양자화된 출력을 갖는 출력 궤환 제어기의 리아프노프 안정성 조건

양장훈*
*서울미디어대학원대학교 뉴미디어학부
e-mail : jhyang@smit.ac.kr

A Laypunov stability condition for output feedback controller with quantized output

Janghoon Yang
*Dept. of Newmedia, Seoul Media Institute of Technology

요 약

디지털 제어와 사물 인터넷을 통한 네트워크 기반 제어가 확산되면서 정밀 제어를 위한 양자화 오류에 대한 고려의 중요성이 증가하고 있다. 본 연구에서는 이산 시간 출력 궤환 제어 시스템에서 제어 신호 생성에 사용되는 시스템 출력 신호에 양자화 오류가 있을 때, 리아푸노프 시스템 안정성을 보장하는 조건을 선형 행렬 부등식을 통하여 제시한다.

1. 서론

디지털 기술과 통신 기술의 발전으로 등장한 사물 인터넷 환경은 제어 시스템 설계에 있어서 다양한 도전적인 문제들을 만들어 내고 있다.[1]. 특히, 디지털 제어에 있어서 아날로그 신호들이 디지털로 전환되는 과정에서 발생되는 양자화에 의한 불확실성의 발생은 정밀제어와 네트워크 기반 제어에 있어서 중요한 설계 고려 사항이 된다. 관련하여, 제어의 안정성 측면에서 로거리듬 (logarithm) 형태의 양자화기가 최적임이 증명되었다[2],

제어기 설계에 있어서 상태 정보를 사용하는 경우에 비교적 쉽게 설계가 가능하나 상태 정보의 접근이 어렵기 때문에 출력 정보를 사용하여 제어기를 설계하는 경우가 많다. 하지만, 방대한 출력 궤환 제어기 설계에 대한 연구에도 불구하고, 아직도 출력 궤환 제어기는 제한적으로 적용이 가능하다[3]. 따라서, 본 논문에서는 출력 궤환 제어 시스템에서 출력 정보를 양자화하여 제어기를 설계할 때에 리아푸노프 안정성을 보장하는 제어기 선형 행렬 부등식을 이용하여 유도한다.

2. 출력 궤환 제어기 설계

본 논문에서는 이산 시간 선형 제어 시스템의 안정성을 보장하는 출력 궤환 제어기 설계를 고려하고 이 조건하에서 시스템 방정식은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \tag{1}$$

여기서, $x(k) \in$ 은 시스템의 상태, $u(k) \in$ 은 제어 입력, $y(k) \in$ 는 관찰 가능한 시스템 출력을 의미한다. 양자화된 출력에 대한 제어 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$u(k) = K(y+e) \tag{2}$$

위 식에서 K 는 제어 이득, e 는 양자화에 의한 잡음이다. 양자화에 의한 잡음 e 는 출력 신호의 크기가 유한하다는 가정하에서 e 의 최대 크기는 다음과 같은 상한치를 갖는다.

$$e_i^2 \le \gamma y_i^2 \quad \forall i \in \{1,2,\cdots \tag{3}$$

여기서 γ 는 하나의 샘플 신호를 표현하는데 사용되는 비트수와 양자화 방법에 따라서 적절히 결정되는 상수이다. (3)에 의해서 다음과 같은 필요 조건이 쉽게 유도된다.

$$e^T e < \gamma y^T y \tag{4}$$

부등식 (4)는 등가적으로 다음 행렬 부등식으로 표현 가능하다.

$$\begin{bmatrix} -\gamma C^T C & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0 \tag{5}$$

리아푸프노프 함수 $V(k) = x(k)^T P x(k)$ 로 정의할 때에 리아푸노프 안정성 조건은 다음과 같다.

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0 \tag{6}$$

정리-1. 행렬 부등식 (7)을 만족하는 $P, Q, \tau > 0$ 가 존재하고 $PBK = Q$ 를 만족하는 K 가 존재할 때에 (1)에서 정의한 시스템은 리아푸노프 안정성을 갖는다.

$$\begin{bmatrix} -P+\tau\gamma C^T C & A^T Q & 0 & A^T P + C^T Q^T & C^T Q^T \\ * & -\tau I & Q^T & 0 & Q^T \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -P & 0 \\ * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{7}$$

증명. (1)의 식을 (6)에 대입 후에 정리하면 다음과 같은 행렬 식으로 표현이 가능하다.

$$\Delta V(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ e \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ e \end{bmatrix} < 0$$

$$W_{11} = -P + (A+BKC)^T P(A+BKC) \tag{8}$$

$$W_{12} = (A+BKC)^T PBK$$

$$W_{22} = K^T B^T PBK$$

(5)와 (7)에 S-procedure 를 적용하여 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} W_{11}+\tau\gamma C^T C & W_{12} \\ W_{12}^T & W_{22}-\tau I \end{bmatrix} < 0 \tag{9}$$

위 식에서 τ 는 임의의 양수이다.

(9)의 부등식에서 변수는 K, P, τ 이고 쌍일차 (bilinear)성분을 가지고 있기 때문에 선형 행렬 부등식의 형태로 변환이 필요하다. 이를 위해서 Schur complement 정리를 다음과 같이 여러 차례 적용하여 선형 행렬 부등식을 유도한다. 식(8)에서의 PBK 를 Q 로 표현하면 (9)식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} W_{11}+\tau\gamma C^T C & (A+BKC)^T Q \\ * & Q^T P^{-1} Q - \tau I \end{bmatrix} < 0 \tag{10}$$

(10)에서 *는 대칭행렬에 의해서 정의되는 부분을 표현의 간략함을 위해서 생략한 것이다. (10)에서 오른쪽 하단의 대각 위치에 있는 $Q^T P^{-1} Q$ 에 대해서 Schur complement 정리를 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} W_{11}+\tau\gamma C^T C & (A+BKC)^T Q & 0 \\ * & -\tau I & Q^T \\ * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{11}$$

식(8)에 정의된 W_{11} 의 두번째 성분에 대해서 Schur complement 정리를 식(11)에 적용하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} -P+\tau\gamma C^T C & (A+BKC)^T Q & 0 & (A+BKC)^T \\ * & -\tau I & Q^T & 0 \\ * & * & -P & 0 \\ * & * & * & -P^{-1} \end{bmatrix} < 0 \tag{12}$$

(12)식에서 $BKC^T Q = C^T Q^T P^{-1} Q$ 이고 이 성분에 대해서 Schur complement 정리를 적용하면 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} -P+T & A^T Q & 0 & (A+BKC)^T & C^T Q^T \\ * & -\tau I - Q^T P^{-1} Q & Q^T & 0 & Q^T \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{13}$$

(13)에서 $T = \tau\gamma C^T C - C^T Q^T P^{-1} QC$ 이다. (13) 행렬 부등식에서 비선형 성분은 첫번째와 두번째 대각 성분 행렬이 남아 있다. (13)에서 정의되는 행렬이 Negative Definite 의 특성을 갖기 위해서는 모든 대각 성분이 음수이어야 되기 때문에 T 의 $C^T Q^T P^{-1} QC$ 나 두번째 대각 성분에 위치한 $Q^T P^{-1} Q$ 에 대해서 Schur complement 정리를 적용하는 것이 불가하다. $C^T Q^T P^{-1} QC$ 와 $Q^T P^{-1} Q$ 은 모두 positive definite 행렬이기 때문에 (12)에서 정의된 행렬의 상한치 행렬이 negative definite 이면 (12)의 조건을 만족하게 된다. 이에 따른 행렬의 부등식은 다음과 같이 정리된다.

$$\begin{bmatrix} -P+\tau\gamma C^T C & A^T Q & 0 & (A+BKC)^T & C^T Q^T \\ * & -\tau I & Q^T & 0 & Q^T \\ * & * & -P & 0 & 0 \\ * & * & * & -P^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & -P \end{bmatrix} < 0 \tag{14}$$

마지막으로 행렬의 양쪽에 네번째 대각 성분의 P^{-1} 를 P 로 바꾸기 위해서 적절한 행렬들을 곱함으로써, 식(14)은 최종적으로 (*)의 결과를 갖는다. ■

3. 토의 및 결론

본 논문에서는 양자화된 출력을 사용하는 이산 시간 출력 궤환 제어 시스템의 안정성 조건을 제시하였다. 이 연구는 크게 두가지 관점에서 제한 사항이 발생하고 있고 이에 대한 추가적인 연구를 필요로 한다. 첫째, 식(3)의 조건을 선형 행렬 부등식에 적용하기 어려웠기 때문에 식(3)에 대한 충분 조건을 사용하였다. 따라서, 정리-1 의 조건에 의해서 유도된 제어기는 안정성은 보장하나 식(3)의 조건을 만족시키지 못하는 경우가 발생할 수 있다. 둘째, 리아푸노프 안정 조건에서 비선형성을 제거하는 과정에서 행렬의 상한치를 사용했기 때문에 정리-1 에서 제시된 조건은 보수적인 조건이다. 또한, 출력 신호와 제어 신호가 모두 양자화 되는 경우에 대해서 추가적인 연구가 요청된다.

4. 사사

이 논문은 2017 년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(과제번호 : NRF-2017R1A2B4007398)

참고문헌

[1] Rachana Ashok Gupta, and Mo-Yuen Chow, "Networked Control System: Overview and Research Trends," IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 57, N0. 7, , pp. 2527 - 2535, July 2010.
[2]] N. Elia and S. Mitter, “Stabilization of linear systems with limited information,” IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 46, no. 9, pp. 1384–1400, Sep. 2001.
[3] F. Palacios-Quinonero, J. Rubio-Massegu, J.M. Rossell, and H. R. Karimi, "Recent Advances in Static Output-Feedback Controller Design with Applications to Vibration Control of Large Structures," Modeling, Identification and Control, Vol. 35, No. 3, pp. 169-190, 2014.