# 양자화에 따른 제어 시스템에서 실용적 관찰성을 위한 데이터 양에 대한 조건

양장훈*
*서울미디어대학원대학교 뉴미디어학부
e-mail : jhyang@smit.ac.kr

# A condition on data rate for practical observability with quantization

Janghoon Yang
*Dept. of Newmedia, Seoul Media Institute of Technology

요 약

사물 인터넷 환경에서 제어 시스템이 네트워크에 연결되면서 정밀 제어를 위한 양자화에 대한 고려가 중요해 지고 있다. 본 연구에서는 프로세스 잡음이 존재하는 이산 시불변 선형 시스템에서 실용적 관찰성을 달성하기 위해서 필요로 하는 데이터 양에 대한 조건을 제시한다.

## 1. 서론

사물 인터넷 환경에서 대부분의 사물들은 통신 네트워크를 통해서 연결된다. 네트워크에 전송되는 데이터는 디지털 데이터이고 제어 시스템의 많은 신호들이 양자화 과정을 거쳐 디지털 신호로 변환된다. 많은 연구들이 이산 신호 영역에서 디지털 신호처리와 제어를 수행하지만, 양자화는 제어 관점에서 관찰성과 안정성에 중대한 영향을 줄 수 있다 [1]. 또한, 데이터의 양자화는 통신 채널 환경과 밀접한 관련을 가지고 있으며, 네트워크 전송과 양자화에 대한 연계적인 고려를 통하여 보다 안정적인 제어가 가능하다 [2].

제어기 설계에 있어서 관찰성은 주어진 정보를 이용하여 상태 정보의 추정 가능성을 의미한다. [2]에서는 점근적 관찰성을 위한 필요조건과, 가용할 수 있는 정보 종류에 따른 점근적 관찰성을 달성할 수 있는 부호화기와 복호화기가 제시되었다. 하지만, 많은 경우에 실제 시스템의 성능은 점근적인 성능 보다는 보다 현실적인 조건하에서의 분석이 필요하고, 본 연구에서는 실용적 관찰성을 달성하기 위해 필요로 하는 데이터 량에 대한 조건을 제시한다.

## 2. 실용적 관찰성을 위한 데이터량에 대한 필요조건

본 논문에서는 다음과 같이 일반적으로 표현되는 시불변 이산 시간 선형 제어 시스템을 고려한다..

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x(k) \in$ 은 시스템의 상태, $u(k) \in$ 은 제어 입력, $v(k) \in$ 은 프로세스 잡음, $y(k) \in$ 는 관찰 가능한 시스템 출력이다. [2]의 uniform attractivity 의 개념을 이용하여 실용적 관찰성을 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의-1 : $\hat{x}(k)$ 를 $x(k)$ 에 대한 추정값이라고 할 때에 크기가 유한한 초기 상태와 주어진 상수 $\varepsilon_T$ 대해서, 모든 $k \ge k_0$ 에 대해서 $\|x(k) - \hat{x}(k)\|_2 \ge \varepsilon_T$ 를 만족하는 $k_0$ 가 존재한다.

정리-1 : 정의-1 로부터 프로세스 잡음이 없는 이상적인 환경에서 실용적 관찰성을 달성하기 위해 필요로 하는 데이터 율 $R$ 에 대한 조건은 다음과 같다.

$$R \ge \sum_{\lambda \in \lambda(A)} \max(0, \log|\lambda|) + \frac{1}{k_0}\log\frac{L}{\varepsilon_T} \tag{2}$$

위 식에서 $\|x_0\|_2 \le L$ $\lambda(A)$ 는 행렬 $A$ 의 고유값, 이다.

증명 : [2]의 명제 3.1 의 증명 과정을 재정리하여 쉽게 증명된다.

(2)의 부등식에서 오른쪽은 두가지 성분으로 구성된다. 첫번째 성분은 [2]의 명제 3.1.에 제시된 점근적 관찰성을 위해서 필요로 하는 데이터량이고, 두번째 성분은 특정 시점 후에 실용적 관찰성을 보장하기 위해 필요로 하는 성분이다. 이 식으로 부터 실용적 관찰성을 위해서는 대상 시간과 목표 오류의 상한치에 의해서 필요로 하는 데이터율 즉 요구되는 양자화의 해상도가 결정된다는 것이 확인된다.

프로세스 잡음의 크기가 유한할 때에는 [2]에서의 사용된 정보이론 기반 부피 채우기 방식을 도입하여 필요조건을 유도할 수 있다.

정리-2 : 프로세스 잡음이 $\|v(k)\|_2 \le D, \forall k$ 일 때에 실용적 관찰성을 달성하기 위해 필요로 하는 데이터 율 $R$ 에 대한 조건은 다음과 같다.

$$R \geq \frac{1}{k}\log\frac{F(\lambda(A))^k L^n + \sum_{j=0}^{k-1} F(\lambda(A))^j D^n}{\varepsilon_T^n} \quad (3)$$

위 식에서 $F(\lambda(A)) = \max(\prod_{\lambda_i \in \lambda(A), |\lambda_i| \geq 1} |\lambda_i|, \prod_{\lambda_i \in \lambda(A)} |\lambda_i|)$ 이다.

증명 : 매 순간 제어 입력 신호에 대한 정보는 알고 있기 때문에 실제 양자화를 위해 필요로 하는 상태 정보는 다음과 같이 표현된다.

$$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} v(k) \quad (4)$$

$\|x_0\|_2 \leq L$ 조건으로 부터 $x(k)$ 가 존재할 수 있는 공간의 부피 $V_x(k)$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$V_x(k) = |\det(A^k)| K_n L^n + \sum_{j=0}^{k-1} |\det(A^j)| K_n D^n \quad (5)$$

위식에서 $K_n$ 은 n 차원 공간에서 부피를 계산할 때에 사용되는 상수이다. 마찬가지로 반지름이 $\varepsilon_T$ 인 신호 공간의 부피는 $K_n \varepsilon_T{}^n$ 으로 표현할 수 있다. (5)에서 $|\det(A)| \leq F(\lambda(A))$ 이 관계로부터 k 시점에서 상태 신호 공간의 부피는 다음과 같은 상한치를 갖는다.

$$V_x(k) \leq F(\lambda(A))^k K_n L^n + \sum_{j=0}^{k-1} F(\lambda(A))^j K_n D^n \quad (6)$$

정보이론의 부피 채우기 방식으로 부터 계산되는 최소 데이터 량은 다음과 같이 정의된다.

$$(1/k)\log(V_x(k)/(K_n \varepsilon_T{}^n)) \quad (7)$$

(7)의 식에서 식(6)에서 유도된 $V_x(k)$ 의 상한치를 대입하여 정리하면 (3)의 관계가 유도된다.

[2]의 명제 3.1.과의 비교에서 다음과 같은 주목할 만한 점을 발견할 수 있다. 첫째, [2]에서는 점근적 관찰성에 대한 조건을 고려했기 때문에 1 이상의 고유값과 그에 해당되는 벡터에 의해서 만들어지는 공간의 부피만을 고려하였다. [2]에서의 조건에 따르면, 행렬 $A$ 가 Schur 행렬일 때에 필요조건의 데이터량은 0 이되고, 유한 시간의 관찰을 할때에 필요로 하는 평균적인 데이터량이 정의가 되지 않는다. 이를 문제를 해결하기 위해서 $F(\lambda(A))$ 가 도입되어 유한 시간에서 안정적인 시스템에서 필요로 하는 데이터의 조건을 보수적으로 제시하고 있다. 또한, (6)의 부등식의 오른편의 두번째 성분은 프로세스 잡음에 의해 발생하고 잡음의 크기에 비례하여 필요로하는 데이터 량이 결정됨을 확인할 수 있다.

식(3)에서 $D$ 와 $L$ 의 관계로 부터 좀더 물리적인 의미를 얻기 위해서 다음의 관계를 정의한다.

$$L^2 = \gamma D^2 \quad (8)$$

위 식의 관계로부터 $\gamma$ 는 초기 상태 정보에 대한 신호대 잡음비로서 해석될 수 있다. 이를 식 (3)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$R \geq \frac{1}{k}\log\frac{F(\lambda(A))^k + \frac{1-F(\lambda(A))^k}{1-F(\lambda(A))}\gamma^{-n/2}}{\varepsilon_T^n} L^n \quad (9)$$

위 식을 좀더 분석적으로 재정리하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R \geq \log F(\lambda(A)) + \frac{n}{k}\log\frac{L}{\varepsilon_T} + \frac{1}{k}\log(1 - \frac{1-F(\lambda(A))^{-k}}{1-F(\lambda(A))}\gamma^{-n/2}) \quad (10)$$

위 식에서 k 가 무한대로 가면 부등식의 오른쪽 수식에서 첫번째 성분만 남고, $F(\lambda(A))$ 가 $F(\lambda(A)) = \prod_{\lambda_i \in \lambda(A), |\lambda_i| \geq 1} |\lambda_i|$ 인 경우에는 [2]에서와 동일한 점근적 관찰성 조건이 유도된다. 오른쪽 수식에서 두번째 성분은 유한한 관찰에 의해서 필요로 하는 데이터량이고 k 가 증가하면서 0 으로 수렴한다. 마지막 성분은 프로세스 잡음에 의해서 필요로 하는 데이터 량이고 이는 정보이론에서 Redundancy 를 더하는 채널 코딩에 의해서 늘어나는 데이터 량과 유사한 역할을 하는 것으로 해석할 수 있다. 또한 $\gamma$ 값이 클수록 세번째 성분 값이 작아지는 것을 확인할 수 있다.

## 3. 토의 및 결론

본 논문에서는 프로세스 잡음이 존재하고 유한 시간동안 제어를 수행할 때에 실용적 관찰성을 달성하기 위해 필요로 하는 데이터 양에 대한 조건을 제시하였다. 필요로 하는 데이터 양은 플랜트의 차원의 크기, 초기 상태가 존재하는 신호 공간의 크기 및 잡음의 최대 크기게 비례함을 확인할 수 있었다.

본 연구는 관련 연구를 위한 기초 단계 연구로서 다양한 후속 연구를 요한다. 먼저, 프로세서 잡음이 존재할 때에 실용적 관찰성을 위한 데이터 양에 대한 필요 충분 조건과 이를 구현할 수 있는 양자화를 위한 부호화기와 복호화기에 대한 설계가 요구된다. 또한 출력의 측정 잡음으로 제어기가 설계되는 경우에 유사한 연구도 요구된다..

## 4. 사사

이 논문은 2018 년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(과제번호 : NRF-2017R1A2B4007398)

### 참고문헌

[1] N. Elia and S. Mitter, “Stabilization of linear systems with limited information,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, no. 9, pp. 1384–1400, Sep. 2001.

[2] S. Tatikonda, A. Sahai, and S. Mitter, "Stochastic Linear Control Over a Communication Channel," IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 49, no.9, pp. 1549-1561, Sep. 2004.