격자함의 대수와 헤이팅 대수
Lattice Implication Algebras and Heyting Algebras

연 용 호
목원대학교

Yon yong-ho
Mokwon University

요약

격자함의 대수와 헤이팅 대수는 부울 대수를 일반화한 논리체계이며 논리적 함의(→)를 이항연사자로 갖는 대수적 체계를 갖는다. 본 논문에서는 격자함의 대수와 헤이팅 대수가 서로 다른 대수체계를 갖는다는 것을 예로 보이고, 이들의 차이점을 조사한다. 또한 격자함의 대수, 헤이팅 대수, 그리고 부울 대수의 관계를 알아본다.

1. 서론

부울 대수(Boolean algebra)는 논리연산자로써 이항연산자인 논리합(disjunction) $\vee$, 논리곱(conjunction) $\wedge$, 그리고 단항연산자인 부정(negation) $\neg$ 을 갖는 논리체계(logical system)이다. 논리적 함의(logical implication)는

$$x \to y = \neg x \vee y$$

로 정의할 수 있고 부울 대수는 이항연산자 $\to$ 를 갖는 대수체계(algebraic system)로 생각할 수 있다. 실수 $\mathbb{R}$ 의 부분집합 $[0,1]$ 도 두 원소의 상한(supremum)과 하한(infimum)을 각각 논리합 $\vee$ 과 논리곱 $\wedge$ 으로 갖는 논리체계이고, 이 논리체계에서 정의된 함의연산자의 예로는

$$x \to_1 y = \begin{cases} 1, & if\ x \le y \\ y, & otherwise \end{cases},$$

$$x \to_2 y = 1 \wedge (1 - x + y)$$

가 있다. 이 때 연산자 $\to_1$ 와 $\to_2$ 를 갖는 대수체계는 서로 다른 특성을 가지고 있으며, 이들은 각각 헤이팅 대수(Heyting algebra), 격자함의 대수(lattice implication algebra)라는 이름으로 연구되고 있다.

격자함의 대수는 이항연산자 $\to$ 와 단항연산자 $'$ 을 갖는 유계격자로 [1]에서 정의되었고, [2]에서 격자함의 대수가 준격자함의 대수(quasi-lattice implication algebra)의 개념과 동치임을 보여 그 정의를 단순화하였다. 격자함의 대수의 일반적인 성질은 [1-3]에서 찾아볼 수 있다. 헤이팅 대수는 이항연산자 $\to$ 를 갖는 격자로 정의되고, 여러 문헌에서 그의 성질을 조사하였다[4,5].

본 논문에서는 격자함의 대수와 헤이팅 대수의 차이점을 알아보고 이들 대수체계와 부울 대수의 관계를 알아본다.

2. 헤이팅대수

이항연산자 $\cdot$ 를 갖고 모든 $x, y, z \in L$ 에 대하여

$$\text{(H)} \quad z \wedge x \le y \Leftrightarrow z \le x \cdot y$$

를 만족하는 격자 L 을 **헤이팅 대수**라 한다. 본 논문에서 함의연산자 $\to$ 는 간단히 $\cdot$ 로 나타낸다.

보조정리 2.1. [5] 이항연산자 $\cdot$ 를 갖는 격자 L 이 헤이팅 대수이기 위한 필요충분조건은 L 이 최대원 1 을 가지며 다음의 성질을 만족하는 것이다.

(1) $xx = 1$,
(2) $x \wedge (xy) = x \wedge y$,
(3) $y \wedge (xy) = y$,
(4) $x(y \wedge z) = (xy) \wedge (xz)$.

예제 2.2. 실수 $\mathbb{R}$ 내의 폐구간 $H = [0,1]$ 에서 이항연산자 $\cdot$ 을

$$xy = \begin{cases} 1, & if\ x \le y \\ y, & otherwise \end{cases} \quad (x, y \in [0,1])$$

로 정의하면 H 는 헤이팅 대수이다.

보조정리 2.3. 헤이팅 대수 L 에서 다음의 성질이 성립한다.

(1) $x \le y \Leftrightarrow xy = 1$,
(2) $x(yz) = y(xz)$,
(3) $y \le xy$,
(4) $x \le yz \Rightarrow y \le xz$.

헤이팅 대수에서 $(xy)y$ 와 $(yx)x$ 는 모두 x 와 y 의 상계(upper bound)이다. 그러나 일반적으로 헤이팅 대수에서 $(xy)y$ 와 $(yx)x$ 는 상한 $x \vee y$ 와 같지 않다.

모든 $x, y \in L$ 에 대하여

$$(xy)y = (yx)x$$

를 만족하는 헤이팅 대수 L 을 **가환**(commutative)이라 한다.

예제 2.2의 헤이팅 대수 H는 가환이 아니다. 실제로 $x < y \neq 1$인 $x, y \in H$ 에 대하여

$$(xy)y = 1y = y \neq 1 = xx = (yx)x$$

이다.

정리 2.4. L 이 가환인 헤이팅 대수이면 모든 $x, y \in L$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$x \vee y = (xy)y = (yx)x$$

3. 격자함의대수

원소 1 을 갖는 집합 L 에 이항연산자 $\cdot$ 와 단항연산자 $'$ 이 정의되어 있고, 다음의 성질 (L1)-(L5)를 만족할 때 L 을 격자함의 대수라 한다.

(L1) $x(yz) = y(xz)$,
(L2) $xx = 1$,
(L3) $(xy)y = (yx)x$,
(L4) $xy = 1$ 이고 $yx = 1$ 이면 $x = y$,
(L5) $xy = y'x'$.

보조정리 3.1. [1-3] L 이 격자함의 대수이면 임의의 $x, y, z \in L$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $1x = x$,
(2) $x \leq y \Leftrightarrow xy = 1$,
(3) $1' = 0,\ 0' = 1$,
(4) $x' = x0$,
(5) $x \leq yz \Rightarrow y \leq xz$,
(6) $x \leq y \Rightarrow zx \leq zy,\ yz \leq xz$,
(7) $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$,
(8) $((xy)y)y = xy$,
(9) $x \vee y = (xy)y = (yx)x$,
(10) $x \wedge y = (x' \vee y')'$,
(11) $(x \vee y)' = x' \wedge y',\ (x \wedge y)' = x' \vee y'$,
(12) $(x \vee y)z = (xz) \wedge (yz)$,
(13) $(x \wedge y)z = (xz) \vee (yz)$,
(14) $x(y \vee z) = (xy) \vee (xz)$,
(15) $z(x \wedge y) = (zx) \wedge (zy)$.

격자함의대수 L 의 원소 x 에 대하여
$x \vee x' = 1,\ x \wedge x' = 0$
를 만족할 때 x' 을 x 의 **여원**(complement)라 한다.

예제 3.2. 실수 $\mathbb{R}$ 내의 폐구간 $L = [0,1]$ 에서 이항연산자 $\cdot$ 와 단항연산자 $'$ 을

$$xy = 1 \wedge (1 - x + y),\ x' = 1 - x$$

로 정의하면 L은 격자함의 대수이다.

예제 3.2의 격자함의 대수 L 에서 1과 0 은 각각 여원 0, 1 을 갖지만 그 외의 원소는 여원을 갖지 않는다.

격자함의 대수 L 의 모든 원소 x 가 여원 x' 을 가질 때 L 을 **여원을 갖는 격자함의대수**(complemented lattice implication algebra)라 한다.

4. 격자함의대수, 헤이팅대수, 부울대수의 관계

예제 2.2의 H 는 헤이팅 대수이지만 격자함의 대수는 아니다. 실제로 $x < y \neq 1$인 $x, y \in H$ 에 대하여

$$(xy)y = 1y = y \neq 1 = xx = (yx)x$$

이므로 H 에서 (L3)가 성립하지 않는다. 또한, 예제 3.2의 L 은 격자함의 대수이지만 헤이팅 대수가 아니다. 실제로, $x = z = 0.5,\ y = 0.1$라 하면

$$0.5 \leq 0.6 = 1 \wedge (1 - 0.5 + 0.1) = 0.5 \cdot 0.1$$

이지만 $0.5 \wedge 0.5 = 0.5 \not\leq 0.1$이다. 즉, 헤이팅 대수의 정의 (H)가 성립하지 않는다. 이와 같이 격자함의 대수와 헤이팅 대수는 어느 하나의 대수체계가 다른 것의 일반화가 아니고, 각각이 구조가 다른 별개의 대수체계를 갖는다.

임의의 $x, y, z \in L$ 에 대하여

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

를 만족하는 격자 L 을 **분배격자**(distributive lattice)라 하고, 모든 원소가 여원을 갖는 분배격자를 **부울 대수**라 한다.

보조정리 4.1. [2,5] 격자함의 대수와 헤이팅 대수는 분배격자이다.

정리 4.2. 이항연산자 $\cdot$ 가 정의된 집합 L 에 대하여 다음의 성질은 서로 동치이다.

(1) L 이 격자함의 대수이고 헤이팅 대수이다.
(2) L 이 최소원 0 을 갖는 가환인 헤이팅 대수이다.
(3) L 이 여원을 갖는 격자함의 대수이다.

보조정리 4.1에 의해 여원을 갖는 격자함의 대수는 여원을 갖는 분배격자로 부울 대수이다. 따라서 정리 4.2의 동치인 성질 (1)-(3)중에 하나의 성질을 만족하면 그 대수체계는 부울 대수이다. 특히, 최소원을 갖는 가환인 헤이팅 대수는 부울 대수임을 알 수 있다.

■ 참 고 문 헌 ■

[1] Y. Xu, "Lattice implication algebras", J. Southwest Jiaotong Univ., Vol. 1, pp. 20-27, 1993.
[2] Y. H. Yon, "On quasi-lattice implication algebras", J. Appl. Math. & Informatics, Vol.33, No. 5-6, pp. 739-748, 2015.
[3] E. H. Roh, S, Y. Kim and Y. B. Jun, "Some operations on lattice implication algebras", Int. J. Math. Sci., Vol. 27, No. 1, pp. 45-52, 2001.
[4] W. C. Nemitz, "Implicative semi-lattices", Trans. Amer. Math. Soc.. Vol. 117, pp. 128-142, 1965.
[5] P. T. Johnstone, Stone spaces, pp. 8, Cambridge University Press, 1986.