마코프 지연을 갖는 시스템을 위한 상태 궤환 제어기 설계 방식 연구

양장훈*
*서울미디어대학원 뉴미디어학부
e-mail : jhyang@smit.ac.kr

A heuristic method to develop a state feedback controller for a system with Marko delay

Janghoon Yang*
*Dept. of New media, Seoul Media Institute of Technology

요 약

사이버 물리 시스템의 발달은 네트워크 기반 제어 시스템을 다양한 형태로 진화시키고 있다. 네트워크에서는 전송 지연과 전송 오류에 의해서 다양한 불규칙한 지연이 발생하고 지연에 강인한 제어기 설계가 요구되고 있다. 마코프 프로세서를 따르는 지연을 갖는 제어 시스템에서 제어기를 설계할 때에 많이 사용되는 모델중에 하나가 확장된 상태 벡터를 기반으로 한 마코프 점프 선형 시스템 모델이다. 본 연구에서는 이 모델을 이용하여 리아푸노프 안정성 조건으로부터 유도되는 선형 행렬 부등식의 안정성 조건으로부터 저복잡도를 가지고 제어기를 유도하는 직관적 방법을 제안한다. 제안된 알고리즘은 모의 실험을 통해서 성능을 확인하였으나, 직관적 방법 구조상에서 제한 조건의 수가 자유 변수의 수보다 많은 이유 때문에 성능이 매우 제한적임을 확인하였고, 이를 개선하기 위한 향후 연구가 요청됨을 확인하였다.

1. 서론

사물인터넷의 발달과 함께 네트워크 기반한 제어 시스템은 협력적 비행, 자율 주행 자동차, 원격 수술 로봇 등 다양하고 복잡한 형태로 진화하고 있다.[1] 네트워크와 통신 기술의 발달에 따라서 대역폭이 증가하고 대용량 전송이 가능해 졌지만, 여전히 네트워크상에서는 불규칙한 시간을 갖는 전송 지연과, 전송 오류에 따른 재전송이나, 데이터 유실이 발생하고 있다.

2. 시스템 모델

상태 궤환 정보가 불규칙하면서 마코프 프로세스를 따르는 상태 궤환 시불변 이산 시간 선형 제어 시스템은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \tag{1}$$

$$u(k) = K(d_k)x(k-d_k) \tag{2}$$

여기서, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 는 시스템의 상태, $u(k) \in \mathbb{R}^m$ 는 제어 입력, $d_k \in D_{d_{\max}}$ 는 마코프 프로세시를 따르는 랜덤 변수, $D_{d_{\max}}$ 는 특정 정수의 집합으로서 $\{1, 2, \cdots, d_{\max}\}$ 이다.

[2]에서 사용된 상태 확장 벡터를 이용한 마코프 점프 선형 시스템 모델을 이용하여 (1)과(2)는 다음과 같이 재정리 될 수 있다.

$$\bar{x}(k+1) = \tilde{A}(d_k)\bar{x}(k) \tag{3}$$

$$\tilde{A}(d_k) = \begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & & 0 \\ I_n & 0 & \cdots & & \vdots \\ 0 & I_n & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & I_n & 0 \end{bmatrix} + \tilde{B}K(d_k)\tilde{E}(d_k) \tag{4}$$

위 식에서 $\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k)^T & x(k-1)^T & \cdots & x(k-d_{\max})^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n(d_{\max}+1)\times 1}$, $\tilde{B} = \begin{bmatrix} B^T & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n(d_{\max}+1)\times m}$, $\bar{E}(d_k) = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \cdots 0}_{d_k-1} & I_n & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n d_{\max}}$, $\tilde{E}(d_k) = \begin{bmatrix} 0 & \bar{E}(d_k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n(d_{\max}+1)}$ 이다.

이 시스템에 대해서 리아프노프 안정성 조건 기반의 제어기 설계를 위해서 라이포노프 함수 $V(k)$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$V(k) = \bar{x}(k)^T P(k)\bar{x}(k) \tag{5}$$

이 함수를 이용하여 리아프노프 안전성 조건으로 부 시스템의 안정성을 위한 조건이 다음과 같은 선형 행렬 부등식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} Y(i) & Y(i)\tilde{A}^T + \tilde{L}(i)^T \tilde{B}^T \\ \tilde{A}Y(i) + \tilde{B}\tilde{L}(i) & Y(j) \end{bmatrix} > 0 \;\; for \; i \in D_{\max}, j \in D_{i+1} \tag{6}$$

여기서, $\tilde{L}(i) = K(i)\tilde{E}(i)Y(i)$, $\tilde{A} = \begin{bmatrix} [A \;\; 0] & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix}$, 이고, 0 는 표기의 간략화를 위해서 크기를 표현하지 않았기 때문에 행렬내의 위치와 관계에 의해서 각각 적절한 크기를 갖는다.

3. 제어기 설계 알고리즘

지연이 있는 시스템을 (5)와 같은 일반 선형 시스템 식으로 표현함으로써 안정성을 보장하는 제어기를 유도하는 조건을 개념적으로 쉽게 유도 가능하지만, 등가 상태 벡터의 크기가 최대 지연 만큼 확장되기 때문에 실제 제어기를 구하는 복잡도가 크게 증가한다. 따라서, 이를 해결하기 위한 직관적 방법을 제안한다.

첫번째 방식은 "이단계 방식"으로서 그림-1 에서 정리된 바와 같이 먼저, 식(6)으로 부터 $Y(i)$ 를 구하고 이를 고정한 상태에서 $K(i)$ 를 구하는 방식이다. 이 방법은 개념적으로는 매우 간단하지만, $K(i)$ 를 구할 때에 조건이 자유 변수보다 많기 때문에 성능에 제한이 발생할 것으로 예상된다.

그림-2 에서 설명된 "추가 개선 알고리즘"은 이단계 방식 알고리즘을 수행하여 안정성을 보장하는 제어기를 찾지 못하였을 때에 기회적으로 실행하는 알고리즘이다. 그림-2 의 Step0 는 이단계 알고리즘을 수행하는 단계이고, Step2 에서는 Step0 에서 해가 존재하지 않을 때에 열악한 조건에 해당되는 선형 부등식을 가장 작은 고유값을 갖는 행렬에 해당되는 (i^*, j^*) 에 대해서, 배타적으로 $Y(i^*), Y(j^*)$, $K(i^*)$ 에 대한 해를 구함으로써 열악한 조건을 만족시키는 해를 먼저 구하고 기회적으로 다른 조건도 만족하는지를 확인하는 알고리즘이다.

4. 모의실험

제안한 알고리즘의 성능을 확인하기 위해서 $(n,m) = (2,2)$ 로 고정한 후에 A 와 B 행렬을 주어진 최대 지연에 대해서 200 번씩 표준 정규 분포를 따르는 독립 변수를 이용하여 발생하였고, 최대 지연은 표-1 에서와 같이 2 부터 6 까지 각각의 고정된 최대 지연에 대해서 성공 회수를 기록하였다.

표-1 에서 정리된 제어기를 성공적으로 구하는 회수를 비교한 결과 이단계 알고리즘 성능은 추가적인 개선이 요구되는 수준으로 보인다. 또한, 그림 2 에서 제안된 추가 개선 알고리즘은 제어기를 성공적으로 구하는데 기여하지 못하는 것으로 모의실험 결과가 도출되었다. 결국 이런 제한적인 성능은 상한치나 하한치와 같은 유사 비용함수를 통해서 근사적 알고리즘이 아닌 직관적인 방식에 의해서 이런 성능이 발생하는 것으로 판단되며 추가적인 개선 연구가 요청된다.

$step1: Solve \;\; feasibility \;\; \Pr oblem$

$$\begin{bmatrix} Y(i) & Y(i)\tilde{A}^T + \tilde{L}(i)^T \tilde{B}^T \\ * & Y(j) \end{bmatrix} > 0 \;\; for \; i \in D_{\max}, j \in D_{i+1}$$

$step2: Solve \;\; feasibility \;\; \Pr oblem \; for \; fixed \; Y(i) \; for \; \forall i$

$$\begin{bmatrix} Y(i) & Y(i)\tilde{A}^T + (K(i)\tilde{E}(i)Y(i))^T \tilde{B}^T \\ * & Y(j) \end{bmatrix} > 0 \;\; for \; i \in D_{\max}, j \in D_{i+1}$$

(그림 1) 일반적 이단계 방식 알고리즘

$Step0: solve \; a \;\; feasibility \;\; problem \; with \; a \; given \; a\lg orithm$

$Step1: If \;\; there \; is \; a \; feasible \; solution, stop, else, set \; S_T = \{\} \; and$
$go \; to \; step2,$

$Step2: solve \; the \;\; following \;\; feasiblity \;\; problem \; over \; Y(i^*), Y(j^*),$
$and \;\; K(i^*) \; while \; others \; being \;\; fixed$

$\beta^*_{i,j} = \min \beta_{i,j} \;\; s.t. \; \tilde{A}(i)^T P(j) \tilde{A}(i) - P(i) \le \beta_{i,j} I$

$(i^*, j^*) = \arg\max \beta^*_{i,j}$

$if \;\; (i^*, j^*) \in S_T, \; stop, else, \; S_T = S_T \cup \{(i^*, j^*)\}$

$\tilde{A}(i)^T P(j) \tilde{A}(i) - P(i) < 0 \;\; for \; \forall (i,j) \in \{(i^*, j^*)\}$

$Step3: If \;\; there \; is \; a \; feasible \; solution \; to \; the \; above \;\; problem,$
$go \; to \; step4, else \; stop$

$Step4: If \; all \; LMIs \; are \; satisfied, stop, else, go \; to \; step2$

(그림 2) 추가 개선 알고리즘

<표 1> 알고리즘에 따른 성공 회수와 평균 연산 시간

	2	3	4	5	6
일반적 이단계 방식 (성공)	6	6	4	2	5
일반적 이단계 추가 개선 알고리즘 (성공)	6	6	4	2	5

5. 결론

본 연구에서는 마코프 프로세스를 따르는 지연을 갖는 제어시스템의 안정성을 보장하기 위한 저복잡도 설계 방식을 직관적인 방식으로 제안하였다. 이단계로 이루어지는 제안된 알고리즘과 추가 개선알고리즘 모두 해를 구하는 과정에서 발생하는 근사화에 의해서 성능이 열화되어서 성능을 개선하기 위한 추가적인 연구가 요청된다.

6. 사사

이 논문은 2018 년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(과제번호 : NRF-2017R1A2B4007398)

참고문헌

[1] R. Atat, L. Liu, H. Chen, J. Wu, H. Li, and Y. Yi, "Enabling cyber-physical communication in 5G cellular networks: challenges, spatial spectrum sensing, and

cyber-security," IET Cyber-Physical Systems: Theory & Applications, Vol. 2, No. 1, pp. 49-54, Apr. 2017.
[2] Y. Shi, B. Yu, "Output Feedback Stabilization of Networked Control Systems With Random Delays Modeled by Markov Chains," IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 54, No. 7, pp. 1668-1674, July, 2009.