

다양한 벡터 패턴 시각화를 위한 밀도 제한 이동최소제곱

이수빈^o, 김종현^{*}

^o강남대학교 소프트웨어융합학부,

^{*}인하대학교 소프트웨어융합대학(디자인테크놀로지학과)

e-mail: jonghyunkim@inha.ac.kr^{*}

Density-Constrained Moving Least Squares for Visualizing Various Vector Patterns

SuBin Lee^o, Jong-Hyun Kim^{*}

^oSchool of Software Application, Kangnam University,

^{*}College of Software and Convergence (Dept. of Design Technology), Inha University

● 요약 ●

물리 기반 시뮬레이션과 같이 연속적인 움직임을 표현하기 위해서 고차 보간(High-order interpolation)을 설계하는 것을 중요한 문제이다. 본 논문에서는 제약적인 벡터와 밀도 형태를 몬테카를로법을 사용하여 이동 최소제곱(MLS, Moving least squares)을 제공하여 이를 통해 속도 필드를 표현할 수 있는 방법을 제안한다. 결과적으로 밀도의 형태를 고려하여 MLS의 가중치가 적용된 결과를 보여주며, 그 결과가 벡터 보간에 얼마나 큰 영향을 끼치는지를 다양한 실험을 통해 보여준다.

키워드: 이동최소제곱(Moving least squares), 몬테카를로법(Monte Carlo method), 벡터장(Vector field), 밀도 제한(Density-constrained)

I. Introduction

이동최소제곱법은 분산된 데이터를 부드럽게 근사 또는 보간 하기 위해 사용되는 방법이다. 최소이동 제곱에 확률 밀도 함수를 적용하면 보다 정확하고 확률 분포를 고려한 결과를 얻을 수 있다. 이 방법은 유체, 변형체, 매쉬화 등의 분야에서 활용되고 있다[2].

도 나타나기 때문에 정확성 측면에서 효율성이 떨어진다. 본 논문에서는 밀도를 몬테카를로법을 활용하여 밀도가 분포되어 있는 위치를 추정한다. 추정된 위치와 주변 데이터 간의 거리를 계산해 MLS에 추가적인 가중치로 적용한다.

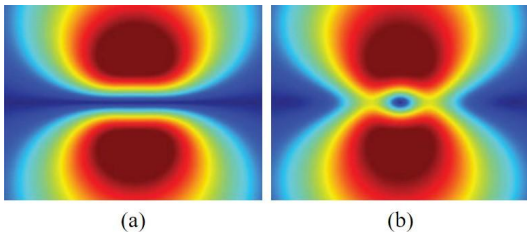


Fig. 1. Naive MLS(a) and Divergence-constrained MLS[1](b).

Fig. 1a은 수직으로 마주 보는 두 벡터를 제약으로 MLS를 계산한 결과이며, Fig. 1b는 발산 제약 기반 MLS를 통해 계산된 벡터장이다. 특히 이 결과는 벡터 제약을 발산 조건에 따라 다르게 표현할 수 있기 때문에 다양한 벡터장을 디자인하거나 물리 기반 시뮬레이션에서 활용할 수 있다[2]. 하지만 제약 조건이 벡터 형태로만 표현되기 때문에 내부 밀도의 형태를 고려하지 못하고, 이 부분이 보간된 필드에

II. The Proposed Scheme

2.1. Moving Least Squares

3차원 공간에서 위치 p_i 에서 제어 점이 N 개 주어졌을 때 그에 대한 다항식 함수는 다음과 같이 정의된다 (수식 1 참조).

$$f(x) = b^T(x)c \quad (1)$$

위 수식은 다음과 같이 해당 지점의 값 ϕ 를 보간한다 (수식 2 참조).

$$f(p_i) = b^T(p_i)c = \phi_i \quad (2)$$

2차원에서 샘플링 위치는 $[x, y]$ 이고, 3차원에서는 $[x, y, z]$ 이고, 피팅 다항식의 기저함수는 $b(x) = [b_1(x), \dots, b_k(x)]$ 이고, 미지수인 계수 벡터는 $c = [c_1, \dots, c_k]$ 이다. 일반적으로 다항식 공간인 m 이 2일/때의 2/3차원 기저함수 다음과 같다 (수식 3 참조).

$$\begin{aligned} b(x) &= [1, x, y, x^2, y^2, xy] \\ b(x) &= [1, x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, yz, xz] \end{aligned} \quad (3)$$

MLS는 수식 2에서 설명된 모든 제약조건에 가중치 함수 $W(|r_i|)$ 를 곱한 다음, 다음과 같이 하나의 방정식으로 만들 수 있다 (수식 4 참조). 여기서 r_i 은 $p_i - x$ 이다.

$$W(x)Bc(x) = W(x)\Phi(4)$$

여기서 W 는 $N \times N$ 대각행렬이고, B 는 $N \times k$ 행렬, 그리고 Φ 는 N 차원 벡터이다. 만약에 정규 방정식(Normal equation)을 적용하면 다음과 같이 다시 쓸 수 있다 (수식 5 참조)

$$B^T(W(x))^2Bc(x) = B^T(W(x))^2\Phi \quad (5)$$

여기서 $c(x)$ 를 얻기 위해서 선형 연립방정식을 풀어야 한다. 본 논문에서는 스칼라 기반의 MLS를 벡터 형태로 변환하기 위해 이전 기법을 이용한다[1]. 벡터 형태로 변환된 MLS는 수식 6을 사용해 계산한다.

$$\begin{aligned} W_{vec}(x)B_{vec}c_{vec}(x) &= W_{vec}(x)\Phi_{vec} \\ w &= 1/(|r|^4 + \epsilon^2) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서 W_{vec} 는 $dN \times dN$ 의 대각행렬로 가중치는 수식 7을 이용하여 계산한다. $dN \times dk$ 행렬인 B_{vec} 는 기저 함수, c_{vec} 은 MLS 계수, Φ_{vec} 은 제약 노드가 가진 속도를 나타낸다. MLS에서 B_{vec} 와 c_{vec} 간에 선형 시스템을 통해 계수 값을 계산해 속도를 보간 한다.

2.2. Density estimation with Monte Carlo method

몬테카를로법(Monte Carlo method)은 어떤 문제를 수치 계산으로 풀지 않고 난수를 이용한 확률을 통해 근사적으로 푸는 방법을 말한다. 난수의 발생 횟수 증가와 균일하게 분포했는지 여부에 따라 정확도가 높아진다. 몬테카를로법을 이용해서 원주율을 계산하는 방법은 가장 간단하고 잘 알려진 예시이다.

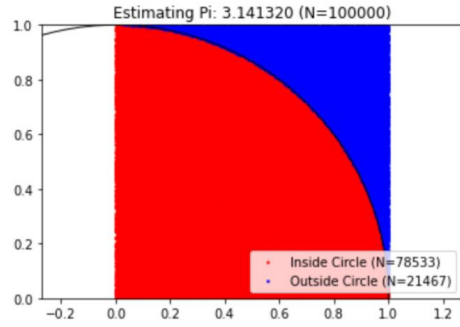


Fig. 2. Calculate PI with Monte Carlo method

먼저 정사각형 하나와 정사각형의 한 변의 길이를 반지름으로 하는 $\frac{1}{4}$ 원을 그린다. 정사각형 내부에 N 개의 난수를 생성한다. 원의 중심과 난수 간의 거리를 계산해 원 내부에 속하는지 아닌지를 판별한다.

생성된 난수의 개수가 충분하다면 수식 8과 같은 관계식이 성립한다. 여기서 a 는 $\frac{1}{4}$ 원 내부에 속하는 난수의 개수, N 은 전체 난수의 개수를 나타낸다.

$$\frac{\pi}{4} : 1 = a : n, \quad \pi = \frac{4a}{n} \quad (8)$$

본 논문에서는 원주율을 계산한 것과 같은 원리로 몬테카를로법을 이용해 이미지 내 분포된 밀도와 밀도 분포가 밀집된 위치를 추정한다. 수식 9에서 d 는 구하고자 하는 밀도, a 는 직접 설정한 임계점 이상의 밀도를 가지는 영역에 해당하는 난수의 개수, N 은 전체 난수의 개수를 나타낸다.

$$d : 1 = a : n, \quad d = \frac{a}{n} \quad (9)$$

우선 원활한 밀도 검출을 위해 임의의 밀도를 이산화한다. Fig. 3a는 입력 밀도 설정을 위해 사용한 원본 이미지이고, Fig. 3b는 0.5로 설정한 임계점을 기준으로 이산화한 결과이다. Fig. 3c와 Fig. 3d는 각각 난수의 개수를 1,000개와 100,000개로 설정해 몬테카를로 법으로 이미지 내 밀도를 추정한 것이다. 입력 밀도의 평균이 0.3476일 때, Fig. 3c의 추정치는 0.324, Fig. 3d의 추정치는 0.3452로 난수의 개수가 많은 Fig. 3d의 경우가 더 근사한 값을 가진다. 이를 바탕으로 이미지 내에서 밀도가 밀집한 위치 역시 추정한다. Fig. 3c와 Fig. 3d에 표시된 초록색 점은 추정한 밀도 밀집 위치를 나타낸다. 밀집 위치 역시 Fig. 3c는 시뮬레이션마다 조금씩 달라지지만 Fig. 3d는 거의 고정적인 결과가 나타난다.

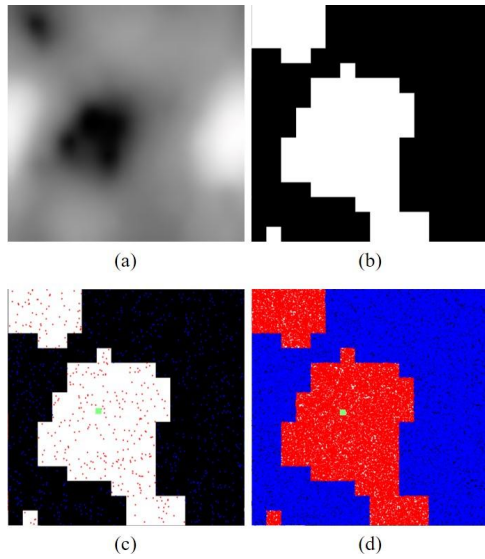


Fig. 3. Calculate densely location with Monte Carlo method :a (a) original density image, (b) discretized density, (c,d) estimated densely location with Monte Carlo method.

3.2 Weighting Function

몬테카를로법으로 추정된 밀도의 밀집 위치와 각 제약 노드 간의 거리를 계산한다. 각 제약 노드에 대한 계산 결과를 Min-max normalization을 이용해 0~1 사이의 값으로 정규화한다.

$$r = m_w \cdot dist \quad (10)$$

수식 10은 MLS에서 가중치 행렬을 구성하는 수식 7에서 사용되는 변수이다. 여기서 $dist$ 는 노드와 제약 노드 간의 거리를 계산한 변수이고 m_w 는 몬테카를로법으로 추정된 밀도 밀집 위치와의 거리를 정규화한 값으로 기존에 r 을 계산하는 과정에서 추가적인 가중치로 적용한다.

III. Results

Fig 4는 제약 노드가 가지는 속도 값을 고정된 2개의 상황에 대해 각각 연산을 수행한 결과이다. Fig. 4a는 속도를 가진 4개의 제약 노드 $p1(0.0558, -0.9984)$, $p2(-0.4041, 0.9147)$, $p3(-0.6049, -0.7962)$, $p4(-0.7164, 0.6976)$ 에 따라 기존 MLS를 계산한 결과이다.

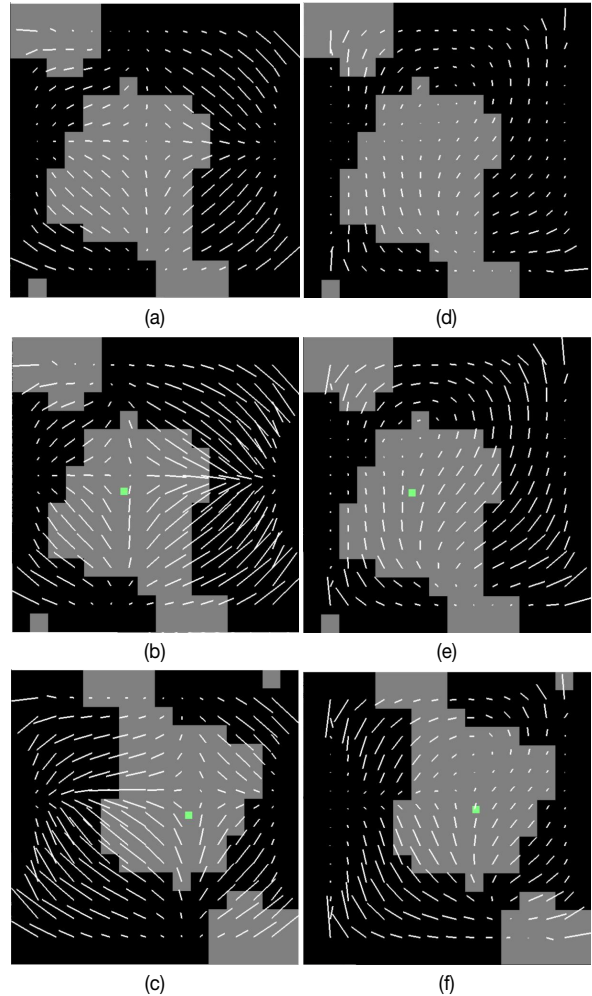


Fig. 4. Various vector patterns with our method : (a) original MLS scene1, (b,c) applying our method to scene1, (d) original MLS scene2, (e,f) applying our method to scene2.

Fig. 4b와 Fig. 4c는 Fig. 4a와 같은 조건에서 입력 밀도를 고려해 MLS를 계산한 결과이다. 이때, Fig. 4c는 밀도의 밀집 위치가 달라진 경우의 계산 결과를 확인하고자 Fig. 4b에서 사용한 입력 밀도를 형 변환으로 회전시킨 것을 사용했다. Fig. 4d는 Fig. 4a와는 다른 속도를 가진 4개의 제약 노드 $p1(0.9177, 0.397)$, $p2(0.9386, -0.3448)$, $p3(0.2805, -0.9598)$, $p4(0.9249, 0.3802)$ 에 따라 최소 이동 제곱을 계산한 결과이다. Fig. 4e와 Fig. 4f는 Fig. 4d와 같은 조건에서 입력 밀도를 고려해 최소 이동 제곱을 계산한 결과이고 Fig. 4c와 마찬가지로 Fig. 4f는 입력 밀도를 형 변환한 것을 사용했다.

Fig. 4(b,c,e,f) 모두 기존의 최소 이동 제곱을 사용한 Fig. 4a, Fig. 4d와는 달리 몬테카를로법으로 추정된 밀도 분포의 밀집 위치에 따라 계산된 속도가 달라지는 것을 확인할 수 있다.

IV. Conclusions

본 논문에서는 밀도의 분포를 고려하여 MLS기반으로 벡터장을 외삽(Extrapolation)할 수 있는 새로운 방식을 제안했다. 격자 내 밀도 분포를 효율적으로 추론하기 위해 입자 기반의 몬테카를로 시뮬레이션 기법을 도입했으며, 이로 인해 격자 해상도를 증가시키지 않고도 디테일한 벡터 필드를 계산했다. 그럼에도 불구하고 한 가지 단점이 존재한다. 밀도를 대표하는 위치가 한 곳이기 때문에 밀도가 고르게 분포되지 않은 경우 위치 추정에 약간의 오차가 발생한다. 이 문제는 쿼드트리(Quadtree)와 같은 멀티 해상도 기반의 공간 분할 기법을 이용하면 해결 가능할 것으로 기대하며, 향후 이 문제를 해결하기 위한 알고리즘으로 해법을 확장할 계획이다.

REFERENCES

- [1] Jeong-Mo Hong, Jong-Chul Yoon, Chang-Hun Kim, "Divergence-constrained moving least squares for fluid simulation", Computer animation & virtual worlds, Vol. 19, pp. 469-477, 2008
- [2] Kim, Sun-Tae, and Jeong-Mo Hong, "Visual simulation of turbulent fluids using mls interpolation profiles", The Visual Computer, Vol. 29, pp. 1293-1302, 2013