演算子計算法 (技術数学)

Operational Caculus Method

商工部 電気試驗所 會員 金 俊 植
Zoonsick Kim

Ⅱ 本 論

Ⅰ 過渡現象解法의 古典的形式

Ⅰ-1 過渡現象特히 線形微分方程式에 表現되는現象에對한 解法으로서 演算子計算法처럼 簡易하고 確実한方法은 다시없을것이다。即 絶対的이라고 말할수있다。그러나 이法에 対하야 完全히 Master 하는것이 큰 問題이다。完全히 Master 하랴면 高度의 微分積分知識. 微積分方程式. 函数論. 其他 Matrix 等의 知識이 基礎的으로 必要한것이나 그러나 此等 基礎에対하야 깊이 研究할랴면 우리技術人으로서 時間的으로나 労力的으로나 到底히 그러한 餘裕가 없는것이다。또 그리고그와같이 数学的立場에서 完全嚴密히 Master 하랴면 거진 一生을要할 事業이다。

그러나 簡易한程度의 演算子法을 Master 하여가지고 爲先 應用하여가면서 深度의 数学的嚴密性을 研究하는것이 必要하다고 生覺하는바이다。

過渡現象은 電気方面뿐아니라 機械工学、航空工学、造船工学, 建築·土木工学等 何方面을 勿論하고 그重要는 絶大한것이다。그中 電気工学의 過渡現象은 가장 代表的이고 基礎的이라고본다。

過渡現象研究는 두가지 길이있으니 하나는 実驗的方面이고 또하나는 数学的으로 吟味하는것인데 至今까지 実驗的으로 研究하여온것은 主로 人工的으로맨드는 過渡現象(事故)이고 그야말로 自然発生하는 現象을 잘 Catch 못하였든것이다。이는 다름이 아니라 그実驗方法의 唯一한道具는 Oscillograph 인데 至今까지 自働 Oscillograph가 없었는故로 可及的 自然事故에 近似한事故로 人工的으로 만들고 그짤븐時間에 Oscillograph 의 撮影을하는것이였다。筆者가 満洲電業会社에 勤務할때(1945年春頃)鉄共振作用을 始動装置에 應用하야 自動 Oscillograph 을 部分的試驗을하야 試作品을 맨들려다가 完成치못하고 말었는데 最近外国誌에보니 美国에서 협신 完全한 性能을가진 自働 Oscillograph가 完成되였다고 報道된것을보았다。그런故로 今后로 過渡現象에 큰 도움이 될것이고 一方 数学的研究에 있어서도 演算子法의 完全한数学的理解와 그内容発展에따라 큰 進展을 볼것이니 実驗方面과 併하야 過渡現象의 神秘는 우리앞에 完全히 解明될것은 自明한 일이라고 生覺한다。

이 演算子計算法은 처음 19世紀末英国人 O.Heviside氏가 提唱한것이나 当時氏가 그数学的根據를 確実히 闡明하여 두지않었든故로 많은 物理学者, 数学者들이 冷笑하고 一顧의価値조차 認定치 않었든것이다。

其後 Bromwich, J·R·Carson, K·W·Wagner 等의数学者들이 나서 演算子法의 数学的基礎証明을하여 至今에 와서는 應用数学界의 重大部門을 形成하고 있으며 또한 至今 漸々 発展途上에 [illegible]

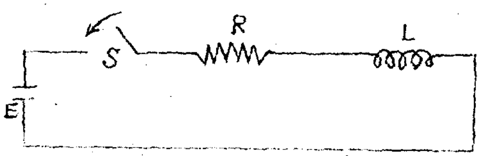
筆者는 演算子計算法의 数学的根據에対한 說明을 하기前에 簡単한 過渡現象例를 微分方程式에依한 解法을 說明하면서 그를 또 演算子計算法에依한 解法을爲先 機械的으로 說明하여서 讀者로하여금 所謂 演算子計算法이란 이런形式인 것이란 것을알며 若干한것을 應用도 할수있게한다음 그数学的根據를 말하고 그다음 漸次 高度의應用例를 說明하기로한다。

I-2

(가) R-L 直列回路에 直流起電力 即課抵抗 R(Ω) Self-inductance L(H)를 直列한 回路에 D.C起電力 E(v)를 Switch를投入하야 課하면 그回路에는 時間 t<0, 時는 電流가 흐르지않었고 t>0 에서부터電流 i가 흘르기 始作할것이다。따아서 그回路에서 成立되는 微分方程式은 다음같은것이다。

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E \text{ ---------- } (2\text{-}1)$$

이式을풀면



(Fig. 2-1)

$$i=\left\{\int\frac{E}{L}e^{\frac{R}{L}t}dt+C\right\}e^{-\frac{R}{L}t} \cdots\cdots (2\text{-}2)$$

C는 積分常数이니 $(i)_{t=+0}=0$ 의條件으로서 求하는 値하니라.

$$i=\frac{E}{L}\times\frac{L}{R}e^{\frac{R}{L}t}\times e^{-\frac{R}{L}t}+Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

$$=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t} \cdots\cdots (2\text{-}3)$$

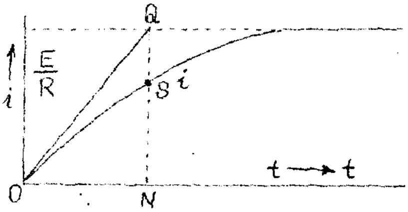
이式에 t=+0 를 넣으면

$$\frac{E}{R}+C=0 \qquad \therefore C=-\frac{E}{R}$$

$$\therefore \frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t}) \text{ ---- } (2\text{-}4)$$

이른는 時間의 Dimeusion 을 有한것임으로 此를 普通時定数라 하나니라.

그런故로 i의値는 印課当初에는 0 에서 시작하야 時間이 커감에딸아 一定値 $\frac{E}{R}$ 에 到着함을 알수있나니라。



(Fig. 2-2)

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{t=0}=\frac{E}{L}=\frac{NQ}{ON}$$

$$\therefore NQ\frac{L}{E}=ON=\frac{E}{R}\cdot\frac{L}{E}=\frac{L}{R}$$

故로 i의 $t=\frac{L}{R}$ 時의値 即

$$\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}\cdot\frac{L}{R}}\right)=\frac{E}{R}\left(1-\frac{1}{e}\right)=0.632\frac{E}{R}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{E}{R} \cdots\cdots (2\text{-}5)$$

$i=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$ 에있어 $\frac{E}{R}$ 는 恒久値, $\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$ 는 過渡値라한다。

또한 一定値電流가 흐르고있는 R-L 回路를 Switch S 에依하야 短絡하여보면

$$L\frac{di}{dt}+Ri=0 \text{ -------------- } (2\text{-}6)$$

故로 $i=Ce^{mt}$ 라 假定하면 (2-6)式은

$$mLAe^{mt}+RAe^{mt}=0$$

$$mL+R=0 \qquad \therefore m=-\frac{R}{L}$$

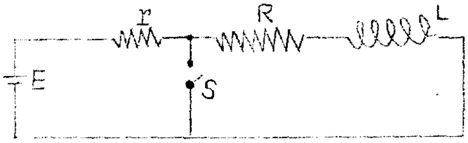
$$\therefore i=Ce^{-\frac{R}{L}t} \text{ ------------ } (2\text{-}7)$$

C → 積分定数, i의 $t<0$ (S를投入하기前) 時의値를 I_0 라하면

$$\left(Ce^{-\frac{R}{L}t}\right)_{t=+0}=(i)_{t=-0}$$

의條件이 成立함으로 即 $C = I_0$

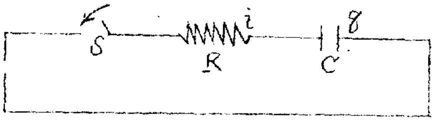
$$\therefore i = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \cdots\cdots (2\text{-}8)$$



(Fig. 2-3)

(나) R−C 直列回路에 直流起電力印課

R(Ω)에 C(F)를直列한回路에 D.C 起電力 E(v)를課하면



(Fig. 2-4)

$$Ri + \frac{\int i\,dt}{C} = E,$$

C의 両極板上下에 蓄積되는 電荷를 $+q$ $-q$ 라하야

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \cdots\cdots (2\text{-}9)$$

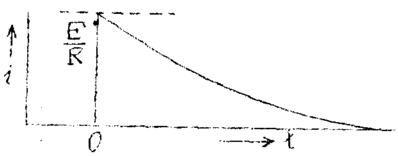
(2-4)式과 같이하나

$$q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \cdots\cdots (2\text{-}10)$$

됨을 알수있나니라. 故로

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdots\cdots (2\text{-}11)$$

인제 電荷 q를 가지고있는 蓄電器 C를 抵抗 R을 通하야 放電시킨다면



(Fig. 2-5)

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \cdots\cdots (2\text{-}12)$$

$$\therefore q = Ce^{-\frac{t}{RC}} \cdots\cdots (2\text{-}13)$$

$t<0$ 時의 $q = q_0 = CV_{-0}$ 임으로

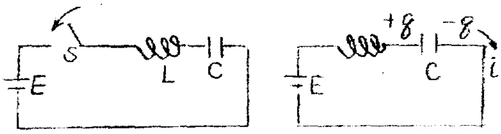
$$q = CV_{-0} e^{-\frac{t}{RC}} \cdots\cdots (2\text{-}14)$$

$$\therefore i = \frac{dq}{dt} = \frac{V_{-0}}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \cdots\cdots (2\text{-}15)$$

但 V_{-0}는 放電前 即 $t<0$時의 Condencar C의 両極板间의電压

(다) L−C 直列回路에 直流起電力印課

L−C直列回路에 D.C 起電力 E를 課하면



$t<0$ $t>0$

(Fig. 2-6)

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E \cdots\cdots (2\text{-}16)$$

이式의特別解는 觀察에依하야 $q' = CE$

그리고 一般解는

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$$

인제 $q = Ae^{wt}$ 로하야 (2-16)式은

$$m^2 LAe^{wt} + \frac{Ae^{wt}}{C} = 0$$

$$\therefore m^2 L + \frac{1}{C} = 0$$

$$\therefore m = \pm\sqrt{-\frac{1}{LC}} = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$$

故로 一般解

$$q'' = C_1 e^{j\frac{1}{\sqrt{LC}}} + C_2 e^{-j\frac{1}{\sqrt{LC}}} = C_1(\cos wt + j\sin wt) + C_2(\cos wt - j\sin wt)$$

(但 $w = \frac{1}{\sqrt{LC}}$)

故로

$$q'' = A'\cos wt + B'\sin wt \cdots\cdots (2\text{-}17)$$

$A' = C_1 + C_2$, $B' = j(C_1 - C_2)$ 積分常数

$$\therefore q = q' + q'' = CE + A'\cos wt + B'\sin wt \cdots\cdots (2\text{-}18)$$

常数를 決定하기爲하야

$$i=\frac{dq}{dt}=-\omega A'\sin\omega t+\omega B\cos\omega t \quad \text{-------(2-19)}$$

$q_{-0}=q_{+0}$, $i_{-0}=i_{+0}$ 의條件이 成立한다고봄으로 (2-18),(2-19)式에서

$$\left.\begin{aligned}&CE+A'=q_{-0}.\ A'=q_{-0}-CE\\&\text{同様으로}\qquad B'=\frac{i_{-0}}{\omega}\end{aligned}\right\}\text{---(2-20)}$$

$$\left.\begin{aligned}q&=CE+(q_{-0}-CE)\cos\omega t+\frac{i_{-0}}{\omega}\sin\omega t\\i&=-\omega(q_{-0}-CE)\sin\omega t+i_{-0}\cos\omega t\end{aligned}\right\}\text{-------(2-20)}$$

然而 $i_{-0}=0$, $q_{-0}=0$ 가될것임으로

$$\left.\begin{aligned}q&=CE(1-\cos\omega t)\\i&=\omega CE\sin\omega t\end{aligned}\right\}\text{-------(2-21)}$$

即 L中의 電磁勢力과 C의靜電勢力이 서로 來往하는 한 振動現象을 現出하나이-라。

그러나 實際에 있어 이런것은없고 多少間이와勢力을消費하는 抵抗分이있어 이런 所謂 Double-Energy Transient 는 얼던時間後에는 消滅하여버리나니라.

以上말한 몇가지例의 微分方程式은 簡單한것임으로 그解法도 簡單하나 大槪는如斯히 微分方程式은 形成한다하드라도 그解法이 簡單치않고 또計算도 相当히 煩雜한것이 普通인데 이것을 機械的으로 簡明하게 풀어야할것이 即 이 Operational Method 이다。

그래서 原則的으로말하면 Operational Method 에 理論的根據를먼저 說明할 것이나 爲先 이로計算하는 簡單한例를 說明하야이의 形式을 짐작케하고 그다음 数學的 根據에対한 理論的說明을 하기로하자。

演算子計算法이란 (2-1)式 即

$$L\frac{di}{dt}+Ri=E$$

等과같은 式에 있어 $\frac{d}{dt}$ 와같은記号를 한数와같이 取扱하야 이를 $Lpi+Ri=E$ 와如히한 代数的数式에 変更시키고 그代数的을 P에対하여서 풀고 그다음 P에関한数式을 時間t 의 函数에 変換하야 最后의解答을 얻난것이다。

$Lpi+Ri=E$ 式에있어 電流 i에対하야 풀면

$$i=\frac{E}{LP+R}\quad\text{-------(2-22)}$$

$$\frac{E}{LP+R}=\frac{E}{L\cdot p}\left(\frac{1}{1+\frac{R}{Lp}}\right)\text{-------(2-23)}$$

이를 P의分数形 $\frac{1}{p}$形의 冪級数에展開하야보면

$$\frac{E}{L\cdot p}\left(\frac{1}{1+\frac{R}{Lp}}\right)=\frac{E}{L\cdot p}\left(1-\frac{R}{Lp}+\frac{R^2}{L^2p^2}-\frac{R^3}{L^3p^3}+\cdots\cdots\right)\text{----(2-24)}$$

그런데 P가 $\frac{d}{dt}$ 와같이 t에対하야 微分하는 形式을 表한다면 그의逆数 $\frac{1}{p}$는 t에関하야 積分하는것으로밖에 볼수없다하야

$$\frac{1}{p}=\int_0^t dt=t\quad \frac{1}{p^2}=\int_0^t dt\int_0^t dt=\frac{t^2}{2!}$$

同様으로

$$\frac{1}{p^n}=\frac{t^n}{n!}\quad\text{-------(2-25)}$$

인제 (2-24)式

$$\frac{E}{L}\left(\frac{1}{p}-\frac{R}{Lp^2}+\frac{R^2}{L^2p^3}-\frac{R^3}{L^3p^4}+\cdots\cdots\right)$$

와같이하야 이를(2-25)式의 法대로 풀면

$$\frac{E}{L}\left(t-\frac{R}{L\cdot 2!}t^2+\frac{R^2}{L^2}\frac{t^3}{3!}-\frac{R^3}{L^3}\frac{t^4}{4!}+\cdots\right)\text{----(2-26)}$$

이는또

$$\frac{E}{R}\left(\frac{R}{L}t-\frac{1}{2!}\frac{R^2}{L^2}t^2+\frac{1}{3!}\frac{R^3}{L^3}t^3-\frac{1}{4!}\frac{R^4}{L^4}t^4+\cdots\cdots\right)$$

$$=\frac{E}{R}\left\{1-\left(1-\frac{R}{L}t+\frac{1}{2!}\frac{R^2}{L^2}t^2-\frac{1}{3!}\frac{R^3}{L^3}t^3+\frac{1}{4!}\frac{R^4}{L^4}t^4\cdots\cdots\right)\right\}\text{------(2-27)}$$

이 ( ) 内의級数는 即 $e^{-\frac{R}{L}t}$ 임으로 (2-27)式은 $\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$ 가되야 微分方程式 普通解法에서얻은 答과 꼭 같으니라。

또 (2-9)式

$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E$ 를 이 演算子法으로풀면

$q + RCPq = CE$

$$q = \frac{CE}{1+RCP} = \frac{CE}{RCP}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{RCP}} = \frac{CE}{RCP}\left(1-\frac{1}{RCP}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(RC)^2P^2} - \frac{1}{(RC)^3P^3} + \cdots\cdots\right) =$$

$$\frac{CE}{RC}\left(\frac{1}{P} - \frac{1}{RC}\frac{1}{P^2} + \frac{1}{(RC)^2}\frac{1}{P^3} - \cdots\cdots\right) =$$

$$\frac{CE}{RC}\left(t - \frac{1}{RC}\cdot\frac{t^2}{2!} + \frac{1}{(RC)^2}\cdot\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{(RC)^3}\cdot\frac{t^4}{4!} + \cdots\right)$$

$$= CE\left\{1-\left(1-\frac{t}{RC}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{t^2}{(RC)^2} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{t^3}{(RC)^3}+\cdots\right)\right\} \quad \text{------ (2-28)}$$

故로 $q = CE(1-e^{-\frac{t}{RC}})$, (2-10) 과 꼭같다.

이 두例는 Heavicide 의冪級数에 依한解法을說明한것이고 이를 Heavicide 의 所謂 展開定理(Expansion Thecrem) 에依하여 풀면 더욱 速하고 簡便하게 解答을얻을수있으나 初学者諸位는 다음展開定理(公式) 을 機械的이라도 十分熟達함이 좋다고 生覺한다.

O. Heavicide 氏가 19世紀末에提唱한 展開定理:

$\frac{M(P)}{N(P)} i = E$ 形式에表現할수있는 電氣現象에対하여 $i = \frac{N(P)}{M(P)}E$ ------- (2-29)

但 $P = \frac{d}{dt}$, N(P), M(P)는 P의整函数

또 (2-29)式에關하여 結局 이를 t函数에 表現한것은:

$$i = \frac{N(0)}{M(0)}E + \sum_n \frac{N(P_n)}{P_n \frac{dM(P_n)}{dP_n}} e^{P_n t} E \quad \text{---- (2-30)}$$

라고하였다.

P_n 는 M(P)=0의根 (但複根은 않됨)

$\frac{dM(P_n)}{dP_n}$ 는 P의 函数 M(P)를 P에 関하여 微分한 微分関係에 P의函数 M(P)의根 P_n을 代入한것이다.

이제 이公式을利用하여 微分한 微分関係에 P의函数 M(P)의 根 P_n 을 代入한 것이다.

이제 이公式을利用하여

(2-16式):

$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E$ 를 풀어보기로하자.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = LP^2q + \frac{q}{C} = E \quad \text{---- (2-31)}$$

故로 $LCP^2q + q = CE$

$$q = \frac{CE}{LCP^2+1} \quad \text{-------- ------(2-32)}$$

이를 展開定理에 対照하여보면

CE는 E에, N(P)는 1에, M(P)는 LCP^2+1 에各々該当하다.

故로 N(0) = 1, M(0)=1, $LCP^2+1=0$ 의根:

$P = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}} (= jw)$, $\frac{dM(P)}{dP} = 2LCP$

此等関係를 (2-32)式을 解答하기爲하여 (2-30)式 展開定理에 適用하면

$$q = CE + \frac{CE}{jw.2LC.jw}e^{jwt} + \frac{CE}{-jw.2LC.(-jw)}e^{-jwt}$$

$$= CE - \frac{CE}{w^2LC}\left(\frac{e^{jwt}+e^{-jwt}}{2}\right)$$

$$= CE\left(1-\frac{1}{w^2LC}\cos wt\right), \quad \left(\frac{1}{w^2LC}=1\right)$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore q &= CE(1-\cos wt) \\ j &= \frac{dq}{dt} = wCE\sin wt \end{aligned}\right\}$$

이는 (2-21) 式과 꼭 같으니라.

그러면 $\frac{d}{dt} = P$, $\frac{1}{P} = \int dt$ 로하여 한數와 같이 取扱하는 数学的根據는 어디있는냐는것이 重大한問題임에도不拘하고 Heavitide는

여기에對하여조금도 說明하지않고 單只 公式을提示하고 微分方程式에依한解答과 結果에있어 同一하니 正当하다고主張한것 뿐이였다. 오늘날까지 이 Operational Method 가 普遍化하지못한것도 이法의 数学的根據가 일찍이 解明되지않았고 또 只今에도 이理論을理解하기에 相当한基礎 知識을要하는까닭이라고 생각한다.

一便 $\delta=\frac{CE}{HCR\cdot P}$ 等을 꼭($\frac{1}{P}$)의 冪級數에 展開하여야만되고 이를 假令

$$CE\left(\frac{1}{1+CRP}\right)=CE\left\{1-CRP+(CRP)^2-(CRP)^3+(CRP)^4-\cdots\cdots\right\}\cdots\cdots\cdots(2-33)$$

과같은式에展開하여서는 아무意味도 없는가하는것도 當当히 갖게되는 問題이다.

이(2-33)式을 다시 微分式形에 고쳐보면

$$CE\left(\frac{1}{1+CR\cdot P}\right)=CE-RC\frac{dE}{dt}+(RC)^2\frac{d^2E}{dt^2}-(CR)^3\frac{d^3E}{dt^3}+\cdots\cdots\cdots(2-34)$$

直流에있어 E의微分係數를取한다는것은 無意味(A·C에對하여서는大端히有意味)한 것이므로 此式의微分係數項은 없다고 생각하면 이는定常狀態의値 CE를表示하고있다。演算子法에있 $\frac{1}{P}$ 의昇冪級數에展開하여 過渡現象의解答을求하는것이 常道라고할수도 있겠으나 P의冪級數에展開하여 定常狀態를表하는 微分方程式의解答을 얻게되는것을 다음에 漸次로說明할것이나 이亦是 應用数学의重大한利得이라고 말할수있다.

至今까지 大体로印課電圧의 直流인境遇의應用例를說明하였으나 다음에交流의例를 몇가지說明한다음에 演算子法의数学的論據에 들어가기로한다。

以上

正 誤 表

頁	行	誤	正
1		W=I2R	$W=I^2R$
4		IL	I_L
〃		R1	R_1
		R1&R2	R_1 & R_2