e = E$ 의 基本正弦波電壓

θ_e = Relay contactor의 角度
(Relay field 電流에 의한)

라고 하며는

Relay 傳達函數; Relay를 Field 回路와 Contactor 回路로 구분하고, 그 이외의 부분은 생략하기로 하자.

(a) Field 回路의 傳達函數는 線型要素이고

$$\frac{\theta_c}{\theta_e}(s) = K_R G_R$$

로 표시된다. 지금 $\theta_e = K_f i_f$ 로 된다고 하면 K_f 는 比例係數가 된다. Field 回路에서

$$\theta_e = R_f I_f(s) + s L_f I_f(s)$$

가 되고 여기서 R_f, L_f 는 이 回路의 定數이다. 따라서 Field 回路의 傳達函數는

$$\frac{\theta_c}{\theta_e}(s) = \frac{K_f}{R_f(1+s\tau_f)}$$

이 되고 측정 결과에서 Relay의 時定數 τ_f 는 생략할 수 있을 정도로 적다. 그러므로 여기서

$$\frac{\theta_c}{\theta_e}(s) = K_R = \frac{K_f}{R_f}$$

로 사용하여도 별 지장이 없다.

(b) Contactor 回路의 傳達函數⁽²⁾는 Dead-zone 과 Hysteresis를 가지는 非線型要素이고, Describing 函數法을 적용시키기 위하여 等價傳達函數로 표시하는 것이 편리하다. 지금

$$\frac{e}{\theta_c} = K_N G_N$$

는 Relay contactor의 傳達函數이고, 이것은 角周波數와는 관계없고 等價傳達函數를 $N(\gamma)$ 라고 하면, 이것을

$$(\Delta d K_N G_N) = N(\gamma) \dots\dots\dots(1)$$

로 표시하자. 이 때의 Relay contactor의 入力量 γ 는 $\gamma = \frac{i_{max}}{\Delta d}$ 로 한 것이고 i_{max} 는 $i = K_f i_f$ 의 最大値이다.

Feed Back 定數; Potention meter의 回轉最大角을 2π 로 하며는 定數 K_B 는

$$K_B = \frac{V}{2\pi} = 0.16 V$$

이 성립된다.

電動機의 傳達函數⁽⁴⁾; Relay의 容量을 생각하여, 적은 D-C Servo-motor를 사용하였고 Gear 換算係數까지 포함시켜서

$$\frac{\theta_o}{e} = K_M G_M = \frac{K_M}{s(s\tau_M+1)}$$

로 표시하였다.

위에서의 각각의 傳達函數에 의한 閉回路의 全體傳達函數 $K_a G_a$ 는

$$K_a G_a = K_B K_R \frac{1}{\Delta d} N(\gamma) \frac{K_M}{s(s\tau_M+1)} \dots\dots\dots(2)$$

로 표시된다.

[3] Describing 函數法에 의한 自勵振動의 조건

Describing 函數의 이론은 두 가지 가정하에서 성립된다. 그 하나는 Relay에 주는 Control signal γ 는 正弦波가 되어야 하고, 또 하나의 가정은 Contactor의 Response는 周期的이 되어야 한다. 즉 全制御系를 생각하는데 Fourier 級數의 基本正弦波로 대표한다는 것이다. 한 개의 非線型要素에서 나오는 signal의 高調波含有量은 制御回路, 특히 電動機를 통하여 回路를 1周한 후에는 대단히 적어지고 전체적으로 基本波에 대한 값만을 사용하여도 별 차이가 없다. 그러므로 非線型要素의 等價傳達函數는 그 回路의 線型要素와 함께 보통의 線型系의 制御回路와 동일하게 취급할 수 있다⁽³⁾.

한 개의 非線型要素로서 Contactor를 포함하는 Servo-System는 그림 1에 표시하였다. 이것의 傳達特性은 그림 2에서 다음과 같다.

$$\frac{\theta_o}{\theta_i} = \frac{K_R \cdot K_N G_N(\gamma) \cdot K_M G_M(s)}{1 + K_B \cdot K_R \cdot K_N G_N(\gamma) \cdot K_M G_M(s)} \dots\dots(3)$$

이 制御系가 다음 식을 만족할적에 自勵振動이 일어날 것이다. 즉

$$1 + K_B \cdot K_R \cdot K_N G_N(\gamma) \cdot K_M G_M(j\omega) = 0$$

혹은

$$-K_B K_R \cdot K_N G_N(\gamma) K_M = G_M^{-1}(j\omega) \dots\dots\dots(4)$$

식 4는 Inverse Frequency locus $G_M^{-1}(j\omega)$ 와 $-K_B K_R K_M K_N G_N(\gamma)$ 의 Amplitude locus의 교점을 만족하는 周期振動이 閉回路내에 일어나는 것을 의미한다.

[4] 圖示法에 의한 定數와 周期振動의 관계

制御系의 定數의 변화에도 自勵振動의 상태가 달라지므로 定數중에서 간단히 조절할 수 있는 Gain 定數를 변형시킬 경우의 自勵振動의 상태 즉 角周波數 및 振幅을 圖示方法으로 조사하여 보자. 식 1과 식 4에서

$$-K_B K_R \frac{1}{\Delta d} N(\gamma) \cdot K_M = j\omega(j\omega\tau_M+1) \dots\dots(5)$$

여기에서 振動波形은 正弦波이고, $\theta_o = \theta_{max} \sin \omega t$ 이다. 식 5는 앞에서 설명한 바와 같이 周期振動의 조건이므로 右側의 複素量이 左側에 부합되기 위하여서는 식 5를

$$-K_B \cdot K_R \cdot \frac{1}{\Delta d} \cdot K_M [K_B G_B(\gamma) + j K_A G_A(\gamma)] = j\omega(j\omega\tau_M+1) \dots\dots\dots(6)$$

의 식으로 쓸 수 있다. 여기서

$$N(\gamma) = K_B G_B(\gamma) + j K_A G_A(\gamma) \dots\dots\dots(7)$$

이 되고, 이 식은 부록 I의 조건에서

$$K_A G_A(\gamma) = \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{i_{max}} \left[\sin \sin^{-1} \left(\frac{\Delta d - \Delta h}{2i_{max}} \right) - \sin \sin^{-1} \left(\frac{\Delta d + \Delta h}{2i_{max}} \right) \right]$$

$$K_B G_B(\gamma) = \frac{E}{\pi} \cdot \frac{1}{i_{max}} \left[\cos \sin^{-1} \left(\frac{\Delta d - \Delta h}{2i_{max}} \right) + \cos \sin^{-1} \left(\frac{\Delta d + \Delta h}{2i_{max}} \right) \right] \dots\dots(9)$$

로 표시되고 $K_A = K_B = \frac{2E}{\pi}$ 가 된다.

이러한 조건하에서 그림 2의 Block 線圖를 다시 그리면 그림 3과 같이 된다.

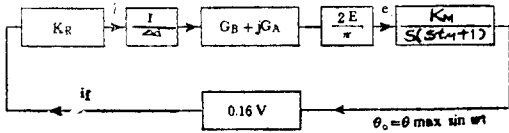


그림 3. 그림 2의 Block 線圖

그림 3의 Relay contactor點과 出力點에서 Gain 定數를 두 부분으로 구분하여

$$\left. \begin{aligned} K_\gamma &= 0.1V \cdot K_R \cdot \frac{1}{\Delta d} \\ K_\theta &= \frac{2E}{\pi} \cdot K_M \end{aligned} \right\} \dots\dots(10)$$

로 표시하며는

$$-K_\gamma K_\theta [G_B(\gamma) + jG_A(\gamma)] = jw(jw\tau_M + 1) \dots(11)$$

이 된다. 식 11의 複素式을 實數部와 虛數部로 정리하면

$$w^2\tau_M = K_\gamma K_\theta G_B(\gamma) \dots\dots(12)$$

$$w = -K_\gamma K_\theta G_A(\gamma) \dots\dots(13)$$

$$w\tau_M = -G_B/G_A \dots\dots(14)$$

로 표시되고, Relay의 Contactor에 들어가는 入力量을 Block線圖에서 다음과 같이 표시할 수도 있다.

$$\gamma = K_\gamma \theta_{max} \dots\dots(15)$$

그리고 振動最大角은 $\theta_{osc} = 2\theta_{max}$ 이 될 것이다. 이 制御系에서 τ_M 가 測定되면 w 의 값에 따라 식 12, 식 14의 우측은 결정된다. 따라서 w 에 대한 G_B/G_A , $K_\gamma K_\theta G_B$ 의 값이 정하여 진다.(그림 4)

또 한편 Relay의 Contactor의 $\gamma = \frac{i_{max}}{\Delta d}$ 의 函數에서 본 等價傳達函數는 식 8, 식 9에서 표시되었기 때문에 이때에 G_B/G_A 가 결정되고(부록 1), $\gamma = \frac{i_{max}}{\Delta d}$ ($= K_\gamma \theta_{max}$)의 函數로 표시되는 이 식을 數值代入하면, 그림 5가 된다. 그림 4, 그림 5의 두 그림에서 동일한 G_B/G_A 에 의하여 w , γ , $K_\gamma K_\theta$, θ_{max} 의 값이 구해진다. 즉 w 와 θ_{osc} 의 관계를 알아낼수가 있다.

[5] 計算値와 實驗測定値

a) 方法:

그림 3의 定數의 測定결과를 표시하면 그림 4과 같다.

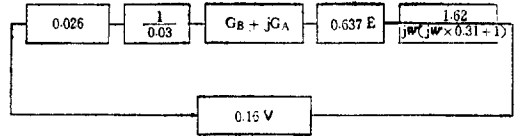


그림 4. 數値를 대입한 Block-線圖

圖示法에 의한 周期振動의 周波數 및 振幅의 값을 記號計(San Born)으로 測定한 값과 比較검토하기로 하자.

그림 1의 制御系에서 K_γ 의 조정은 V 로, K_θ 의 조정은 E 로 하며는, 앞에서 설명한 형상을 충분히 나타낼 수가 있는 동시에 제일 간단한 방법이 되겠다. 식 8, 식 9에서 $\Delta d/\Delta h = 0.35$ 일때의 G_B , G_B/G_A 를 그림 5에 표시한 것이고, 그림 4는 $\tau_M = 0.31$ 일때의 $K_\gamma K_\theta G_B$, G_B/G_A 를 표시한 것이다. 지금 예를 들어 自動振動의 角周波數가 15.7 일 때 그림 4에서 $K_\gamma K_\theta G_B$ 는 74.5, G_B/G_A 는 4.4, 다음에 그림 5에서 $G_B/G_A = 4.4$ 일 때 $K_\gamma \theta_{max}$ 는 0.95, G_B 는 1.22, 따라서 이때의 V 는 19 volt, E 는 23 volt가 된다. 이와같은 방법으로 이 制御系의 自動振動의 角周波數와 振幅의 관계를 그림 6과 그림 7에 표시하였다. 그림 6은 $E = 23$ volt로 固定하여 놓고 K_γ 즉 V 를 변형시킬때의 위의 관계이고, 그림 7은 $V = 19$ volt로 하고 E 를 변화시킨 경우이다.

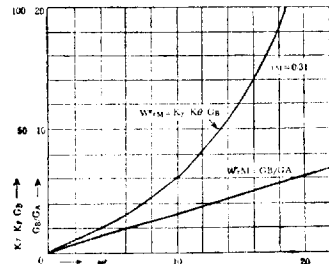


그림 4. 角周波數變化에 대한 G_B/G_A , $K_\gamma K_\theta G_B$ 의 값

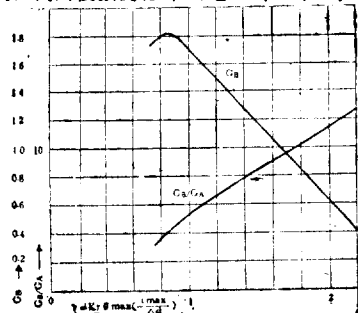


그림 5. 入力 γ 의 변화에 따르는 G_B/G_A , G_A 의 값

Recorder의 測定値는 出力인 Gear 軸에서의 回轉角에 비례하는 電壓을 Recorder의 入力로 취하고 測定한 結果를 부록 Ⅱ에 표시하는 동시에 그림 6과 그림 7에서 비교하였다.

B) 測定値와의 比較:

傳達函數의 測定에서의 誤差와 Relay field의 傳達函數의 생략에서 약간의 差異點이 생기나 대체로 일치하는 방향에 있다.

i) K_r 를 대표하는 V 의 증가는 그림 6에서 角周波數의 증가와 振幅의 대폭적인 감소를 이르고, 測定과

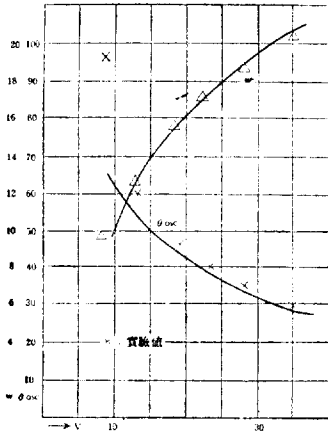


그림 6. $E=23$ volt로 一定 이하고 $V(K_r)$ 를 변화시킬때의 w, θ_{osc} 의 값

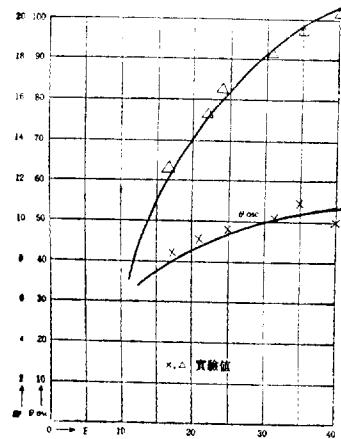


그림 7. $V=19$ volt로 一定 이하고 $E(K_0)$ 를 변화시킬때의 w, θ_{osc} 의 값

計算値는 낮은 角周波數 범위를 제외하고는 거의 일치된다. 낮은 角周波數에서의 이러한 數値의 차이는 振幅이 커지고 不安定 때문에 이다. 즉 $E=23$ volt, $V=10$ volt, $w=9.42$ 에서는 自動振動이 不安定하고 이하에서는 振動이 중지된다. 이것은 Relay의 cut-off, 즉 Describing 函數가 존재하지 않은 범위고, 그림

10·a는 波形이 不安定한 것을 나타내고 있다.

ii) K_r 의 일정한 값에서의 K_0 , 즉 E 의 변화에 따른 計算値와 測定値간에는 그림 7에서 보는바와 같이 $E=35$ 이상에서 振幅에 대한 차가 생긴다. 이러한 차이는 Relay contactor의 電壓이 증가하면 Contactor 부분에 Electro-Static와 Arcking 作用⁽²⁾에 의하여 Relay의 Describing 函數가 전에 산출한 것과 달라진다.

iii) E 의 증가는 角周波數를 증가시키고, 振幅에는 그리 영향이 없으나, 그림에서 보는 바와 같이 角周波數의 증가에 따라 오히려 振幅은 약간 증가 한다. 이것은 i)의 特性和 判異하게 틀리는 점이다.

[6] 結 論

定數의 변화에 대한 自動振動의 角周波數와 振幅의 증감은 Describing 函數法을 사용한 이 圖示法에 의하여 간단이 조사할 수 있다. 이 방법에 의한 결과, Relay Servo-System에서 Gain 定數의 종류는 特性에 의하여 두 부분으로 나누어 지고, 그 하나는 振動振幅의 增幅에 관계되고, 나머지 하나는 應答速度에 영향을 준다는 것을 알 수 있다.

應答速度를 좋게 할려면 일반적으로 Relay에서는 自動振動이 일어나고, 振動이 시작되는 조건의 부분에서는 振幅이 크므로 (그림 10·a) 이러한 상태를 피하려면 振幅에 그렇게 영향이 없는 K_0 를 적당히 조절하면 되고, 따라서 應答速度를 좋게할 수 있다. 또 Relay Servo-System에서 일부터 角周波數를 올려 外圍의 영향을 막을 경우에는 K_r 를 증가시키면 이 조건에 부합된다.

Relay System의 設計, 혹은 改良에 앞서 이러한 Gain 定數의 特性을 이 방법에 의하여 고려하여야는 참고가 되지 않을까 생각 된다.

[부록 I] Relay Contactor 傳達函數

Hysteresis와 Dead-zone을 가지고 있는 Relay의 Cut-off 特性은 그림 8과 같고 i 에 의하여 動作하는 법

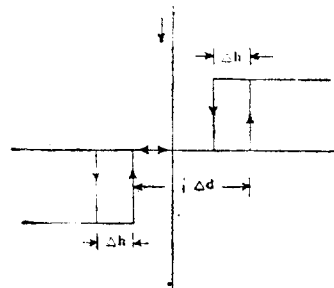


그림 8 Relay 特性

위는 그림 9·a의 斜影 부분이고, 이 때는 Contactor는 close 되어 그림 9·b와 같은 出力電壓 E를 電動機에 공급한다. 물론 여기에서 $i=i_{max} \sin wt$ 로 한다. 이때 出力電壓의 Fourier級數는

$$E = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos wt + b_1 \sin wt + a_2 \cos 2wt + b_2 \sin 2wt + \dots + a_n \cos nwt + b_n \sin nwt \dots (16)$$

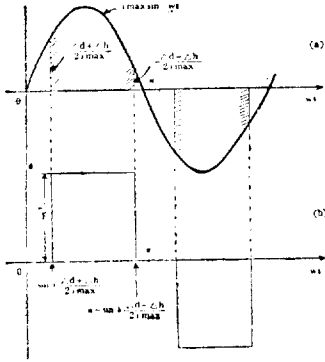


그림 9 Relay에 의한 波形

여기서

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E \cos nwt \, d(wt) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \\ b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi E \sin nwt \, d(wt) \quad (n=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} (17)$$

그림 9·b에서

$$\sin^{-1} \left(\frac{\Delta d + \Delta h}{2 i_{max}} \right) \leq wt \leq \pi - \left(\frac{\Delta d - \Delta h}{2 i_{max}} \right)$$

이 되고 Describing 函數法는 基本波를 제외한 모든 高調波는 생략한다는 가정 하에서 식 17는

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_{\sin^{-1} \frac{\Delta d - \Delta h}{2 i_{max}}}^{\pi - \sin^{-1} \frac{\Delta d + \Delta h}{2 i_{max}}} E \cdot \cos wt \cdot d(wt) \\ &= \frac{2E}{\pi} \left[\sin \sin^{-1} \frac{\Delta d - \Delta h}{2 i_{max}} - \sin \sin^{-1} \frac{\Delta d + \Delta h}{2 i_{max}} \right] \dots (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_{\sin^{-1} \frac{\Delta d - \Delta h}{2 i_{max}}}^{\pi - \sin^{-1} \frac{\Delta d + \Delta h}{2 i_{max}}} E \cdot \sin wt \cdot d(wt) \\ &= \frac{2E}{\pi} \left[\cos \sin^{-1} \frac{\Delta d - \Delta h}{2 i_{max}} + \cos \sin^{-1} \frac{\Delta d + \Delta h}{2 i_{max}} \right] \dots (19) \end{aligned}$$

基本波 e는

$$e = b_1 \sin wt + a_1 \cos wt$$

이고 동시에 이것이 Relay의 出力이 된다.

지금 Relay의 入力, 出力을 Laplace-transformation하면 다음과 같다.

$$I(s) = L \left[\frac{i_{max}}{\Delta d} \sin wt \right] = \frac{i_{max}}{\Delta d} \frac{w}{w^2 + s^2}$$

$$e(s) = L[b_1 \sin wt + a_1 \cos wt] = \frac{b_1 w}{w^2 + s^2} + \frac{a_1 s}{w^2 + s^2}$$

따라서 Relay의 Transfer-function은

$$N = \frac{e}{I}(s) = \frac{1}{w \cdot \frac{i_{max}}{\Delta d}} (wb_1 + sa_1) \dots (21)$$

지금 振動狀態이므로 $s=jw$ 를 위의 식에 대입하면

$$N = \frac{b_1}{\frac{i_{max}}{\Delta d}} + j \frac{a_1}{\frac{i_{max}}{\Delta d}} \dots (22)$$

이 되고

$$K_B G_B = \frac{b_1}{\frac{i_{max}}{\Delta d}}, \quad K_A G_A = \frac{a_1}{\frac{i_{max}}{\Delta d}}$$

$$\text{혹은} \quad N = K_B G_B + j K_A G_A \dots (23)$$

로 표시되고 N는 角周波數에 관계 없다.

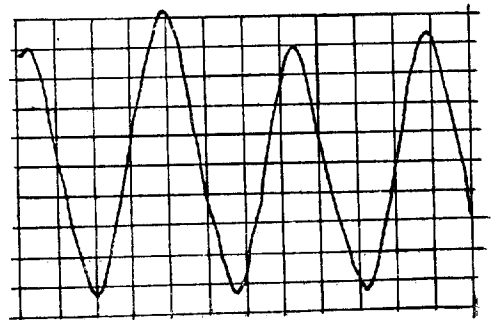
實驗에서 사용한 Relay는 $\Delta h / \Delta d = 0.35$ 이고, 이때의 $G_A, G_B, G_B / G_A$ 의 값을 $\Delta d / i_{max}$ 의 函數로 數值計算하면 표 1과 같이 된다.

$\Delta d / i_{max}$	$i_{max} / \Delta d$	G_A	G_B	G_B / G_A
0	—	0	0	—
0.2	5.0	-0.014	0	28.40
0.4	2.5	-0.056	0.780	13.80
0.6	1.66	-0.121	1.134	9.35
0.8	1.25	-0.213	1.448	6.80
1.0	1.00	-0.305	1.680	5.50
1.2	0.83	-0.504	1.800	3.57
1.4	0.71	-0.686	1.695	2.47

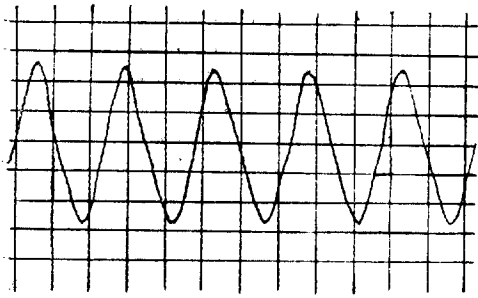
표 1 Relay Contactor의 等價傳達函數值

〔부록 II〕 實驗測定值

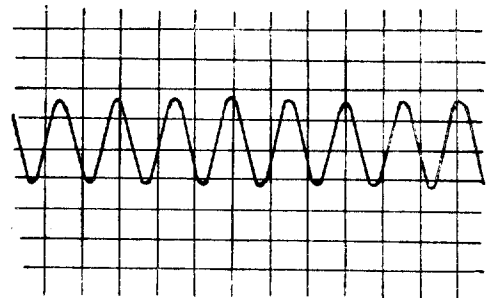
Recorder에 의한 周期振動波形과 周波數 및 振幅 θ_{osc} 를 $V=19$ volt로 일정하게 하고 E를 조정 할때를 그림 10의 a-f까지 표시하고, $E=23$ volt로 일정하게 하고 V를 조정 시킬 때의 값을 그림 11의 a-g까지 표시 하였다. 또 그림 12은 Caibration factor이고, 上下간의 거리는 角 90度로 표시 된다.



a. $E=23(V), V=10(V)$

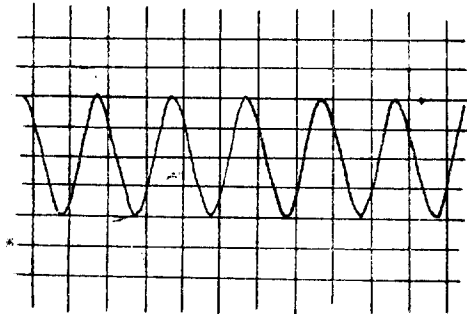


b. $E=23(V)$, $V=13(V)$

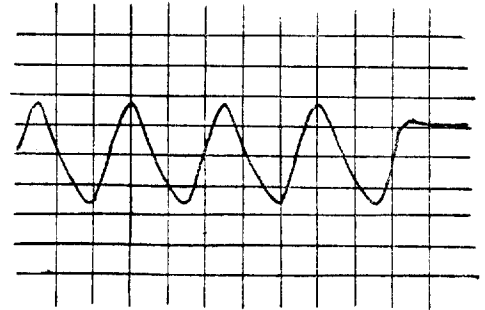


f. $E=23(V)$, $V=35(V)$

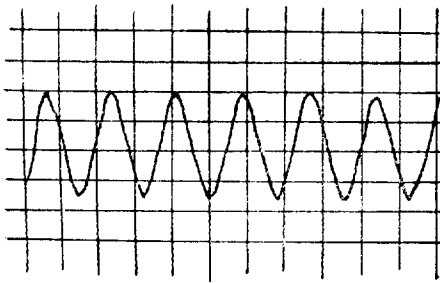
그림 10. V 즉 K_T 를 변화 시킬 때의 측정치



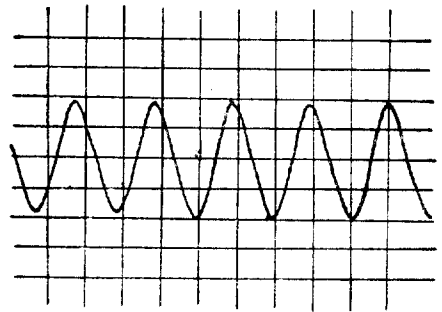
c. $E=23(V)$, $V=19(V)$



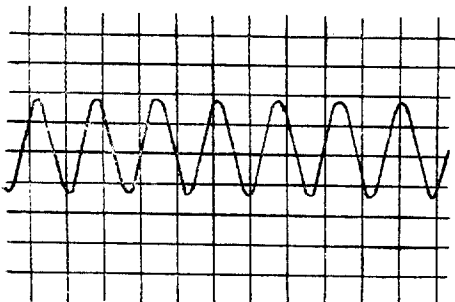
a. $V=19(V)$, $E=17.5(V)$



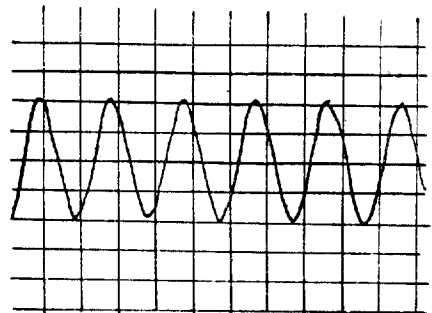
d. $E=23(V)$, $V=23(V)$



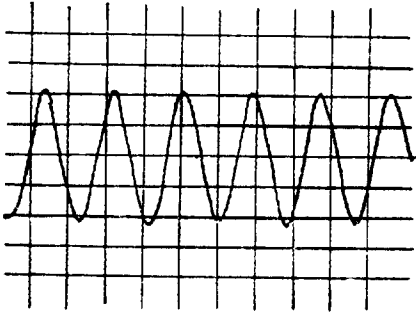
b. $V=19(V)$, $E=21.5(V)$



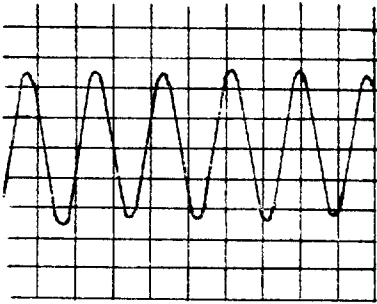
e. $E=23(V)$, $V=28(V)$



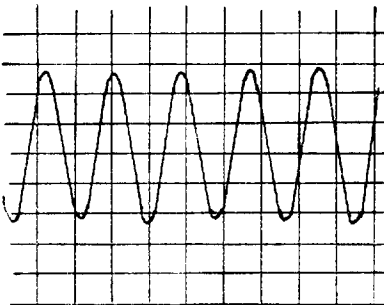
c. $V=19(V)$, $E=24(V)$



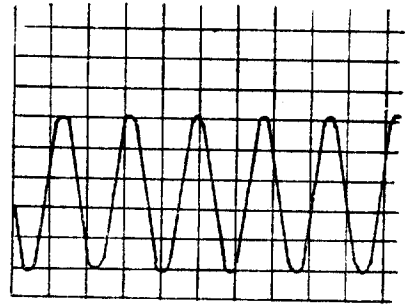
d. $V=19(V)$, $E=31(V)$



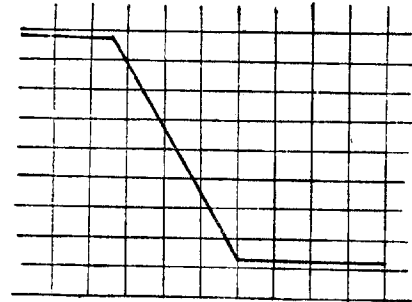
e. $V=19(V)$, $E=35(V)$



f. $V=19(V)$, $E=40(V)$



g. $V=19(V)$, $E=45(V)$



Calibration factor

그림 11 E 축 K_0 를 변화 시킬 때의 측정치

(西紀 1962年 7月 14日 接受)

文 獻

- (1) A Frequency Response Method for Analysing and Synthesizing Contactor Servomechanisms, R. J. Kochenburger. AIEE Transactions, Vol.69 Pt. I, 1950, pp 270-84
- (2) Design of a Contactor Servo Using Describing Function Theory, Stanley K. Chao. AIEE Transactions, Vol. 75, Pt. II, 1956, pp. 223-231
- (3) Servomechanisms and Regulating System Design (book), Chestnut. Mayer. John Wiley & Sons, Inc., New York
- (4) Transfer Function and Parameter Evaluation for D-C servomotors, G.J. Thaler & W.A. Stein. AIEE Transactions. Vol 74, pt. II, 1955, pp. 410-17