電氣回路의 新解法

金 俊 植

回路中에 흐르는 電氣現象을 가지고 数式을 만들어놓고, 그数式을 解析하야 電氣的意味의解答을 얻는것이 우리의 電氣回路의 解析의 目的인것이다. 그런데 電氣回路에는 定常状態와 過渡現象이 들어있다. 이定常状態는 交流理論法에依하야 풀고 過渡現象은 그回路의 電氣現象을 表現하는 微分方程式을 풀어서 그解答을 얻으라는것이 以前에使用되던 方法이였다. 이電氣回路解析에 있어서의 困難이란 主로 그回路에 들어있는 微分方程式을 解析하는데 있는것이다. 即 이런 微分方程式을 定常的手段에依하야 解析한다는것은 極히 局限된 範圍内에서만 可能하기때문이다.

그리하야 最近에는 여러가지 方法이 案出되여서 過去에는 거이 不可能하던 問題도 快刀乱麻의 格으로 解析하야 버릴 수 있게 되였다.

그新方法等에依하야 電氣回路를 精確히解析함으로서 電氣工業에 寄與되는바는 多大하다고 보지않을 수 없다. 電氣 工作物施設을 保護維持함에도 그러하거니와 電氣機器製作方面에서는 더욱 그러하다고 볼 수 있다. 一例를 들면 美國 General Electrical 會社의 最近発表에依하면 大容量의것은 除外하고라도 于先 30 KW 以下의 것에서 보더라도 그容積이 40% 重量이 34%程度各々減少되였다는데 그重要原因의 하나는 Analog計算機가 생겼기때문이라고 한다. 이는 다시 말하면 電氣機器의 電氣回路를 以前보다 精確하게 解析할수 있기때문이라는것이다. 最近에発展된 解析法中에는 Laplace 変換 Fourier 変換等을 利用하는法이 重要한것인데 이에兼하야 新定理等

을利用하면 그便利함이 더욱 클 것이다. 이新定理中에는 煩複 임팔스의持性, Strecker 의法, 回路動作函數法, 漸近級數法, Wiener 理論, Shannon定理等여러가지가 있다. 이 Laplace 変換에依한 Operator 使用法만 잘 習得하고있어도 多大數의 電氣回路 問題를 푸는데 큰 武器가 될 것이다.

이에 機會가 닿는대로 主로 Laplace 変換과 그應用例를 簡單히 說明하고 그다음에 Fowrier 変換에對하여서 說明할수있었으면 하고있다. 于先 Laplace 変換法에 들어가기前에 回路의 直線性의 特徵에關하여 說明하는것이 順序라고본다. 電氣回路의 直線性이란 것이 交流理論의 基本的要素이기 때문이다.

이제 어느回路에서 다음 같은 方程式이成立된다고 하자:

$$(a_m D^m + a_{m-1} D^{m-1} + \cdots a_0)\ell_1 = (b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \cdots b_0)\ell_2 = F(t) \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

但 $D^n = \frac{d^n}{dt^n}$ $D^n \ell_2 = \frac{d^n \ell_2}{dt^n}$

이方程式 左便 $\ell_1 = f_1(t)$ 일때

$$F(t) = F_1(t)$$

$\ell_2 = f_2(t)$ 일때

$$F(t) = F_a(t)$$

라고하면

$\ell_2 = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ 時는 $F(t) = a_1 F_1(t) + a_2 F_2(t)$ $\cdots\cdots\cdots$ (a)

또 $\ell_1 = f_1(t+t)$ 라하면

$$F(t) = F_1(t+t) \quad \cdots\cdots\cdots (b)$$

이 (a), (b) 두條件이 成立되는 電氣回路를 直線性 回路라고한다 實例를 들어 말하면 傳送回路(送電線, 通信線路)는 直線性을 가졌기 때문에 搬送波를 利用할 수 있는것이다.

抵抗 R, Inductance L, Capacitance C 를가진 이런 回路에 電圧 E를 印課하면 電流方程式은:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = E \quad \cdots\cdots (2)$$

E가 直流일 境遇는 比較的簡單하나 交流인 境遇에는 難々한 運算을 거치지 아느면 이微分方程式의解, 卽 電流 i는 잘나오지 안는다. 交流의 基本形은 Cosine 形, 或은, Sine 形으로 表現하는.

바 cos, sin 어느것을使用하던間에 運算에 不便을免치못한다 이제 回路의 直線性을利用하야 Sine wave 와 Cosine wave 를 한方法으로 重疊한것으로서 電压, 電流를表現하였다가 方程式解中에서 Sine wave, 나 Cosine wave 어느것이든지 自意로選択하야 所要의 定常狀態解로 하면 될것이다.

$f_1(t)=I_m \cos wt,\quad f_2(t)=I_m \sin wt$

$i_s=a_1 f_1(t)+a_2 f_2(t)$ 에있어

$a_1=1,\quad a_2=j$ 라고하면

$i=I_m \cos wt + j I_m \sin wt$

$=I_m \ell^{jwt}$ 同様으로

$E=E_m \ell^{j(wt+\theta)}$ 라고 하면

(2)式은:

$$\left(jwL+R+\frac{1}{jwc}\right)I_m \ell^{jwt}=E_m \ell^{j(wt+\theta)}$$

$$\left(jwL+R+\frac{1}{jwc}\right)I_m=E_m \ell^{j\theta}$$

$$I_m=\frac{E_m \ell^{j\theta}}{jwL+R+\frac{1}{jwc}}=\frac{E_m \ell^{j\theta}}{R+j(wL-\frac{1}{wc})}$$

$$=\frac{E_m \ell^{j\theta}(R-j(wL-\frac{1}{wc}))}{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}$$

$$=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}}\cdot \ell^{j\theta}\,\frac{R-j(wL-\frac{1}{wc})}{\sqrt{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}}$$

$$=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}}\,\ell^{j(\theta-\varphi)}$$

但 $\varphi=tg^{-1}\dfrac{wL-\frac{1}{wc}}{R}$

$$\therefore I_m \ell^{jwt}=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}}\,\ell^{j(\theta-\varphi+wt)}$$

$$\therefore I_m=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}},\qquad \theta=\varphi$$

即 $E_m \sin(wt+\theta)$로 하면

$i=\dfrac{E_m}{\sqrt{R^2+(wL-\frac{1}{wc})^2}}\sin wt$ 로 되는것을 알것이다.

이제 過渡現象을 求하야 이定常電流에加하면 完全解析을 어덧다 할수 있다 過渡現象電流 i_t 는 時間 t에 딸아 減少하는 時間函数일것이다.

過渡現象 i_t 는 前式 (b)條件은 満足시키지안는것이고, 方程式 (2)의 右便 E=0로하여 求하는것이다.

$$L\frac{di_t}{dt}+R i_t+\frac{1}{c}\int_0^t i_t\,dt=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=0,\qquad \int_0^t i_t\,dt=Q$$

$$\left(D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}\right)Q=0$$

$$Q=\frac{0}{D^2+\frac{R}{L}D+\frac{1}{LC}}=\frac{0}{(D-a)(D-b)} \quad (4)$$

여기에 $a=-\dfrac{R}{2L}+\sqrt{\dfrac{R^2}{4L^2}-\dfrac{1}{LC}}$,

$b=-\dfrac{R}{2L}-\sqrt{\dfrac{R^2}{4L}-\dfrac{1}{LC}}$

故로 $Q=\dfrac{1}{D-a}\left(\dfrac{0}{D-b}\right)$

그런데 $\dfrac{0}{D-b}=\ell^{bt}\cdot\dfrac{0.\ell^{-bt}}{D}$

$\frac{0\,e^{-bt}}{D}$ 即 0의積分은 常數인 故로

$Q_1 = e^{bt}\frac{0\,e^{-bt}}{D} = C_1 e^{bt}$,

$\therefore Q_2 = \frac{C_1 e^{bt}}{D-a} = e^{at}\frac{e^{bt}e^{-at}}{D} = C_2 e^{at}$

$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 e^{bt} + C_2 e^{at}$ ------⑤

$i_t = \frac{dQ}{dt} = bC_1 e^{bt} + aC_2 e^{at}$

$= Ae^{at} + Be^{bt}$.

$= Ae^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + Be^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$

--------- ⑥

이것이 A, B 두常數는 初期條件 $t=0$, $Q=0$, $i=0$를 ⑤, ⑥式에 代入할 수 있는 것이다.

그리고 $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{LC}$, $\frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}$, $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ 에依하야 $i_t = e^{-\frac{R}{2L}t}(A'\sinh\Omega t + B'\cosh\Omega t)$

$i_t = e^{-\frac{R}{2L}t}(A'\sin\alpha t + B'\cos\beta t)$

$i_t = Ce^{-\frac{R}{2L}t}$

故로 全電流 $i = i_s + i_t =$

$Ae^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + Be^{-\left(\frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} +$

$\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \sin wt$ ------- ⑦

或은 $i = Ae^{-\left(\frac{R}{2L} - \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t} + Be^{-\left(\frac{R^2}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}\right)t}$

$\frac{E_m}{\sqrt{R^2 + (wL - \frac{1}{wC})^2}} \sin\left(wt - \tan^{-1}\frac{wL - \frac{1}{wC}}{R}\right)$ ⑦′

(以 上)