相對論的補正에 依한
電子의 運動에 對하여

漢陽工科大學數學教室

金 俊 植

全 鍾 國

序 說

光速에 比하여 速度가 낮은 物体에 對하여서는 舊來 古典力學을 使用하면充分히 그 運動經緯를 알수가있다 그러나 物体의速度가 漸次로 增加하여 光速(眞空中)에 比할만큼큰것되였을때에는 벌서古典力學은 無能하게된다 이것은 古典力學에있어서는 어떠한 物体의 運動에 對하여서든지 質量은 不變히存在한다고 假定하기때문이다 實測에依하면 物体의 質量은 그의速度에따라 變化한다 事實벌서일찌기 Schuster, Thomsen 氏의 陰極線微粒子(電子)의 比電荷決定의 實驗에 나타난바와같이 電子의 比電荷는 그의 速度의 增加에 따라 적어진다 이는 電子質量이 速度에依하여 變化되기때문이라는 것이 1897年에 G.F.C Searle 氏의 計算에 依하여 明白히되였다 速度에依한 質量의變化는 當時 電磁論에 있어서만 局限되였 으나 1905年 A.Eiustin 氏는 電磁論에서 말하는 電磁的質量뿐만아니라 普通物体의附性的質量도亦是 같은速度函數라는것을 表示하였다 物体의 質量이 速度의 函數라면 物体의 運動方程式에 크다란影響을 가저올것은 當然한일이다 質量의變化를 考慮한 運動方程式은 A.Einstein 氏가 그의 相對性力學에서 결論하였는것 같아는다 소위 相對性理論은 座標系의 選擇과無關係로 物理法則이 成立하여야된다고 主張한다 卽物理法則의 普遍妥當性과 그의 唯一絶對性을 要請한다

나는여기서 相對性力學的 運動方程式을 가지고 電子의 運動을 取扱하여보려고 한다 勿論電子의 運動速度가 光速에 對比할수없는 程度로 極少할때에는 古典力學的 考察에서 結論되는것이고 크다란 差異가없으나 그렇지않는 境遇에 있어서는 이 結論을 修正할 必要한다 다시말하면 古典力學은 相對性力學의 特別한 境遇이다 따라서 相對力學은 古典力學보다 더 普遍妥當性을 갖이며 相對性力學的結論에서그의 特殊한 境遇로서 古典力學에서얻는 結論을 演繹하여내올수있다 나는 이것이可能함을 나의過去의 많은硏究에서經驗하였다

以下數節에 전처論하는것은 過去누가 硏究하여보았는지 안하였는지 또그것이實用的價値가있는지없는지 잘모르나 나는 단電子에 對하여 精密한運動을 認識하여보는것도 無意味하지 않이라고 生覺한다 過去硏究하여본 問題中에서 電子에 關한것 몇가지 選擇하여 論하여보기로 하겠다 勿論 이論文內容은 나의 獨自的 硏究의一端이다

2. 電子의 質量과 그의 半徑

1901年 M. Abraham氏는 電子의 電磁的 質量으로서 다음과 같이 計算하였다

$$m_e\,(\text{縱質量}) = \frac{e^2}{8\pi a c^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left\{\frac{2}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{1}{\frac{v}{c}}\log\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right\}$$

$$m_t\,(\text{橫質量}) = \frac{e^2}{8\pi a c^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{v}{c}\right)^2}\left\{-1+\frac{1+\frac{v^2}{c^2}}{2\left(\frac{v}{c}\right)}\log\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}\right\}$$

여기에서 e는 電子荷電量, a는 그의 半徑, v는 그의 速度, c는 光速, π는 円周率를 表示한다

다음 Lorentz氏는 이와 조금 다르게 다음과 같이 計算하였다

$$\left.\begin{aligned} m_e &= \frac{e^2}{8\pi a c^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ m_t &= \frac{e^2}{8\pi a c^2}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\}$$

序說에서 述한 바와 같이 1905년 A. Einstein氏는 電子의 電磁的 質量뿐 아니라 一般的으로 物体의 惰性的 質量도 亦是 矢式처럼 速度에 따라 変化함을 "相対性原理"라하는 두개의 原理 (特殊相対性 理論의 基礎仮定)로 부터 出発하여 誘導하였다 只今 物体의 靜止質量을 m_0, 그의 速度 vector를 V, 眞空中光速을 c 라하면 그의 質量 m는

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{-------------} (1)$$

이다 (1)式에 速度 vector $\boldsymbol{V}$를 乘하여 이로서 運動量을 $\boldsymbol{P}$로 表示한다.

即 $$\boldsymbol{P} = \frac{m_0\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

古典力学에 있어서와 마찬가지로 $\boldsymbol{P}$를 時間에 関하여 微分한

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}$$

를 物体에 作用하는 힘 $\boldsymbol{F}$와 같으게 놓는다

即 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{V}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) = \boldsymbol{F} \quad \text{---------} (2)$$

이것이 相對性力學에 있어서 運動方程式을 表示함은 누구나 잘 아는 바이다. (2)와 变位微分 $d\mathbf{r}$와의 Scalar 乘積을 만들면

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

故로

$$\int_0^v \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot d\mathbf{r} = \int_0^v \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \mathbf{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right)\cdot dt$$

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2$$

右边에서 얻은 積分

$$\int_0^v \mathbf{F}\cdot dr$$

는 物体에 実施한 일의 量이며 이는 物体의 에너-지에 变한다 物体의 에너-지를 E_K라 하면

$$E_K = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0\right)c^2$$

이 式은 速度 v 될때의 物体의 에너-지는 質量의 变化

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0$$

에 c^2를 乘한것과 같고 静止物体의 에너-지는 静止質量

$$m_0$$

에 c^2를 乘한 것과 같음을 意味한다고 解釈할수 있다 따라서 運動物体의 質量에 c^2를 乘한量

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\, c^2$$

은 運動物体의 全에너-지라 볼수 있다 静止質量에 대한 에너-지

$$m_0 c^2$$

은 物質質量에 該当하는 에너-지이며 質量과 에너-지의 同等性을 表示한다고 生覺할수 있다

一般的으로 質量增加 dm에 該当하는 에너-지 增加를 dE라 하면

$$dE = c^2 dm$$

이다 卽 物体에 에너-지를 주면 이 에너-지는 物体의 慣性的 質量에 轉換하고 逆으로 慣性的 質量이 消失되면 그에 該當하는 에너-지가 生成된다 이렇게 生覺하면 에너-지도 質量과 마찬가지로 慣性을 가진다고 볼수 있다 事實 이것은 Hasenöhre 氏가 일쯔기 洞空輻射에 있어서 理論的으로 表示하였다 또 로서아의 物理学者 Lebedef 氏에 依하여 처음 알려진 輻射圧은 이 內容을 實証하여 주는 좋은 例이다 더욱히 原子核物理学의 發達에 따라 이 事實은 明白히 나타났다 素粒子(陽子와 中性子等)의 結合에 依한 質量缺損, 物質光化現象 或은 輻射의 物質化現象 및 原子爆彈, 電子의 二元性(波動性과 粒子性) 빛의 二元性等은 이것이 正当하다 함을 實証하여 주는 好例이다 에너-지와 質量이 本質的으로 同等하면 萬有引力場에 있어서의 物体나 電磁場에 있어서의 電子等은 그의 位置에너-지때문에 質量을 增加하게 될것이다

只今 두 物体사이에 거리를 S, 質量을 各各 M, m, 라 하면 M을 基準体로 하였을때의 m의 質量增加를 dm 라 하면

$$c^2 dm = \mu \frac{Mm}{S^2} dS \quad \text{----------} (3)$$

여기서 μ는 萬有引力의 常數이다 m가 变化하면 M도 变化할것이 予想되므로 只今

$$M = f(m)$$

라 놓아 $f(m)$의 꼴을 決定하여 보자 또 m를 基準体로 하면

$$c^2 dM = \mu \frac{Mm}{S^2} dS \quad \text{----------} (4)$$

(3)과 (4)에서

$$\frac{dM}{dm} = 1 \quad \text{----------} (5)$$

이것을 積分하면 $M = m + A$ 但 A는 積分常數이다

$$\therefore f(m) = m + A \quad \text{----------} (6)$$

두 物体가 接觸하였을 때의 質量을 各々 M_0, m_0 라 하면

$$M_0 - m_0 = A \quad \text{----------} (7)$$

故로 $M = m + (M_0 - m_0)$

(3)과 (6)에 依하여

$$\frac{1}{m(m+A)}\,dm = \frac{u}{C^2}\frac{1}{S^2}\,ds$$

이것을 積分하고 (7)을 고려하면

$$m = \frac{m_0(M_0-m_0)\,e^{\frac{u(M_0-m_0)(S-S_0)}{C^2 S_0 S}}}{M_0 - m_0 e^{\frac{u(M_0-m_0)(S-S_0)}{C^2 S_0 S}}} \quad \cdots\cdots (8)$$

이것은 動的質量과 位置와의 關係를 表示하는 式이다 볼수있다 따라서 Newton 氏에 있어서의 動的質量의 保存則은 廢棄되어야 한다.

質量의 增加量 Δm 는

$$\Delta m = m - m_0$$

$$= \frac{M_0 m_0\left(e^{\frac{u(M_0-m_0)(S-S_0)}{C^2 S_0 S}} - 1\right)}{M_0 - m_0 e^{\frac{u(M_0-m_0)(S-S_0)}{C^2 S S_0}}} \quad \cdots\cdots (9)$$

이 (9)式이 表示하는 Δm 는 m 를 基準体로 하였을 때의 M 의 增加量은 ΔM 와 一致함을 쉽게 證明할수 있다

即 $\Delta m = \Delta M$

로 되어 相対性이 保存된다

(9) 式을 巾級數에 展開하면

$$\Delta m = \frac{m_0}{C^2}\left(\frac{uM_0}{SS_0}\right)(S-S_0) + \frac{1}{2}m_0\left(1+\frac{m_0}{M_0}\right)\left(\frac{uM_0}{SS_0}\right)^2\frac{(S-S_0)^2}{C^4} + \cdots\cdots$$

M 를 地球, m_0 를 地球表面上 物体로 取하면

$SS_0 \fallingdotseq R^2$ (地球半徑의 自乘)

$S - S_0 = h$ (地上높이)

$m_0/M_0 \fallingdotseq 0$

라 볼수 있음으로 윗式은

$$\Delta m C^2 = m_0 g h + \frac{1}{2}\frac{m_0 g^2}{C^2}h^2 + \cdots\cdots$$

이 式이 地球表面近傍에 있어서의 位置에너-지를 表示한다 式이 明示하는

바와 같이 古典力學에서 結論되는 位置에너-지

$$m_0 gh$$

以外에 位置에너-지 項으로서

$$\frac{1}{2}\frac{m_0 g^2}{c^2}h^2 + \text{------}$$

가 더 余分히 包含되어 있다 $gh \ll c$ 되는 경우에 있어서는 이 余分의 項을 省略할수있다 이것은 제가 1946年 10月에 얻은 式이다.

以上과 같이 萬有引力場에 있어서의 에너-지와 質量과의 関係에 対하여 論할 바가 많으나 本論文에 있어서의 主要目的은 이것이 아님으로 省略하기로 하고 다음은 電子의 靜止質量에 対하여 論하여 보겠다

Maxwell 氏에 依하면 電氣마당의 세기가 $\mathbf{E}$ 될때 電氣力에 依한 空間中 (眞空中) 靜電에너-지 密度는 $\frac{1}{8\pi}\mathbf{E}^2$

이다 只今

空間中에 靜止하고 있는 한개의 電子를 生覺하면 그의 周囲空間은 電氣마당이 되며 따라서 空間中에 靜電에너-지가 分布貯蓄된다 只今 計算을 簡便히 하기爲하여 電子의 全電荷 e 가 半徑 a 인 球形内에 고르게 分布되어 있는 球形電子를 生覺한다 電子의 中心부터 r 되는 거리에 있는 電子의 外部 点에 있어서의 電氣마당의 세기 $\mathbf{E}$는 Coulomb 의 法則에 依하여

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^2}r_1$$ 但 r_1 는 r 方向의 單位 Vector 이다

이点에 있어서의 靜電에너-지 密度는

$$\frac{1}{8\pi}\mathbf{E}^2 = \frac{1}{8\pi}\frac{e^2}{r^4}$$

이다 電子의 外部空間全体에 対하여 包含한 全에너-지 W_e 는

$$W_e = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{8\pi}\frac{e^2}{r^4}dx\,dy\,dz - \int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}}\int_{-\sqrt{a^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-y^2-z^2}}\frac{1}{8\pi}\frac{e^2}{r^4}dx\,dy\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \frac{1}{8\pi}\frac{e^2}{r^4} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} dr d\theta d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \frac{1}{8\pi}\frac{e^2}{r^4} \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

$$= \frac{e^2}{2a}$$

電子의 內部에 包含된 全에너-지 W_i는 다음 式으로 計算된다

$$W_i = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a} \frac{2}{9}\pi \rho^2 r^2 \cdot r^2 \sin\theta \, dr d\theta d\varphi$$

여기서 ρ는 電子內部의 電氣密度이며

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho = e$$

이다 이것을 윗式에 代入하여 計算하면

$$W_i = \frac{e^2}{10a}$$

電子가 所有하는 全靜電에너-지 W는

$$\begin{aligned} W &= W_e + W_i \\ &= \frac{e^2}{2a} + \frac{e^2}{10a} \\ &= \frac{3}{5}\frac{e^2}{a} \end{aligned}$$

電子의 靜止質量 m_0가 存在한다고 假定하면 에너-지와 質量의 同等性에 依하여

$$m_0 C^2 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{a}$$

或은

$$m_0 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{aC^2} \text{ ※} \quad \text{------- (10)}$$

여기서 C는 眞空中光速이다 이 式에서 a를 求하면

$$a = \frac{3}{5}\frac{e^2}{m_0 C^2}$$

를 얻는다. 이것이 球形電子의 半徑을 주는 式이다.

※ 本論文 뒤의 (註)를 보라

実地 이 半徑을 計算키 為하여

$e=4.804\times10^{-10}$ e.s.u. (Bäcklin 測定值, 1928年)

$m_0=9.1066\times10^{-28}$ gr

$c=3\times10^{10}$ cm/sec

를 代入하여 計算하면

$$a=1.61\times10^{-13}\,\mathrm{cm}$$

로 된다 勿論 이것은 電子의 靜止半徑이다。1902年 Kaufman 氏가 電子는 電磁的質量以外의 速度에 無關係한 一定量의 古典力学的 質量을 가지고 있지 않다고 實證하였다고 하나 나는 여기서 前述한 (10)式이 電子의 古典的 質量을 表示하는데 있어서의 充分한 理由를 찾으려고 한다

點電荷 e가 等速度 V로서 運動하면 周囲空間은 電磁場이 된다. 運動方向과 θ라 하는 角을 만들고 r라는 距離에 있어서의 電磁場의 세기 E, H 는 相対論的 電子力学에 依하면

$$E^2=\frac{e^2}{r^4}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^3}$$

$$H^2=\frac{v^2e^2}{c^2r^4}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\sin^2\theta}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\sin^2\theta\right)^3}$$ 이다

$\frac{v}{c}$가 그다지 크지않는 境遇를 生覺하여 보기로 하겠다。이것이 크게되는 경우에는 計算이 複雜히 된다 $\frac{v^2}{c^2}$을 包含하는 項을 無視하면

$$E^2=\frac{e^2}{r^4}$$

$$H^2=\frac{v^2e^2}{c^2}\frac{\sin^2\theta}{r^4}$$

이다. E에 歸因하는 에너-지에서 推測되는 質量은 (10)式에 依하여 亦是

$$m_0=\frac{3}{5}\frac{e^2}{ac^2}$$

과 같을 것이고 H에 歸因하는 質量 Δm_0는 다음과 같이 計算된다

磁場中의 單位体積内에 包含된 磁気에너-지는 Maxwell 氏에 依하면

$$\frac{1}{8\pi}H^2$$

이다. 全体空間에 対한 磁気에너-지의 總和 W를 求하면

$$W_m = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{\infty} \frac{V^2e^2}{8\pi C^2}\frac{\sin^2\theta}{r^4}\cdot r^2\sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \frac{V^2e^2}{3aC^2}$$

前述한 바와같이 다음式이 成立될 것이다

$$\Delta m_0 C^2 = \frac{1}{3}\frac{V^2e^2}{aC^2}$$

$$\therefore \Delta m_0 = \frac{1}{3}\frac{V^2e^2}{aC^4}$$

이 Δm_0은 電子가 運動하였기 때문에 增加된 質量이며 m_0에 対한 比를 取하면

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = \frac{1}{3}\frac{V^2e^2}{aC^4} \Big/ \frac{3}{5}\frac{e^2}{aC^2} = \frac{5}{9}\frac{V^2}{C^2} = \frac{1}{1.8}\frac{V^2}{C^2}$$

$$\fallingdotseq \frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2}$$

그런데 靜止質量이 m_0인 物体가 $V(\ll C)$라 하는 速度를 가졌을 때의 質量은

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}}$$

이다 故로

$$\Delta m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} - m_0$$

$$\therefore \frac{\Delta m_0}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{C^2}}} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2} + \frac{3}{4}\frac{V^4}{C^4} + \cdots\cdots$$

第二項以下는 $V \ll C$ 임으로 第一項에 対하여 無視 할수 있음으로

$$\frac{\Delta m_0}{m_0} = \frac{1}{2}\frac{V^2}{C^2}$$

이다 이것은 우에서 얻은 結果와 잘 一致한다 이것은 電子의 靜止質量 m_0로서

$$m_0 = \frac{3}{5}\frac{e^2}{aC^2}$$

을 取함이 適当함을 意味한다

即 $\frac{1}{3}\frac{V^2e^2}{aC^2}$은 電子의 力学的 運動에너-지 로 解釈된다

以前에는 電磁気学上 $\frac{V^2e^2}{3aC^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\frac{e^2}{aC^2}\right)V^2$

라 쓰고 運動에너-지 $\frac{1}{2}mV^2$에 対比시켜

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{aC^2}$$

을 電磁的質量이라 부르고 電子는 이 以外에 質量을 가지지 않다고 生覚하였다

3. 古典力学的 運動方程式 과 相対性力学的 運動方程式

2에서 우리는 物体의 質量과 速度와의 関係 및 質量과 에너-지의 同等性에 関하여 論하여 왔다

物体의 質量이 速度의 函数라 하면 古典力学的 運動方程式 (Newton의 運動方程式)
$$m\frac{d^2 r}{dt^2}=F \quad\text{------------------ (11)}$$
는 変更되어야 한다 (11)式을 다음과 같이 変形하면
$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dr}{dt}\right)=F$$
여기서
$$P=m\frac{dr}{dt}$$
라 놓으면 P는 古典力学的 運動量을 表示하고 운동方程式은
$$\frac{dP}{dt}=F$$
로 된다 相対性力学에 있어서는 運動量으로서
$$P=(\text{運動物体의 質量})\times(\text{速度})$$
$$=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\frac{dr}{dt}$$
로서 定義되고 運動方程式으로서 古典力学과 마찬가지로
$$\frac{dP}{dt}=F$$
即
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\cdot\frac{dr}{dt}\right)=F \quad\text{------ (12)}$$
를 使用한다 이것이 相対性力学的 運動方程式이다

이것을 直角成分으로 表示하면
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=F_x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=F_y$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=F_z$$

이다. 万一 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$가 光速C에 比하여 極히 적을때에는

$$\frac{\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^2}{c^2} << 1 \quad \text{--------- (13)}$$

임으로 (12)式은

$$m_0 \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}$$

로 되어 古典力学的 運動方程式과 一致한다. 事実上 우리가 日常 經驗하고 있는 物体의 速度는 (13)式을 満足하므로 古典力学的 運動方程式을 使用하여 解明한 結果와 実測이 잘 一致하는 것이다 前節에서 論한 바와 같이

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}$$

이라 놓으면 이것은 物体의 全에너-지를 表示한다고 解釈된다

이式과 (12)式에서

$$\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(E\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

를 얻는다 이것도 運動方程式의 한 変形이다

(13)式은

$$\frac{1}{c^2}\left(\mathbf{v}\frac{dE}{dt} + E\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) = \mathbf{F}$$

孤立된 物質系에서는

$$\mathbf{F} = 0$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0$$

임으로

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \text{------------- (14)}$$

이다. 이것은 孤立系의 運動方程式이다 即 孤立된 物質系의 全에너-지는 時間的으로 不変한다. 우리의 宇宙도 亦是 孤立系라 生覚할수 있음으로 (14式)이 成立할것이다 이것을 積分하면

$$E = Const$$

即 宇宙의 全에너-지는 一定하다. 이렇게 宇宙의 에너-지에 增減이 없음으로 宇宙는 永遠히 存在할것이다. (14)式이 Energy의 散逸이 없는 物体의 運動을 硏究하는데 必要한 方程式임을. 나는 여러가지 境遇에 있어서 잘 經驗하였다. 이에対하여서는 이以上 더 論치 않겠다. 다음은 (11)式과 (12)式을 가지고 한 個의 電子의 運動을 硏究하여 보기로 하겠다

電子運動의 古典力学的 取扱

3. 이項과 다음項에서 電子運動의 力學的 意義에 對하여서만 究明하여 보기로 하고 電子運動의 光学的 意義에 對하여서는 本論文의 趣意가 아니므로 省略하다. 勿論 電子를 한個의 点電荷로 보고 使用하는 運動方程式은 (11)式이다.

[A] 不変電場속에 있어서의 電子의 運動

2.에서 論한 바와 같이 電子는 静止質量을 가짐으로 只今 이것 m. 電子의 時刻 t에 있어서의 変位를 $\mathbf{r}$라하고 電氣마당의 세기를 $\mathbf{E}$라 하면

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=e\mathbf{E}$$

여기서 e는 電子의 荷電量이다. 이 式을 다시 쓰면

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{e}{m}\mathbf{E}$$

t에 関하여 積分하면

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{e}{m}\mathbf{E}t+\mathbf{v}_0$$

여기서 $\mathbf{v}_0=\left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]_{t=0}$ 이다 이것은 電子의 速度를 規定하는 式이다.

다시 t에 関하여 積分하면

$$\mathbf{r}=\frac{e}{2m}\mathbf{E}t^2+\mathbf{v}_0t+\mathbf{r}_0 \qquad \text{------} \quad (16)$$

여기서 $\mathbf{r}_0=[\mathbf{r}]_{t=0}$ 이다. 이것이 電子의 軌道를 表示하는 Vector 方程式이다

그런데
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_0=\left(\frac{e}{m}\mathbf{E}t+\mathbf{v}_0\right)\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_0$$
$$=\frac{e}{m}\mathbf{E}\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_0\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_0=0$$

이와같이 하여 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}_0=0$ 이다

故로 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 및 $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$는 Vector $\mathbf{E}$와 $\mathbf{v}_0$가 決定하는 平面上에 있다. 即 電子는 平面運動을 한다. 運動径路는 (16)式이 表示하는 바와 같이 抛物線이다 이것은 重力場에 있어서의 抛射体의 運動에 恰似하다.

特히 $\mathbf{v}_0=0$ $\mathbf{r}_0=0$ 되는 境遇에 있어서는

$$\mathbf{r}=\frac{1}{2}\left(\frac{e}{m}\mathbf{E}\right)t^2$$
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\left(\frac{e}{m}\mathbf{E}\right)t$$

임으로 $\mathbf{r}\parallel\frac{d\mathbf{r}}{dt}\parallel\mathbf{E}$ 이다. 即 電子는 $\mathbf{E}$의 方向에 直線運動을 한다. 이것은 自由落下한 物体의 運動에 恰似하다.

다음 $\mathbf{v}_0 \perp \mathbf{E}$ 이고 $r_0 = 0$ 될때 直角座標의 x軸을 $\mathbf{v}_0$에 y軸을 $\mathbf{E}$에 平行히 取하면

$$\frac{dx}{dt} = |\mathbf{v}_0|$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}|\mathbf{E}|t$$

이式을 積分한 다음 t를 消去하면

$$y = \frac{e|\mathbf{E}|}{2m\mathbf{v}_0^2}x^2$$

或은

$$\frac{e}{m} = \frac{2y\mathbf{v}_0^2}{|\mathbf{E}|x^2}$$

이式은 陰極線을 利用하여 電子의 比電荷 $\frac{e}{m}$를 測定하는데 使用된다.

〔B〕 Coulomb 力場에 있어서의 電子 運動

Coulomb 力場은 potential Φ를 가진다.

이때 $\mathbf{F} = -e\nabla\Phi$ 이고

方程式은 $m\frac{d^2 r}{dt^2} = -e\nabla\Phi$

Φ를 만드는 電荷가 1個 存在할 境遇에는 이 問題는 二体問題에 屬한다. 두個 以上이 있을때에는 所謂 多体問題에 屬한다. 이 式과 量子條件 및 振動数條件을 가지고 N. Bohr 氏가 水素 Spectrum의 系列関係를 說明함은 너무나 有名하다. 나는 여기서 $r \parallel -\nabla\Phi \parallel \frac{dr}{dt}$ 되는 境遇에 関하여서만 興味를 가지고 論하겠다. 그것은 萬有引力場에 있어서의 落体의 法則에 一大光明을 주기때문이다. 이 경우에 있어서 윗 Vector 運動方程式은

$$m\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{Qe}{(S_0 - S)^2}$$

여기서 Q는 potential Φ를 나타내는 한個의 電荷量이고 S_0는 Q와 電子 e 사이의 처음 거리이고 S는 t 時間以後의 Q와 電子와의 거리이다.

이式을 積分하면 다음式을 얻는다 (中間計算은 繁雑을 避하기 為하여 略한다)

$$\sqrt{\frac{2Qe}{mS_0}}\,t = S_0 \sin^{-1}\sqrt{\frac{S}{S_0}} + \sqrt{S(S_0 - S)}$$

萬有引力場에 있어서의 物体도 逆二乘의 法則에 服從함으로 이와 같은 式이 成立한다 이 경우에 있어서는 常数 $\frac{Qe}{m}$ 代로 GM을 代入하면 좋다 G는 萬有引力의 常数이고, M은 萬有引力場의 potential을 나타내는 物体의 質量이다 古典力学的인 眞実한 落体의 法則은 이 式으로서 表示된다.

特히 $s \ll s_0$ 되는 경우에 있어서는

$$\sqrt{\frac{2Qe}{ms_0}}\,t \fallingdotseq s_0\sqrt{\frac{s}{s_0}}+\sqrt{s_0 s} = 2\sqrt{s_0 s}$$

$$\therefore \quad s=\frac{1}{2}\left(\frac{Qe}{ms_0^2}\right)t^2$$

이다. 重力場에 있어서는 $\frac{Qe}{ms_0^2}$은 重力의 加速度 g를 表示하게되고

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

이된다. 이것이 Galilei가 発見한 有名한 落体의 法則이다. 原子核과의 衝突問題 같은 것은 이러한 문제의 하나이다. 一般的으로 原子核等이 coulomb 力의 作用下에서 서로衝突할 때에는 双曲線軌道를 만든다. 勿論 한쪽 原子核이 다른쪽 原子核의 植量에 比하여 훨씬 큰 質量을 가졌을때이다.

[C] 不変磁場内에 있어서의 電子의 運動

磁場의세기를 $\mathbf{H}$라하면 電子에作用하는 힘 $\mathbf{F}$는 Lorentz 氏에 依하면

$$\mathbf{F}=e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H}$$

이다. 따라서 運動方程式은

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H} \quad \text{-------} \quad (17)$$

이다。故로 $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\perp\frac{d\mathbf{r}}{dt},\mathbf{H}$

이다。即 加速度는 恒常 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$와 $\mathbf{H}$가 決定하는 平面에 垂直하다.

又 (17)式의 兩辺에 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$를 Scalar的으로 乘하여 주면

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2=e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=0$$

故로 $$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=Const.$$

即 電子의 速度의 크기는 不変하다。 또 (17)式과 Vector $\mathbf{H}$와의 Scalar 乘積을 만들면

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\mathbf{H}=e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}$$
$$=0$$

故로 $$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{H}=Const.$$

$\mathbf{H}$의 方向餘弦을 λ, μ, ν라 하면

$$\lambda\frac{dx}{dt}+\mu\frac{dy}{dt}+\nu\frac{dz}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|}$$
$$=\frac{1}{|H|}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{H}$$

그런데 $\lambda\frac{dx}{dt}+\mu\frac{dy}{dt}+\nu\frac{dz}{dt}$

는 **H** 方向의 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$의 成分이다. 이것을 電子의 **H** 方向의 速度成分의 不変함을 意味한다. $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=Const.$ 및 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{H}=Const.$ 와

(17) 式에서 $\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=Const.$ 임을 안다

電子의 運動經路의 曲率 Vector 를 **R** 라 하면 力学上 잘 알려지고 있는 바와 같이
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=\frac{\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{|\mathbf{R}|}\mathbf{R}_1$$

여기서 $\mathbf{R}_1$ 는 **R** 方向의 單位 Vector 를 表示한다. 따라서
$$\begin{aligned}|\mathbf{R}|&=\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\Big/\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|\\&=\frac{m}{e}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\Big/|\mathbf{H}|\,s\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt},\mathbf{H}\right)\\&=Const.\end{aligned}$$

이다. 即 曲率 Vector 의 크기는 一定하다.

이式에서 $\frac{e}{m}=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\Big/|\mathbf{H}|\cdot|\mathbf{R}|\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt},\mathbf{H}\right)$ 를 얻는다. 이式은 電子의 比電荷를 주는 式이다. **H**에 垂直한 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$의 分成 $|\mathbf{V}|$ 는
$$|\mathbf{V}|=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt},\mathbf{H}\right)$$

H에 垂直한 平面에 있어서의 経路의 正射影의 曲率 半径 $\mathbf{R}_H$ 는
$$\begin{aligned}\mathbf{R}_H&=\left|\frac{\mathbf{V}^2}{\mathbf{V}\times\frac{e}{m}\mathbf{H}}\right|\\&=\frac{|\mathbf{V}|}{\frac{e}{m}|\mathbf{H}|\sin(\mathbf{V}\cdot\mathbf{H})}\end{aligned}$$

$\mathbf{V}\perp\mathbf{H}$ 임으로, $\sin(\mathbf{V}.\mathbf{H})=1$ 되고
$$\begin{aligned}\mathbf{R}_H&=\frac{m}{e}\left|\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{H}}\right|\\&=\frac{m}{e}\left|\frac{\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\mathbf{H}}\right|\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{H}\right)\\&=Const.\end{aligned}$$

即 **H**에 垂直한 面에 있어서는 半徑 $\mathbf{R}_H$ 인 円이다. 電子의 운동은 이로서 明白하다. 電子는 一定한 曲率半径의 径路를 一定한 빠름으로 그린다. 磁力線에 垂直한 平面에 대한 正射影은 半径 $\mathbf{R}_H$ 인 円이고 磁場에 平行한 分速度는 不変하므로 磁力線에 平行한 母線을 가진 直円狀的螺旋이다.

K 를 **H** 方向의 單位 Vector, **i**, **j** 를 **K** 에 垂直한 平面上의 單位 Vector 라 하고

$$\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{H}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

라 놓으면 電子의 動径 $\mathbf{r}$는

$$\mathbf{r} = R_H \cos\theta\, \mathbf{i} + R_H \sin\theta\, \mathbf{j} + R_H\, \theta \tan\alpha\, \mathbf{K}$$

이다. 여기서 θ는 $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ 平面上의 $\mathbf{r}$의 正射影과 $\mathbf{i}$가 만드는 角이다。

ㄱ) 不変電磁場에 있어서의 電子運動

電気마당을 $\mathbf{E}$, 磁気마당을 $\mathbf{H}$라 하면 電子의 運動方程式은 다음과 같다。

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = e\mathbf{E} + e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H} \qquad \text{--------(18)}$$

이 両辺에 $\mathbf{H}$를 Scalar的으로 乗하면

$$\frac{d^2\mathbf{H}\cdot\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{e}{m}\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} \qquad \text{--------(19)}$$

積分하면
$$\frac{d\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{r}}{dt} = \frac{e}{m}\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}t + \mathbf{H}\cdot\mathbf{v}_0 \qquad \text{-----(20)}$$

여기서 $\mathbf{v}_0$는 初速度이다。이를 다시 積分하면

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{r} = \frac{e}{2m}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})t^2 + \mathbf{H}\cdot\mathbf{v}_0 t \qquad \text{-----(21)}$$

이式에서는 初期條件으로서 $[\mathbf{r}]_{t=0} = 0$ 를 取하여 있다。

18式과 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 와의 Scalar 乗積을 만들면

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = \frac{2e}{m}\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

다시 t에 関하여 積分하면

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2 = e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2$$

이것은 電子에너-지를 주는 式이다。即 $\mathbf{H}$는 電子의 運動에너-지에는 조금도 関與치 않음을 안다。

다음 (18)式의 両辺을 t에 関하여 다시 微分하면

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \frac{e}{m}\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\times\mathbf{H}$$

只今
$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

라 놓으면 $\mathbf{a}$는 加速度를 表示하고 웃式은

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{e}{m}\mathbf{a}\times\mathbf{H}$$

$\mathbf{a}$와의 Scalar 乗積을 만들면

$$\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0 \qquad \therefore\ \mathbf{a}^2 = \text{Const.}$$

即 電子의 加速度의 크기는 一定하다. 또 H와의 Scalar乘積을 만들면

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H}\cdot\mathbf{a} = 0$$

$$\therefore \quad \mathbf{H}\cdot\mathbf{a} = 0$$

故로 電子의加速度와 磁場과 만드는角 Ⓗ는 一定하다. 이式과 (18)式으로서 判斷하면 加速度를 表示하는 $\mathbf{a}$는 $\mathbf{H}$의 周圍를 歲差運動을 함을 안다 $\mathbf{a}$의 歲差運動에 있어서의 $\mathbf{H}$ 周圍의 回轉速度 ω는 適當히 計算하면

$$\omega = \frac{e}{m}\mathbf{H}$$

이다.* 即 一定하다. (18)式을 直角成分으로 表示하면 다음과 같다

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}E_x + \frac{e}{m}\begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ H_y & H_z \end{vmatrix} \quad \text{---------} \quad (22)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}E_y + \frac{e}{m}\begin{vmatrix} \frac{dz}{dt} & \frac{dx}{dt} \\ H_z & H_x \end{vmatrix} \quad \text{---------} \quad (23)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m}E_z + \frac{e}{m}\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \\ H_x & H_y \end{vmatrix} \quad \text{-------} \quad (24)$$

Z軸을 $\mathbf{H}$와 一致시키면 (21)式에 依하여

$$\begin{aligned} z &= \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{H}|} \\ &= \frac{(\mathbf{E}\cdot\mathbf{H})}{2m|\mathbf{H}|}t^2 + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{v}_0}{|\mathbf{H}|}t \\ &= \frac{1}{2}\frac{eE_z}{m}t^2 + v_{0z}t \quad \text{---------} \quad (25) \end{aligned}$$

이고 $H_x=0,\ H_y=0,\ H_z=|H|$ 임으로 (22) (23) (24) 式은 各各

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{e}{m}E_x + \frac{e}{m}|H|\frac{dy}{dt} \quad \text{---------} \quad (26)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e}{m}E_y - \frac{e}{m}|H|\frac{dx}{dt} \quad \text{---------} \quad (27)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{e}{m}E_z \quad \text{---------------} \quad (28)$$

(28)의 積分은 勿論 (25)式이 된다, (27)을 積分하면

$$\frac{dy}{dt} = \frac{e}{m}E_y t - \frac{e}{m}|H|x + v_{0y}$$

이것을 (26)式에 代入하여 整頓하면

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{e^2H^2}{m^2}x = \frac{e^2|H|E_y}{m^2}t + \frac{e}{m}(E_x + |H|v_{0y})$$

初期條件 $[x]_{t=0}=0,\quad \left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0} = v_{0x}$

를 考慮하여 이를 풀면

$$x=\sqrt{\frac{m^2 v_{ox}^2}{e^2 H^2}+\frac{m^2}{e^2}\left(\frac{v_{oy}}{|H|}+\frac{E_x}{H^2}\right)^2}\cos\left(\frac{e}{m}|H|t+\tan^{-1}\frac{|H|v_{ox}}{E_x+|H|v_{oy}}\right)+\frac{m}{e}\left(\frac{E_x}{H^2}+\frac{v_{oy}}{|H|}\right) \qquad (29)$$

이 x를 (27)式에 代入한後 積分하면

$$y=-\sqrt{\frac{m^2 v_{ox}^2}{e^2 H^2}+\frac{m^2}{e^2}\left(\frac{v_{oy}}{|H|}+\frac{E_x}{H^2}\right)^2}\sin\left(\frac{e|H|}{m}t+\tan^{-1}\frac{|H|v_{ox}}{E_x+|H|v_{oy}}\right)-\frac{E_x}{|H|}t \qquad (30)$$

(25), (29), (30) 式은 電子의 運動徑路를 規定하는 方程式이다. 이 曲線의 追跡은 略한다

以上 古典力学을 가지고 一個의 電子의 運動을 研究하여 보았다. 다음은 이것을 相対性力学的으로 取扱하여 本節에서 얻은 結果와 対照하여 보기로 하겠다

5. 電子運動의 相対性力学的取扱

本節에서 使用하는 運動方程式은 速度에依한 質量의 変化를 補正한 相対性力学的運動方程式이다. 이것은 前述한 바와 같이 (12)式으로서 表示된다.

[A] 不変電気마당(電場)에 있어서의 電子의 운동 電子의 運動方向이 恒常 不変電気마당 E와 一致할때에는 運動方程式으로서 다음과 같이 쓸수 있음은 (12)式을 変形한다면 곧 안다.

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}^{\,3}}\frac{d^2 r}{dt^2}=eE$$

이 경우에 있어서 恒常 $r \parallel \frac{dr}{dt} \parallel E$ 임으로

$$v=\left|\frac{dr}{dt}\right|$$

라 놓으면
$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}}\frac{dv}{dt}=e|E|$$

運動에 依하여 電荷 e가 変치 않다고 生覺하고 両辺을 t에 関하여 積分하면

$$e|E|t=\int\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}^{\,3}}dv$$

只今 $v=c\sin\theta$ 라 놓으면 $dv=c\cos\theta\, d\theta$ 임으로

$$= \int \frac{m_0}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \cdot c \cos\theta \, d\theta$$

$$= m_0 c \int \sec^2\theta \, d\theta$$

$$= m_0 c \tan\theta + A$$

$$= \frac{m_0 c v}{\sqrt{c^2 - v^2}} + A$$

初期條件으로서 $[v]_{t=0} = 0$

를 取하면 $A = 0$

이다。따라서 윗 積分은 $\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = e|\mathbf{E}|t$

兩辺을 自乘하면 $\dfrac{m_0^2 c^2 v^2}{c^2 - v^2} = e^2 \mathbf{E}^2 t^2$

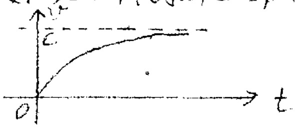
이式에서 v를求하면

$$v = \frac{ct}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{e^2 \mathbf{E}^2} + t^2}} \quad \text{------} \quad (31)$$

이것이 電子의 速度를 주는 式이다

$$\lim_{t\to\infty} v = \lim_{t\to 0} \frac{ct}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{e^2 \mathbf{E}^2} + t^2}} = c$$

即 電子의 速度는 t와함께 增大하나 光速을 超過치는 못한다, 古典力学에 있어서는 (15)式이 表示하는 바와 같이 速度가 限없이 增大할수 있다。



t와 v 사이의 関係를 Graph로 그리면 左図와 같다。다음은 經過距離와 時間사이의 関係를 研究하여 보자 (31) 式은

$$\frac{d|r|}{dt} = \frac{ct}{\sqrt{\frac{m_0^2 c^2}{e^2 \mathbf{E}^2} + t^2}}$$

t에 関하여 積分하면 $|r| = c\sqrt{\dfrac{m_0^2 c^2}{e^2 \mathbf{E}^2} + t^2} + B$

初期條件으로서 $[|r|]_{t=0} = 0$

를 取하면 $B = -c \cdot \dfrac{m_0 c}{e^2|\mathbf{E}|}$

이것을 윗式에 代入하면 $|r| = \dfrac{m_0 c^2}{e|\mathbf{E}|}\left\{\sqrt{1 + \dfrac{e^2 \mathbf{E}^2}{m_0^2 c^2} t^2} - 1\right\}$ ...... (32)

이것이 電子變位와 t사이의 関係式이다。

(16)式에 있어서 $v_0 = 0$, $r_0 = 0$

라 할때에 얻은 結果와 一致치 않는다. 即 거리가 時間의 自乘에 比例치 않는다。

그러나 $\frac{e|E|}{m_0 c}t \ll 1$ 될때에는 (32)式의 右边을 巾級数에 展開하면

$$|r| = \frac{1}{2}\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{m_0}\right)t^2 - \frac{1}{8}\,\frac{e^3|\mathbf{E}|^3}{m_0^3 c^2}t^4 + \cdots\cdots$$

第二項以下는 第一項에 比하여 第二位의 無限小에 該当하므로 이를 無視하면

$$|r| = \frac{1}{2}\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{m_0}\right)t^2$$

을 얻는다。 即 古典力学的 結果와 一致한다。 다음은 電子가 처음에 $\mathbf{E}$에 対하여 垂直한方向에 射出되었을때를 生覚하여 보자。 $\mathbf{E}$의 方向을 y軸, 電子의 初速度 v_0의 方向을 x軸으로 取한다 運動方程式으로서 判断하면 이때 電子는 xy面上에서 平面曲線運動을 할것이고 運動方程式을 直角成分으로 表示하면 다음과 같이 된다。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}}\right) = 0 \quad ----(33)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}}\right) = e|\mathbf{E}| \quad ---(34)$$

(33)式에서

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}} = A$$

初期條件 $\left[\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = [v_0, 0]$

을考慮하면 $A = \frac{v_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}v_0^2}}$

故로 $$\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}} = \sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\cdot\frac{\frac{dx}{dt}}{v_0} \quad ------ \quad (35)$$

이것을(34)式에 代入하면

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\;\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right) = e|\mathbf{E}|$$

初期條件을 考慮하고 이式을 t에 関하여 積分하면

$$\frac{m_0 v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\;\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = e|\mathbf{E}|t$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{\beta e|\mathbf{E}|t}{m_0 v_0}\,\frac{dx}{dt} \quad --------- \quad (36)$$

但 $\beta = \sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}$ 이다

(35)와 (36)에서 $\frac{dy}{dt}$를 消去하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{m_0 v_0 c}{\beta e|\mathbf{E}|} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\beta e|\mathbf{E}|}\right)^2 + t^2}} \quad \text{--------} (37)$$

兩辺을 積分한後 初期條件 $[x]_{t=0} = 0$

를 考려하면 $x = \frac{m_0 v_0 c}{\beta e|\mathbf{E}|} \sinh^{-1} \frac{\beta e|\mathbf{E}|}{m_0 c} t$ ------ (38)

(37)을 (36)에 代入하면 $\frac{dy}{dt} = \frac{ct}{\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\beta e|\mathbf{E}|}\right)^2 + t^2}}$

를 얻는다。(37)과 이式은 電子의 速度를 定하는 式이다。

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{dx}{dt}\right] = 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \left[\frac{dy}{dt}\right] = c$$

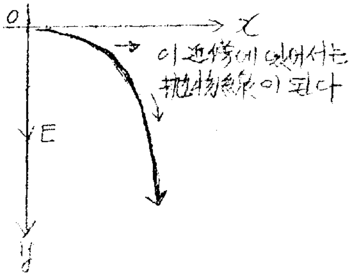
임으로 나중에는 x 軸方向의 速度는 없어지고 y 軸方向의 속도가 光速에 到達한다。 이것은 一樣한 힘의 作用을 받고 運動하는 普通物体에도 適用할 수가 있다。 式 $\frac{dy}{dt}$ 의 兩辺을 t 에 関하여 積分하면

$$y = c\sqrt{\left(\frac{m_0 c}{\beta c|\mathbf{E}|}\right)^2 + t^2} - \frac{m_0 c^2}{\beta e|\mathbf{E}|} \quad \text{----} (39)$$

여기서 初期條件으로서 $[y]_{t=0} = 0$ 를 取하였다。(38)과 (39)는 電子의 運動経路의 方程式이다。 x 와 y 사이의 関係를 알려면 (38)과 (39)에서 t 를 消去하면 좋다。

$$y = \frac{m_0 c^2}{\beta e|\mathbf{E}|}\left(\cosh\left(\frac{\beta e|\mathbf{E}|}{m_0 v_0 c} x\right) - 1\right)$$

를 얻는다. 이것을 Graph로 그리면 다음과 같다



即 懸垂線이다。古典力学에 있어서는 抛物線이 된다。 그러나 $x \sim 0$ 될때에는, 巾級数에 展開한 式

$$y = \frac{\beta e|\mathbf{E}|}{2 m_0 v_0^2} x^2 + \frac{\beta^3 e^3 |\mathbf{E}|^3}{4 m_0^3 v_0^4 c^2} x^4 \cdots$$

에서 近似式으로서

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{\beta e|\mathbf{E}|}{m_0 v_0^2}\right) x^2$$

을 얻는다。이 것은 確実히 抛物線이다。 即 古典力学的 結果는 近似的인 것이다。

万一 $\frac{\beta e|\mathbf{E}|}{m_0 v_0 c} x \ll 1$ 이 되지 않을 경우에 있어서는 古典力学의 計算은 커다란 修正을 要한다. 特히 $v_0 \ll c$ 되면

$$y = \frac{e|\mathbf{E}|}{2m_0 v_0^2} x^2$$

로 되어 古典力学的計算은 運動速度가 光速에 比하여 極히 적을뿐만 아니라 運動時間이 적을때에 大体的으로 相对性力学的計算과 一致한다.

다음 運動經路方程式에서 m_0 를 求하면

$$m_0 = \beta e|\mathbf{E}| x / v_0 c \cosh^{-1}\left(\frac{\beta e|\mathbf{E}|}{m_0 c^2} y + 1\right)$$

이다. 여기서 実験에 依하여 x, y 를 測定하면 電子의 静止質量 m_0 를 決定할수 있다. 따라서 (10)式의 正否를 判断할수 있다.

[B] Coulomb 力場에 있어서의 電子運動

前述한 바와 같이 이 力場은 potential 를 가짐으로 이를 Φ 라 하면 運動方程式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\right) = -e\nabla\Phi \quad \text{--------- (40)}$$

이와 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 와의 scalar 乘積을 만들면

$$-e\nabla\Phi \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

両辺을 t 에 関하여 積分하면

$$-e\nabla\Phi = \int \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\right) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt$$

部分積分法을 適用하면

$$= \frac{m_0 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}} - \int \frac{m_0 \frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}} \cdot \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\, dt$$

$$= \frac{m_0 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}} - \frac{1}{2}\int \frac{m_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\, dt$$

$$= \frac{m_0 \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2} + A$$

$$= \frac{m_0 C^2}{\sqrt{1-\frac{1}{C^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}} + A$$

初期條件으로서 $\left[\frac{dr}{dt}\right]_{t=0}=0 \quad [\Phi]_{t=0}=\Phi(r_0)$

라하면 $A=-m_0C^2-e\Phi(r_0)$

故로
$$\frac{m_0 C^2}{\sqrt{1-\frac{1}{C^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}+e\Phi(r)=m_0C^2+e\Phi(r_0) \qquad \text{-----} (41)$$

則 力学的에너-지 保存則이 成立한다。이 式을 變形하면

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}-m_0=\frac{e\left(\Phi(r_0)-\Phi(r)\right)}{C^2}$$

이다. 이것은 電子의 位置에너-지의 減少量은 電子質量의 增加量으로서 ~~電子~~ 內에 保存됨을 表示한다。動徑方向의 單位 Vector를 i, 偏角이 增加하는 方向의 單位 Vector를 j라 하면 運動方程式은

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\left(\frac{dr}{dt}i+r\frac{d\theta}{dt}j\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=-e\nabla\Phi$$

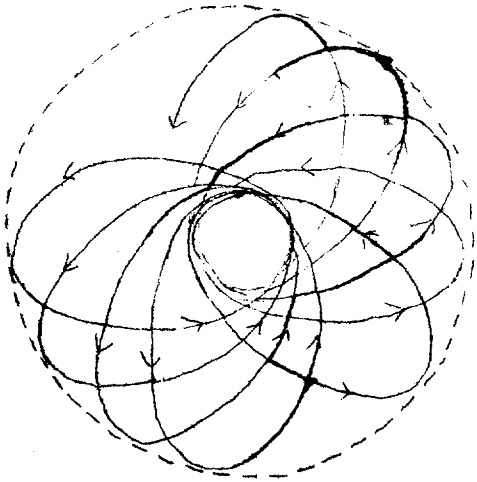
式은
$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right)\frac{dr}{dt}+\frac{m_0\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right]i$$
$$+\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right)r\frac{d\theta}{dt}+\frac{m_0\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right]j$$
$$=-e\nabla\Phi, \qquad \Phi=\frac{e'}{r}$$

여기서 e'는 Coulomb 力場을 일킨 電荷이다。이 Vector式은 다음과 같이 쓸수도 있다

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right)\frac{dr}{dt}+\frac{\frac{d^2r}{dt^2}-r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}=\frac{ee'}{m_0r^2}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}\right)r\frac{d\theta}{dt}+\frac{r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}}}=0$$

이 聯立微分方程式을 풀면 電子의 運動을 알수 있다。方程式의 꼴을 보아 円錐曲線運動이 아님을 確實하다。이 式을 가지고 A. Sommerfeld 氏가 水素原子 Spectrum의 微細構造를 巧妙히 說明함은 너무나 有名하다。



이 ~~方程式을 H의 原子核과 1個電子~~ 사이에 適用하여 電子의 軌道를 調査하여 보면 左圖와 如히 近日點이 移動하는 模樣이다。

다음은 特히

$$\boldsymbol{r} \parallel \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \parallel \nabla\Phi$$

되는 境遇를 生覺하여 보자。

이경우에 있어서는 $\boldsymbol{r}$의 方向이 恒常不變함으로

$$|\boldsymbol{r}| = r$$

라 놓고 電子의 全力学的에너-지를 K, 卽

$$K = m_0 c^2 + \Phi(r_0)$$

라 하면 (41)式에서

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{c^2\left(1 - \frac{m_0 c^2}{K - \Phi(r)}\right)}$$

變數分離를 하고 兩邊을 t에關하여 積分하면

$$ct = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{m_0 c^2}{K - \Phi(r)}}}$$

$$= \int \sqrt{\frac{K - \Phi(r)}{\Phi(r_0) - \Phi(r)}}\, dr$$

그런데 Coulomb力場에 있어서

$$\Phi(r) = \frac{ee'}{r}$$

임으로 이것을 代入하면

$$= \int \sqrt{\frac{Kr - ee'}{\Phi(r_0) r - ee'}}\, dr$$

$$= \sqrt{\frac{K}{\Phi(r_0)}} \int \sqrt{\frac{r - \frac{ee'}{K}}{r - \frac{ee'}{\Phi(r_0)}}}\, dr$$

$$= \sqrt{\frac{K}{\Phi(r_0)}} \left\{ \sqrt{\left(r - \frac{ee'}{K}\right)\left(r - \frac{ee'}{\Phi(r_0)}\right)} + \left(\frac{ee'}{\Phi(r_0)} - \frac{ee'}{K}\right) \log\left(\sqrt{r - \frac{ee'}{K}} + \sqrt{r - \frac{ee'}{\Phi(r_0)}}\right) \right\} + B$$

初期條件 $[r]_{t=0} = r_0$ 를 考慮하여 B를 決定한 다음 이것을

元式에 代入하면

$$ct=\sqrt{\frac{K}{\text{重}(r_0)}}\left\{\left(\sqrt{\left(r-\frac{ee'}{K}\right)\left(r-\frac{ee'}{\text{重}(r_0)}\right)}-\sqrt{\left(r_0-\frac{ee'}{K}\right)\left(r_0-\frac{ee'}{\text{重}(r_0)}\right)}\right.\right.$$
$$+\left(\frac{ee'}{\text{重}(r_0)}-\frac{ee'}{K}\right)\log\frac{\sqrt{r-\frac{ee'}{K}}+\sqrt{r-\frac{ee'}{\text{重}(r_0)}}}{\sqrt{r_0-\frac{ee'}{K}}+\sqrt{r_0-\frac{ee'}{\text{重}(r_0)}}}\quad\text{------}(42)$$

를 얻는다。 萬一, $r=r_0-S$ 라 놓으면 S는 e가 e'에 向하여 落下 或은 反撥된 距離를 表示한다. 地球表面上 落体를 이에 適用시킬때 (42)式은 落体法則을 表示하게된다. 이것이 眞實한 落体則을 表示한다。 이것의 近似式으로서 *Galilei* 의 落体法則을 誘導하여 내올수 있다。 勿論 前節[B]에서 얻은 結果를 이式에서 誘導하여 내올수 있다。

[C] 不変磁場內에 있어서의 電子運動

磁場의 세기를 $\mathbf{H}$라 하면 運動方程式은 다음과 같다

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dr}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\right)=e\frac{dr}{dt}\times\mathbf{H}\quad\text{-------------}(43)$$

그런데 $$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dr}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\right)=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{\frac{m_0}{c^2}\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}dr}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}^{3}dt}\cdots\text{---}(44)$$

임으로 (43)式은

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\frac{d^2r}{dt^2}+\frac{\frac{m_0}{c^2}\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\frac{dr}{dt}=e\frac{dr}{dt}\times\mathbf{H}$$

이와 $\frac{dr}{dt}$와의 Scalar 乘積을 만들면

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\frac{d^2t}{dt^2}+\frac{\frac{m_0}{c^2}\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}^{3}}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=0$$

式은 $$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}^{3}}\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}=0$$

$$\therefore\quad\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d^2r}{dt^2}=0\quad\text{--- --- --- ---}\quad(45)$$

故로 加速度 $\frac{d^2r}{dt^2}$는 速度 $\frac{dr}{dt}$에 垂直한다. 따라서(44)式은

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}}\frac{d^2r}{dt^2}=e\frac{dr}{dt}\times\mathbf{H}\quad\text{-------}(46)$$

이것이 磁場속에 있어서 電子의 運動을 規定하는 式이다. 이式에서 亦是

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\cdot\mathbf{H}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\perp\mathbf{H}\qquad\text{-----------}\quad(47)$$

即 電子의 加速度는 恒常 速度와 磁場이 決定하는 平面에 垂直하다。

(45)式에서 $\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2=0$

$$\therefore\quad \left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|=Const.$$

電子의 速度의 크기는 不變하다。

(47)에서 $\quad\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{H}=Const.$

即 電子의 $\mathbf{H}$ 方向의 速度成分은 不變하다. 따라서 $\mathbf{H}$와 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$가 만드는 角은 恒常一定하다。

(44)式에서 $\quad\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=\frac{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}{m_0}\left|e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H}\right|$

$$=\frac{e\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}{m_0}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\cdot|\mathbf{H}|\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt},\mathbf{H}\right)$$

$$=Const.$$

加速度의 크기는 一定하다。

電子軌道의 曲率半径(Vector) $\mathbf{R}$는

$$|\mathbf{R}|=\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2\Big/\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|=\frac{m_0\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}{e|\mathbf{H}|\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\Big/\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\mathbf{H}\right)$$

曲率 Vector의 크기는 一定하다。 $\mathbf{H}$에 垂直한 平面에 있어서의 軌道의 正射影의 曲率 半径 R_H는

$$R_H=\frac{m_0\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|}{e|\mathbf{H}|\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\sin\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt},\mathbf{H}\right)$$

$$=Const.$$

正射影은 半径 R_H인 円이다。

以上으로서 電子는 螺旋運動을 함을 안다。 古典力学에서 얻은結果에 比하여 R_H가 $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}$ 倍 크게 될 따름이다。 그러나 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\ll c$ 될때에는 $\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}\fallingdotseq 1$

함으로 古典力学的計算은 光速에 比하여 낮은 速度의 電子에 対하여서는 正當하다

[D] 不変電磁場에 있어서의 電子運動

이때의 運動方程式은 다음과 같이 쓸수있다

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\right)=e\mathbf{E}+e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H}$$

이와 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ 와의 scalar 乘積을 만들면

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{d\mathbf{r}}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\right)=e\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}+e\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

或은

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}\right)-\frac{m_0\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}=e\mathbf{E}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

兩辺을 t에 関하여 積分하면

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}=e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}+A$$

初期條件으로서 $[\mathbf{r}]_{t=0}=0,\ \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]_{t=0}=\mathbf{v}_0$

를 取하면

$$\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)^2}}-\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\right)c^2=e\mathbf{E}\cdot\mathbf{r}\ \cdots\cdots$$

이다。이것은 電子의 에너-지式이다. 式이 明示하는 바와같이 磁場 H는 全然電子의 에너-지에 関與치 않는다。 只今 z軸을 H方向에 取하고, x軸 y軸을 이에 垂直히 取하면 이 座標系에 対하여 運動方程式은 다음과 같이 된다。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=eE_x+e|H|\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=eE_y-e|H|\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dz}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=eE_z$$

一般的으로 이 聯立微分方程式을 풀려면 大端히 複雜하다

特히 $\mathbf{H}\perp\mathbf{E}$ 및 電子의 初速度 v_0가 $v_0\parallel\mathbf{E}$ 의 경우를 考察하면

이때 웃式은

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=e|\mathbf{E}|+e|\mathbf{H}|\frac{dy}{dt} \quad \text{-----}(49)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\quad〃\quad}}\right)=-e|\mathbf{E}|\frac{dx}{dt} \quad \text{---------}(50)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\quad〃\quad}}\right)=0 \quad \text{---------}(51)$$

(51)에서 初期條件을 考慮하면 解로서

$$z=z_0\ (const)$$

를 얻는다. 따라서 第(49)式과 (50)式은

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dx}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=e|\mathbf{E}|+e|\mathbf{H}|\frac{dy}{dt} \quad \text{---------}(52)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\frac{dy}{dt}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}}\right)=-e|\mathbf{H}|\frac{dx}{dt} \quad \text{---------}(53)$$

式은

$$\frac{m_0\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{m_0}{c^2}\frac{dy}{dt}\left\{\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}\right\}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}^{\,3}}=e|\mathbf{E}|+e|\mathbf{H}|\frac{dy}{dt} \quad \text{--}(54)$$

$$\frac{m_0\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{m_0}{c^2}\frac{dx}{dt}\left\{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}\right\}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}^{\,3}}=-e|\mathbf{H}|\frac{dx}{dt} \quad \text{----}(55)$$

(48)式에서

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}^{\,3}}=\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}-m_0\beta\right)^3\Big/m_0^2 \quad \text{---}(56)$$

但 $\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}$ 이고 $\mathbf{E}$와 x軸이 一致하게끔 x軸을 取하였다

$(54)\times\frac{dx}{dt}+(55)\times\frac{dy}{dt}$

$$\frac{m_0\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}^{\,3}}=2e|\mathbf{E}|\frac{dx}{dt}$$

이에 (56)을 代入하면

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}=\frac{2e|\mathbf{E}|m_0^2}{\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x-m_0\beta\right)^3}\frac{dx}{dt}$$

初期條件을 考慮하여 兩辺을 t에 關하여 積分하면

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=-\frac{m_0^2c^2}{\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x-m_0\beta\right)^2}+v_0^2+\frac{c^2}{\beta^2}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = -\frac{m_0^2 c^2}{\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x - m_0\beta\right)^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + v_0^2 + \frac{c^2}{\beta^2} \quad \text{------} (57)$$

이것을 t에 関하여, 微分하면

$$\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{e|\mathbf{E}|\, m_0^2}{\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x - m_0\beta\right)^3}\frac{dx}{dt} - \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{----} (58)$$

(53)의 両辺을 t에 関하여 積分하면

$$\frac{m_0 \frac{dy}{dt}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}}} = -e|\mathbf{H}|x \quad \text{------} (59)$$

이式은 初期條件을 考려하여 있다。

(54)式에 (57), (58), (59)를 代入한 다음 簡單히 하면 ·

$$\frac{m_0^3}{\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x - m_0\beta\right)^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m_0^3 e|\mathbf{E}|}{c^2\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x - m_0\beta\right)^3}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$
$$= \left(e|\mathbf{E}| - \frac{e^2\mathbf{H}^2}{m_0}x\right) \cdot \frac{m_0^2}{\left(\frac{e|\mathbf{E}|}{c^2}x - m_0\beta\right)^2}$$

式은 $$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{e|\mathbf{E}|}{(e|\mathbf{E}|x - m_0\beta c^2)}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{e^2\mathbf{H}^2}{m_0^2}x - \frac{e|\mathbf{E}|}{m_0}\right) = 0 \quad \text{---} (60)$$

이것이 x座標를 時間의 函数로서 決定하는 微分方程式이다。二階二次微分方程式;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + F(x) = 0 \quad \text{--------} (61)$$

와 同一한 꼴을 가진다。

이微分方程式을 풀려면 恒数変化法을 使用한다。于先 이方程式에 있어서 第三項을 無視한 한 微分方程式;

$$\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 0$$

를 生覺하여 이를 積分하면

$$\frac{dx}{dt}e^{\int f(x)dx} = C$$ 但 C는 積分常数이다。

여기서 C를 t의 函数라 生覺하여 両辺을 t에 関하여 微分하면

$$\left\{\frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}e^{\int f(x)dx} = \frac{dC}{dt}$$

(61)에 依하여 $$-F(x)e^{\int f(x)dx} = \frac{dC}{dt}$$

故로 $$C\frac{dC}{dt} = -F(x)e^{2\int f(x)dx}\frac{dx}{dt}$$

兩辺을 t에 関하여 積分하면

$$C^2 = A - 2\int F(x)e^{2\int f(x)dx}dx$$

여기서 A는 積分常数이다

故로 $$\frac{dx}{dt}e^{\int f(x)dx} = \left[A-2\int F(x)e^{2\int f(x)dx}dx\right]^{1/2}$$

$$\therefore\ t = \int \frac{e^{\int f(x)dx}}{\left[A-2\int f(x)e^{2\int f(x)dx}dx\right]^{1/2}} + B$$

但 B는 積分常数이다。

이것이 微分方程式(61)의 一般解이다。

(60)式에 있어서는

$$f(x) = \frac{e|\mathbf{E}|}{e|\mathbf{E}|x - m_0\beta C^2}$$

$$F(x) = \frac{e^2\mathbf{H}^2}{m_0^2}x - \frac{e|\mathbf{E}|}{m_0}$$

이고 初期條件

$$\left[\frac{dx}{dt}\right]_{t=0} = v_0,\quad [x]_{t=0} = 0$$

를 使用하여 上記한 積分常数 A, B를 決定하면 一般解는 다음式으로 表示된다.

$$t = \int \frac{e|\mathbf{E}|x - m_0\beta C^2}{\left[m_0^2v_0^2\beta^2C^4 - \left\{\frac{\mathbf{E}^2H^2e^4}{2m_0^2}x^4 - \frac{2e^3|\mathbf{E}|^3+4\beta|\mathbf{E}|H^2C^2e^3}{3m_0}x^3 + (e^2H^2\beta^2C^4+2\mathbf{E}^2e^2\beta C^2)x^2 - 2m_0e|\mathbf{E}|\beta^2C^4x\right\}\right]^{1/2}}dx + B$$

이 式의 右辺은 楕円積分이며 Liouville氏가 証明한 바와 같이 이것은 一般的으로 初等函数로서 表示할수 없다. 이와 如히 t와 y의 関係式도 亦是 楕円積分을 包含한다. 이 両式은 電子軌道의 媒介変数方程式이다。그러나 電子의 速度가 光速에 比하여 매우 적을 때에는 古典的 計算과 一致함을 証明할수 있다. 以上 一個의 電子를 質点으로 보아 그의 運動을 古典力学 및 相対性力学을 가지고 究明한 結果를 互相対比하면서 論하여왔다。使用한 運動方程式이 Lagrange 函数든가 Hamilton 函数든가 或은 Jacobi의 偏微分方程式 等이 아니었기 때문에 多少 計算이 複雜히 되는 경우가 있었다

그러나 이러한 高尙한 運動方程式을 使用치 않음으로서 이 論文은 基礎的 解析을 理解하는 사람이면 누구나 없이 다 알수있는 效果를 가져 올것이다.

誘導된 式에 明白히 나타난 바와 같이 이들 兩力学에서 얻은 結果는 各各 틀림을 보였다. 그러나 相对性力学에서 얻은 結果를 中級数에 展開하였을때 처음項이 언제나 古典力学에서 얻은 式을 表示하였고 第二項以下는 $\frac{v}{c}$에 対하여 二次以上의 項으로 構成되고 있었다. 또 時間t도 分子로서 包含하고 있었다. 여기서 v는 物体의 빠름이고 c는 真空中光速이다. 이것은 電子에만 局限된것이 아니고 電子以外의 物体運動을 研究하여 보아도 마찬가지라는 것을 나는 나의 過去의 研究에서 알았다. 이로서 確実히 古典力学은 物体運動의 細密한 認識에는 效果가 적다는것을 안다. 그러나 光速에 比하여 몹시 적은 速度를 가진 物体나 運動時間이 極히 적은 物体의 運動에 있어서는 相当히 相对性力学과 잘 一致함을 보았다. 우리가 日常経験하고 있는 物体의 速度는 光速에 比하여 大端히 적을뿐만 아니라 그의 運動時間도 짜르다.

그런 까닭에 우리의 日常経験을 Newton力学(古典力学)으로서 充分히 説明할수가 있었던 것이다. 一段 우리가 超高速의 物体를 取扱할때에는 $\frac{v}{c}$를 無視치 못하는 限 当然히 相对性力学을 가지고 考察하여야 한다. 物体의 速度의 大小 및 運動時間의 長短如何를 莫論하고, 처음 부터 相对性力学的 運動方程式을 가지고 微分方程式을 세워 이를 풀어가면 生覚치 않던 巧妙한 物体運動秘密을 探知할수가 있을 것이다.

(註)

※ 1932年 米国物理學者 C. D. Anderson氏는 宇宙線霧函의 寫眞中에서 Dirac 氏의 相対性 電子論에서 結論지워진 陽電子(Positron)를 発見한은 今日 누구나 없이 잘 아는 事実이다.

이것은 宇宙線中에 包含된 γ線이 原子核의 附近에 오면 갑자기 消滅되고 陰陽両種의 電子를 発生하는 現象(輻射의 物質化現象)이 関聯되어 発見된것이다.

最近에 와서는 放射線元素가 放射하는 γ線도 物質에 맞으면 電子対를 発生하는것도 発見되었다. 只今 γ선의 振動数를 ν. planck 常数를 h라 하면 光量子로서의 γ선의 에네-지 E는

$$E = h\nu$$

이다. 電子의 静止 質量을 m_0 速度를 v라 하면

$$\frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

는 陰陽両種의 電子의 에네-지이다. 에네-지와 質量의 同等性에 依하여

$$h\nu = \frac{2m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{--------(1)}$$

라 놓을수 있다. 이것은 γ선이라 하는 光量子 $h\nu$가 없어지고, 그代로 両種의 電子가 発生하였기때문에 이렇게 놓을수가 있다. Anderson氏의 霧函의 磁場의 세기를 H라 하면 5.[C]에서 論한 바에 依하여 発生된 電子의 曲率半径 R_H는

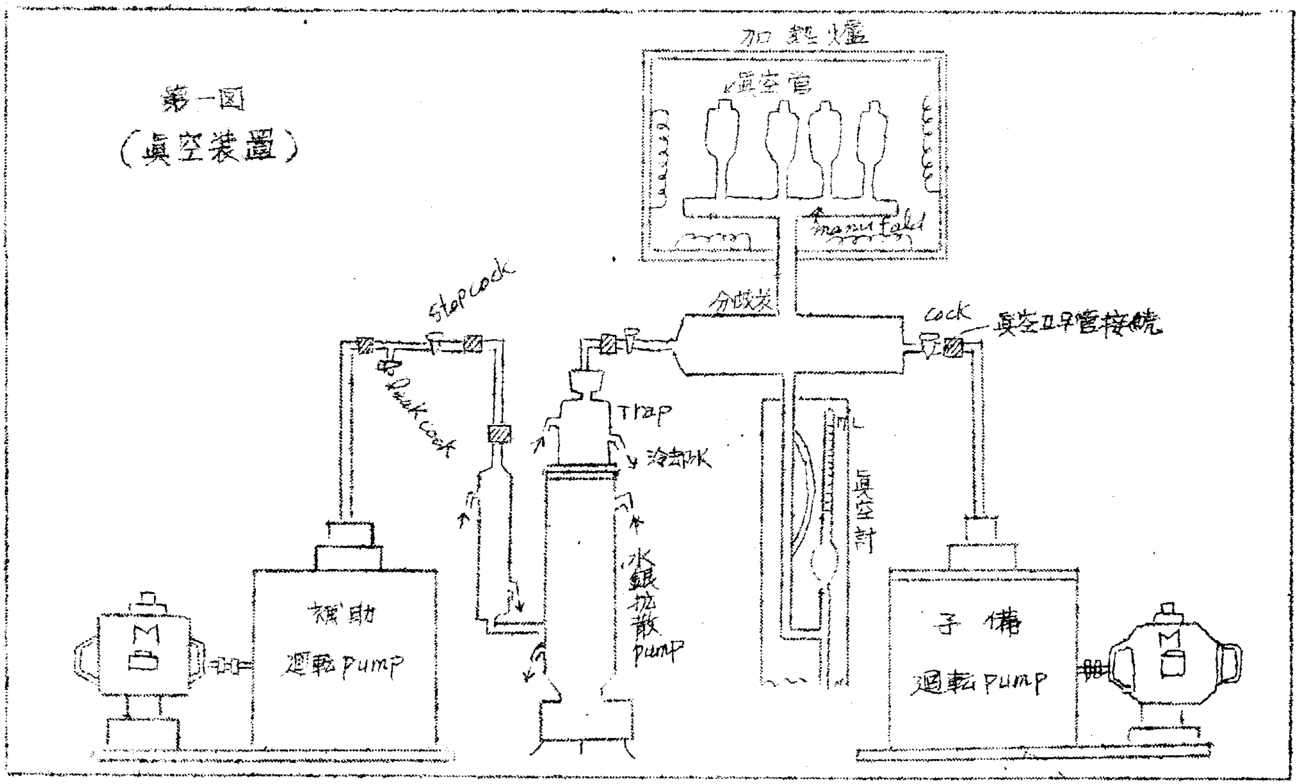
$$R_H = \frac{m_0 v}{e|H|\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{-----(2)}$$

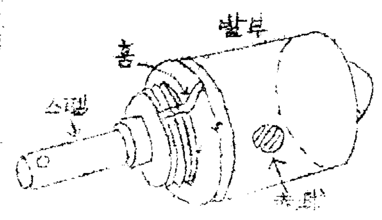
(1)과 (2)式에 依하여 $m_0 = \sqrt{h^2\nu^2 - 4c^2e^2H^2R_H^2}\,/\,2c^2$ 이다.

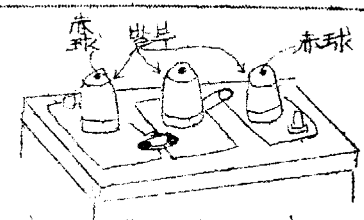
H와 R_H의 測定에서 m_0를 決定하면 이式의 正否를 判断할수 있다. 事実 Anderson氏의 実測値를 여기에 代入하면 이 10式의 計算値와 一致한다. 이것은 De Broglie의 物質波動論에 依하여서도 밝힐수 있다.

第一図

(眞空裝置)







(液面의水準을 알수있다)

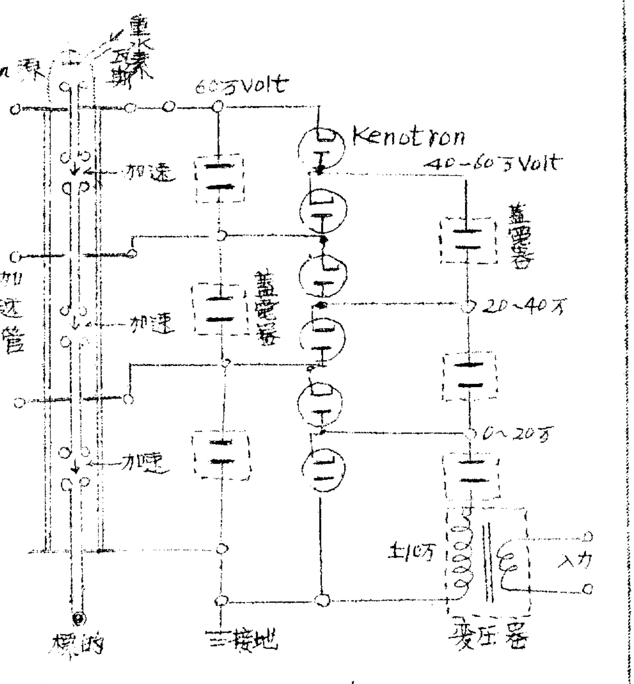


図1 Cockroft-Walton 装置

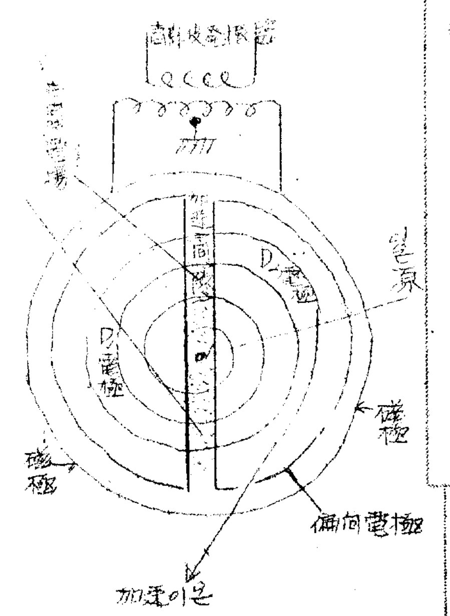
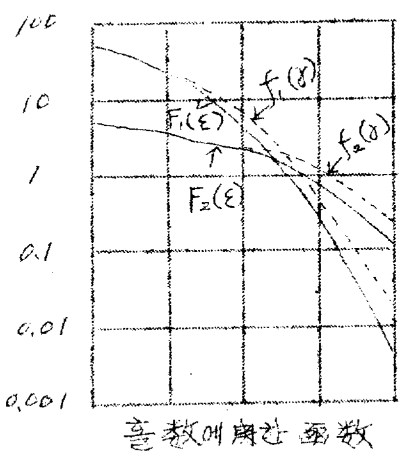


図2 Cyclotron原理



흡数에關한 函数