

트리 기반의 상수 분지수 그래프 연구

장진혁*, 정승원*, 배경선*, 정보옥**, 이형옥**[○]

*순천대학교 과학영재교육원

**순천대학교 컴퓨터교육과

robot89888@naver.com, seungwon0806@gmail.com, baeseon0425@gmail.com,

seongbok@s.scnu.ac.kr, oklee@scnu.ac.kr([○] 교신저자)

A Study on Tree-based fixed degree graph

Jin-Hyeok Jang*, Seung-Won Jeong*, Kyeong-Seon Bae*, Bo-Ok Seong**,
Hyeong-Ok Lee*

*Dept. of Science gifted education center, Sun-chon National University

**Dept. of Computer education, Sun-chon National University

요 약

포화 이진 트리를 기반으로 하는 상수 분지수 3의 새로운 그래프 TG_n 를 제안한다. TG_n 의 노드 주소는 n 개의 비트로 나타내며, 노드 수는 2^n 개이고 지름은 $2n-2$ 다. 에지는 3가지로 분류할 수 있으며, 루트 노드와 연결된 에지, 중간 노드와 연결된 에지, 말단 노드와 연결된 에지가 있다. 트리를 기반으로 한 TG_n 의 깊이는 편의상 index N 으로 나타낸다. index는 노드 주소를 S 라 할 때, S 가 0이면 0이고 1 이상이면 $\lceil \log_2 S + 1 \rceil$ 이다. 본 연구에서는 상수 분지수를 갖는 TG_n 을 정의하고, 라우팅 알고리즘과 지름을 분석한다.

1. 서론

최근 IT의 발달로 데이터가 폭발적으로 증가함에 따라 빅데이터 분석은 물론 이를 바탕으로 추론 및 예측을 수행하기 위한 인공지능 기술의 발달로 강력한 계산 능력을 갖는 고성능 컴퓨터에 대한 수요도 함께 증대하고 있다. 이렇게 고성능 컴퓨터는 새로운 수요와 요구사항에 대응하여 계속하여 진화하고 있다[1]. 상호연결망은 프로세서 간 위치와 연결 구조를 의미하며, 이는 병렬처리 시스템의 성능을 결정하는 요인 중 하나이다[2]. 이는 병렬처리 컴퓨터의 성능 향상을 위한 상호연결망 연구가 필요함을 의미한다. 상호연결망을 평가하는 망 척도에는 분지수, 지름, 망 비용, 연결도, 대칭성 등이 있다[3][4]. 본 연구에서는 망 척도 중 분지 수와 지름, 망 비용을 분석하고 알고리즘을 설계한다.

2. 그래프 정의

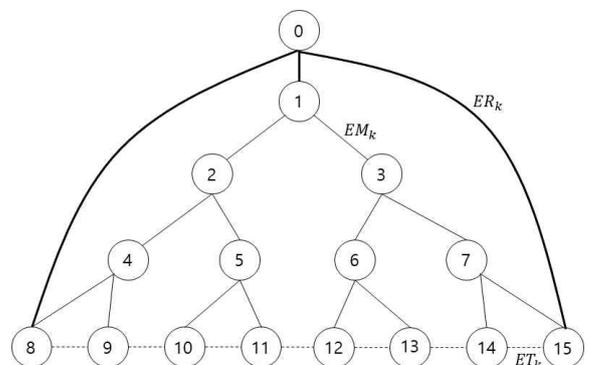
Tree-based Graph (TG_n)은 완전이진 트리 구조를 활용한 상수 분지수 3을 갖는 그래프다. *Tree-based Graph* (TG_n)의 노드 주소는 n 개의 2진수로 나타내며, 노드 주소는 $S = k$

($0 \leq k \leq 2^n - 1$)이다. 본 연구에서는 편의상 노드 주소를 이진수에 대응하는 0부터 $2^n - 1$ 까지 정수로 표현하겠다.

(정의 1) n 차원 TG_n 그래프를 구성하는 노드의 위치를 나타내는 index N 은 그래프의 층을 나타내고, 범위는 ($0 \leq N \leq n$)이다.

TG_n 은 트리 기반으로 편의상 트리의 깊이를 index N 으로 나타낸다.

예제 1) $n=4$ 일 때, $0 \leq N \leq 4$ 임을 (그림 1)에서 확인할 수 있다.



(그림 1) TG_4 그래프

(정의 2) n 차원 TG_n 그래프를 구성하는 노드의 주소는 다음과 같이 십진수로 표현한다.

$$S = k, (0 \leq k \leq 2^n - 1)$$

예제 2) $n=4$ 일 때, 노드 주소 $0 \leq S \leq 15$ 임을 (그림 1)에서 확인할 수 있다.

(정의 3) n 차원 TG_n 그래프를 구성하는 노드를 연결하는 에지는 루트 노드, 중간 노드, 말단 노드에 따라 에지 ER, EM, ET 로 분류한다.

노드 주소를 $S = k, (0 \leq k \leq 2^n - 1)$ 이라 할 때, 에지에 따른 노드 집합은 다음과 같다.

ER : 루트 노드(노드 주소 0)와 연결된 에지로 (그림 1)에서 굵은 선으로 표현했으며 다음 3개 노드와 에지를 갖는다.

$$\{1, 2^{n-1}, 2^n - 1\}$$

EM_k : 중간 노드와 연결된 에지 (그림 1)에서 실선으로 표현했으며 다음 3개 노드와 에지를 갖는다.

$$\{2k, 2k+1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$$

ET_k : 말단 노드와 연결된 에지로 (그림 1)에서 점선으로 표현했으며 다음 3개 노드와 에지를 갖는다.

$$\{k-1, k+1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$$

단, 말단 노드의 양 끝에 있는 노드 2^{N-1} 와 2^N-1 은 같은 index에서 연결할 수 있는 노드가 한 개이므로 이때, 연결 노드를 다음과 같이 정의한다.

$$2^{n-1}: \{0, k+1, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$$

$$2^n - 1: \{k-1, 0, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$$

예제 3) $N=4$ 일 때, 말단 노드의 양 끝에 있는 노드 8과 15의 연결된 노드 집합은 다음과 같다.

노드 8에 인접한 노드는 {0, 9, 4}이고,

노드 15에 인접한 노드는 {14, 0, 7}이다.

3. 그래프 성질

TG_n 은 완전 이진 트리를 바탕으로 n 개의 비트로 노드를 표현한 그래프이므로 2^n 개 노드를 갖는다. 노드 주소를 S 라 할 때, index N 은 $\lfloor \log_2 S + 1 \rfloor$ 이다. 정리1과 2에서 이러한 성질을 증명하여 보이겠다.

(정리 1) TG_n 의 노드 수는 2^n 개다.

증명) TG_n 은 트리를 기반으로 하였으므로 말단 노드의 노드 수는 2^{n-1} 개이고, 나머지 노드는 2^{n-1} 개이다. 따라서 TG_n 의 노드 수는 2^n 개다.

(정리 2) 임의의 노드 주소를 $S = k, (0 \leq k \leq 2^n - 1)$ 라 하자. TG_n 의 index N 은 $S=0$ 이면 0이고,

$S \geq 1$ 이면 $\lfloor \log_2 k + 1 \rfloor$ 다.

증명) TG_n 은 트리를 기반으로 하였으며, index는 그 깊이를 나타내므로 index N 값은 $\lfloor \log_2 k + 1 \rfloor$ 이다.

예제 4) 노드 5와 10의 index를 확인하겠다.

5의 index: $\lfloor \log_2 5 \rfloor = 2$

10의 index: $\lfloor \log_2 10 \rfloor = 3$

따라서 5와 10의 index는 각 2와 3이 되며, (그림 1)에서 확인할 수 있다.

4. 라우팅 알고리즘

라우팅은 네트워크의 두 지점의 경로를 효율적이고 신속하게 결정하는 과정이며, 경로는 한 노드에서 그래프의 에지를 지나 다른 노드까지 가는 길을 의미한다[3]. 출발 노드를 S, 도착 노드를 D라 할 때, 알고리즘에 사용한 몇 가지 기호를 제시하고 TG_n 의 라우팅 알고리즘을 소개하겠다.

(정리 3) 임의의 두 노드를 S, D라 하자. 각 노드의 index를 a, b라 하고 노드 S가 D의 직계일 때, 다음 수식을 만족한다.

$$S \times 2^{b-a} \leq D \leq S \times 2^{b-a} + 2^{b-a} - 1$$

증명) TG_n 은 그래프 정의에 따라 완전 이진 트리를 바탕으로 하였으므로, 다음을 만족한다.

i) $S \times 2^{b-a}$ 을 살펴보자. $b-a$ 는 두 노드의 index의 차이 값으로, $S \times 2^{b-a}$ 은 S의 후계 노드 D가 속한 index의 노드 중 가장 작은 값이다. 그러므로 $S \times 2^{b-a} \leq D$ 를 만족한다.

ii) $2^{b-a} - 1$ 를 살펴보자. 2^{b-a} 은 S의 후계 중 D가 속한 index의 노드 수를 나타낸다. 같은 index에서 노드 주소는 1씩 늘어나므로 D의 최대값은 $S \times 2^{b-a}$ 보다 $2^{b-a} - 1$ 큰 값으로 $S \times 2^{b-a} + 2^{b-a} - 1$ 가 된다. 그러므로 $D \leq S \times 2^{b-a} + 2^{b-a} - 1$ 를 만족한다.

따라서, $S \times 2^{b-a} \leq D \leq S \times 2^{b-a} + 2^{b-a} - 1$ 이다.

예제 5) 임의의 노드 2와 10을 살펴보자.

노드 2는 10의 직계다. 먼저 각 노드의 index를 구한 후, 수식에 적용할 수 있다.

$$a = index\ 2 = \lfloor \log_2 2 + 1 \rfloor = 2,$$

$$b = index\ 10 = \lfloor \log_2 10 + 1 \rfloor = 4,$$

$$S \times 2^{b-a} \leq D \leq S \times 2^{b-a} + 2^{b-a} - 1$$

$$= 2 \times 2^{4-2} \leq 10 \leq 2 \times 2^{4-2} + 2^{4-2} - 1$$

$$= 8 \leq 10 \leq 11$$

다음으로 라우팅 알고리즘을 소개한다. 알고리즘 개요는 다음과 같다. 출발 노드에서 목적 노드로 갈

수 있는 직계노드까지 index를 감소시킨 후, 목적 노드가 속한 후계 노드를 선택하여 이동하는 방법이다.

```

(라우팅 알고리즘)
a = log2S + 1
if(S = 0)
    S = 1;
while(!(S × 2b-a ≤ D ≤ S × 2b-a × 2b-a-1 - 1))
{
    S = ⌊  $\frac{S}{2}$  ⌋;
}
while(S ≠ D)
{
    if(S × 2b-a ≤ D ≤ S × 2b-a × 2b-a-1 - 1)
        S = S × 2;
    else
        S = S × 2 + 1;
}
    
```

예제 6) 다음은 출발 노드를 4, 도착 노드를 7이라 할 때 예시다. 화살표 '→'는 에지를 적용한 것이다.

$$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7$$

각 노드의 index는 다음과 같다.

$$a = \lfloor \log_2 4 + 1 \rfloor = 3$$

$$b = \lfloor \log_2 7 + 1 \rfloor = 3$$

노드 4는 첫 번째 while 조건문을 만족하므로 2가 된다. 2도 마찬가지로 만족하므로 노드 1과 연결된다. 이때, index a의 값은 차례로 2, 1이 되며, 도착 노드는 변하지 않으므로 b의 값은 변하지 않는다.

$$a = \lfloor \log_2 2 + 1 \rfloor = 2$$

$$a = \lfloor \log_2 1 + 1 \rfloor = 1$$

1은 두 번째 while 조건문의 else 조건문을 만족하므로 3과 연결되며, 마찬가지로 다시 7과 연결된다. 7은 목적 노드이므로 알고리즘을 종료한다.

(정리 4) TG_n 의 지름은 $2n-2$ 다.

증명) 최악의 경우는 출발 노드와 도착 노드가 말단 노드에 있으며, index 1까지 거슬러 올라가야 하는 경우다. 말단 노드의 index는 n 이므로 index 1까지 거리는 $n-1$ 이고, 마찬가지로 말단 노드의 도착 노드까지 거리가 $n-1$ 이므로 TG_n 의 지름은 $2n-2$ 다.

4. 결론

우리는 포화이진 트리를 기반으로 한 상수 분지수 그래프를 설계하고 그 성질과 알고리즘을 분석하였

다. TG_n 은 트리와 같이 그 깊이를 나타내는 index가 있으며, root 노드와 단말 노드, 단말 노드와 단말 노드 사이의 에지가 추가된 점이 트리와 다른 점이다.

본 연구에서 라우팅 알고리즘을 통해 지름은 약 $O(n)$ 으로 추측한다. 따라서 정확한 지름과 해밀턴 사이클 등 다양한 망 척도의 연구가 더 필요하다.

참고문헌

[1] Kim N. G. A study on the development of the composite measures of high-performance computer technology. Sungsyunkwan university. 2020.
 [2] Parhami B., Rakov M. Perfect difference networks and related interconnection structures for parallel and distributed systems. IEEE transactions on parallel and distributed systems. 16(8). 714-724. 2005.
 [3] Akers S. B., Krishnamurthy B. A. Group-theoretic model for symmetric interconnection networks. IEEE transactions on Computers. 38(4). 555-556. 1989.
 [4] Lakshminarayanan S., Jwo J. S., Dhall S. K. Symmetry in interconnection networks based on cayley graphs of permutation groups: a survey. Parallel computing. Vol. 19. 361-407. 1993