

# 입자추적법에 의한 축대칭 급확대부의 입자확산현상 수치해석

박운영\*<sup>†</sup> · 양희성\*\* · 임충식\*\*

## Numerical Simulation on Particle Dispersion in Axisymmetric Sudden-Expansion by Tracer Method

Ounyoung Park\*<sup>†</sup> · Hee Sung Yang\*\* · Chung Sik Yim\*\*

### ABSTRACT

Software has been developed for simulating particle dispersion in a circular pipe with sudden-expansion, which models the fuel feeding system of a combustor that uses metal powder like aluminum as fuel. The Lagrangian based discrete tracer point method was employed for a plug flow of particles that satisfies local turbulent velocity fluctuations. A radial velocity component was created to improve the flow turning outwards in the recirculation zone. The particle distribution patterns from both with and without the component were directly compared with the experiments near the reattachment.

### 초 록

알루미늄과 같은 금속분말을 연료로 사용하는 추진체의 연료공급장치에 있어, 원통형 공급관 내부를 이동하는 분말이 연소기로 진입하면서 발생하는 분말의 급확대부 영역에서의 확산현상을 해석하기 위해 컴퓨터 소프트웨어를 개발하였다. 플러그 유동형태의 입자집단운동을 기술하기 위해서 일종의 Lagrangian기법이며 난류속도변동 조건을 만족하는 개별입자추적법을 도입하였다. 여기에 재순환 영역에서 유체의 방향전환을 증진시키기 위해 기하학적 유동 구조에 입각한 반경방향 속도성분을 추가시켰다. 속도 추가성분의 유무에 따른 급확대부 재부착점 부근에서의 입자 속도분포 수치해석 결과를 기존의 실험결과와 비교하였다.

Key Words: Two-phase Flow(이상 유동), Sudden Expansion(급확대부), Reattachment(재부착점), Discrete Tracer Point Method(개별입자추적법)

### 1. 서 론

\* 울산과학기술원 기계항공및원자력공학부

\*\* 세연이엔에스

† 교신저자, E-mail: parkoy@unist.ac.kr

수반응 금속 (Hydro-reactive Metal)과 담수/해수의 급격한 연소반응을 동력원으로 이용하는

사례가 고조되며, 특히 물의 산화제 역할로 인해 잠수함, 어뢰, 해저 무인무기 시스템의 추진력에 적용하는 추세가 증가하고 있다[1-4]. 금속-물 시스템에서는 화학반응열은 직접적인 에너지원일 뿐만 아니라, 반응 후의 스팀으로 증기터빈 운용과 냉각과정의 소산물인 수소의 대체에너지화가 가능하므로 친환경 발전시스템(Green Energy Generator) 측면에서 민수 분야에서도 각광을 받고 있다[5, 6].

해당 추진시스템 개발에 있어 연료의 점화 및 연소 안정성/지속성 유지의 직접적 요건은 고압에서의 분말 이송방법이다. 이송 중 분말확산은 저장장치의 구조와 공급관의 크기 및 출구형상에 의해 결정된다. 대개의 경우 공급관 길이 대비 직경의 왜소로 이상 유동이 연소기에 도달할 즈음에는 완전발달 유체형태를 갖추게 되고 이 경우, 비교적 간단한 방법으로 분말의 확산과정 해석이 가능하다. 그러나 연소기에 진입하게 되면서 유동장의 갑작스런 변화로 인해 해석자체가 복잡하고 정확도도 반감된다.

이상 유동 확산 연구의 선두격인 Taylor[7, 8]은 가는 파이프 내부의 분자확산 현상과 유동장 단면의 속도분포를 실험적으로 연구하는 한편, 축방향 농도분포를 확산미분방정식으로 구하고, 해당 확산계수를 파이프 직경 및 마찰속도의 함수로 수식화 하였다. Laufer[9]는 직경 0.254 m인 내면이 매끈한 직선 원형 파이프를 이용해서 완전발달유체의 난류강도 측정실험 및 해석을 병행하고 반경방향 3개 구역별 유동 특성을 설명하였다. Sasaki[10]과 Widiatmojo et al.[11]은 광산의 통풍관 및 갱도 내부에서 가스와 먼지의 확산 정도를 평가하기 위해 일종의 임의행로법인 개별입자추적법(DTPM: Discrete Tracer Point Method)을 개발하였다. 난류속도분포는 1/7th 법을 적용하고, 난류강도는 Laufer[9]의 실측결과를 근사식으로 전환시킨 후 가우스 확률밀도함수 조건 및 레이놀즈 변형력 영향을 추가해서 이상 유동을 모사하는 방법으로, 난류장의 지배방정식 수치해석과정을 생략하였다. 해석결과에 민감한 계산 시간간격은 난류 소용돌이의 지속시간을 기준으로 삼았다.

급확대부 구역에서의 이상 유동 연구에서 단상 유체 분리현상 연구에 대한 종합평가가 정리되어 있다[12]. Eulerian-Lagrangian 모델의 이상 유동현상 수치해석에서는 Navier-Stokes 방정식과 표준  $k-\epsilon$  모델로 유동장을 구한 후 입자를 유동장에 투입하는 방식이 통용되며, 입자존재로 인한 유동장의 변화를 운동량 보존방정식에서 보상해 가면서 해를 구한다[13-15]. 난류상의 입자확산 해석을 위해, 가우스 확률장에 입각한 임의행로법으로 입자 개개의 운동궤적을 추적하는 기법을 이용한다[10, 14, 16]. 한편 실험분야에서는, 디젤 오일 속을 흐르는 유리구슬의 확산현상을 위해 진입부, 전이부, 재발달 등, 3개 구역으로 구분해서 속도분포를 실측하고, 전이부에서의 속도구배가 심하게 나타나는 현상을 파악하였다[17-19]. 특히 Founti et al.[19]는 두 종류의 디젤/유리구슬의 수직 이상 유동에서의 속도 분포 수치해석을 시도하였고. 운동 동력을 저항력, 부가 중량, 압력 경도력, 전단력, 회전 양력, 중력 등 6개로 구분하고 항목별 영향력을 평가하였다.

평면 혹은 축대칭 급확대부 내의 재부착점 위치에 대한 다양한 실험 및 해석이, 뉴턴/비-뉴턴 유체를 대상으로 수행되었다[20-24]. 층류 및 난류별 재부착점의 위치결정 요인으로 레이놀즈수, 확대비율, 입자밀도, 중심축 및 주입부 유속, 유동장 입구 및 출구 형상 등을 선택, 각각의 영향을 조사하고, 주요인자인 레이놀즈수와 확대비율에 대한 관계식을 도출하였다[23]. 광범위한 레이놀즈수의 유동실험 결과, 2000이상 구간에서의 재부착점 위치는 스텝 높이의 20-28배 정도임을 밝혔다[24].

본 연구에서는 연료 공급관과 연소기 연결부인 급확대부 영역에서의 입자 확산현상 수치해석을 수행하는데 있어, 직선 원형 파이프의 이상 유동해석에 적용된 개별입자추적법(DTPM) 및 가우스 확률분포함수(GPDF)에 근거한 국소 난류 속도변동 처리기법[11]을 응용하고, 박리유동에 따른 재순환 영역과의 경계층 형성 및 재부착현상을 기하학적 모델로 구사하여 해석결과의 정확도를 향상시키고자 하였다.

## 2. 수치모델

### 2.1 입자운동

난류 이상 유동을 해석하는데 있어 단순화를 도모할 목적으로 입자간 상호작용은 무시하고, 공급관에서의 유속은 평균속도를 유지하며, 이송매체 및 입자의 물성은 일정하다고 가정한다[11].

Figure 1은 직선 원형 연료 공급관 및 연소기를 개략적으로 도식화한 것으로, 반경이 각각  $r_1$ 과  $r_2$ 인 공급부와 급확대부를 보여준다. 분말입자는 중심축상의 반경  $r_p$ 인 공급관을 통해 별도로 투입되며, 일정속도로 흐르는 이송매체에 의해 이송되면서 축 및 반경방향으로 확산한다. 공급관과 연소기가 연결되는 지점이 급확대부이고, 양단간 확대비를  $E_r$ 은  $r_1$ 에 대한 반경차 ( $r_2 - r_1$ ) 혹은 스텝  $h$ 의 비로 정의된다.

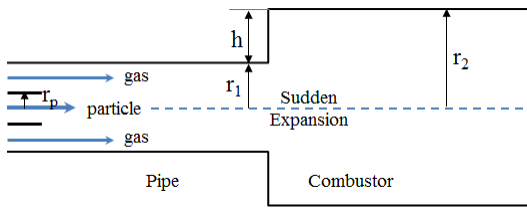


Fig. 1 Schematic of Domain of Study for Particle-Gas Provider and Combustor

유체는 급확대부를 지나면서 유체 분리현상으로 인해 생성된 경계층을 기준으로 재순환 영역 이외의 구역을 흐르고, 이후 하류 일정지점  $L_r$ 에 이르러 연소기의 벽면에 닿게 되며,  $L_r$ 이 재부착점이 된다. 전단층에 의해 분리된 재순환 영역과 재부착점이 Fig. 2에 나와 있다. 유체가 급확대부 입구에서부터 재부착점까지 이동하는 동안 유체 단면적의 변화에 따른 반경방향 속도변위  $U_r$ 은 다음과 같이 주어진다.

유동장 경계상의 점  $R$ 에서의 접선이 중심축과 교차되는 가상 초점(virtual focus)위치  $x_0$ 은,

$$x_0 = x - \frac{R}{\tan\phi} \quad (1)$$

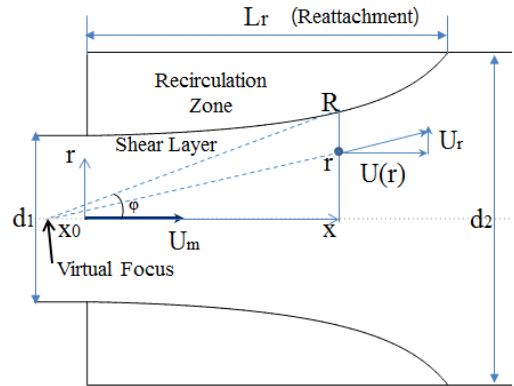


Fig. 2 Particle Diffusion in Sudden Expansion Area.

이고, 여기서  $\tan\phi$ 는 점  $R$ 에서의 접선의 기울기이다. 입자의 점  $r$ 에서의 반경속도 방향은 가상 초점에서부터 비롯된다고 가정하면  $U_r$ 은,

$$U_r = \frac{r}{R} \tan\phi U(r) \quad (2)$$

이 된다. 유속  $U(r)$ 은 유체연속성에 지배되므로,

$$U(r) = \left(\frac{r_1}{R}\right)^2 U_m \quad (3)$$

로 주어진다. 여기서  $U_m$ 은 축방향 평균속도이다.

Figure 3은 직교좌표계에서 입자의 운동을 묘사하고 있다. 입자는  $x$ 축 방향으로 속도  $U$ 로 이동하며 각 방향 ( $x, y, z$ )의 국소 난류변동속도 성분 ( $u', v', w'$ )을 갖는다.  $U$ 의 크기는 연료 공급관에서는  $U=U_m$ 이고, 연소기에서는  $U=U(r)$ 이다. ( $u', v_r', v_\theta'$ )는 원통형 좌표계에서의 속도성분을 표시하고, 직교좌표계와의 상관관계는 Eq. 4와 같다.

$$[u' \ v' \ w']^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} [u_r' \ v_r' \ v_\theta']^T \quad (4)$$

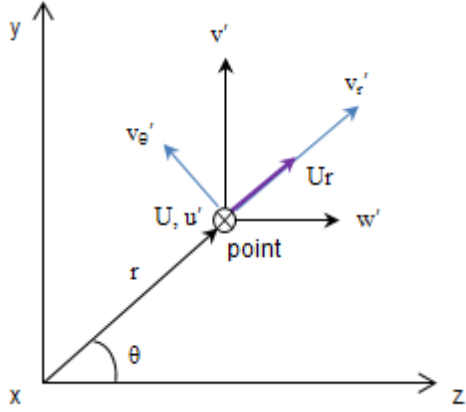


Fig. 3 Particle Velocity Components in both Cartesian and Cylindrical Coordinates

Figure 3에서  $U_r$ 은 입자가 급확대부에 진입하게 되는 경우에만 생성되는 속도성분이다. Eq. 5는 입자의 순간 위치변동을 나타낸다.

$$[\Delta x \Delta y \Delta z]^T = [U + u' \quad V + v' \quad W + w']^T \Delta t \quad (5)$$

여기서,  $V$ 와  $W$ 는 각각  $U_r$ 의  $y$ 축과  $z$ 축 방향 속도성분이고,  $\Delta t$ 는 경과시간으로 난류 소용돌이의 지속시간을 의미한다.

## 2.2 속도 분포

Nikuradse에 따르면, 정상상태에서의 무차원 속도  $U^+$ 의 반경방향 분포는 Eq. 6으로 주어지고 각 구역별 해당 계수는 Table 1과 같다[11].

$$U(r)^+ = C_1 \ln r^+ + C_2 r^+ + C_3 \quad (6)$$

$$U^+ = \frac{U}{u^*} \quad (7)$$

$$r^+ = \frac{(R-r)}{\nu} u^* \quad (8)$$

여기서  $\nu$ 는 유체의 동점성률이고,  $R$ 은 파이프 반경으로 공급관인 경우  $r_1$ , 연소기는  $r_2$ 가 된다.

Table 1. Coefficients for Regional Averaged Axial Velocity

| Zone              | Range             | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ |
|-------------------|-------------------|-------|-------|-------|
| Viscous Sub Layer | $r^+ \leq 5$      | 0     | 1     | 0     |
| Buffer Layer      | $5 < r^+ \leq 30$ | 5.0   | 0     | -3.05 |
| Turbulent Zone    | $r^+ > 30$        | 2.5   | 0     | 5.5   |

Taylor[8]에 의하면 전단속도  $u^*$ 는 다음과 같다.

$$u^* = U_m \sqrt{\frac{f}{8}} \quad (9)$$

마찰계수  $f$ 는 레이놀즈수  $Re$ 로 구한다.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2.0 \log(Re \sqrt{f}) - 0.8 \quad (10)$$

## 2.3 난류 영향

난류장에서의 입자의 국부이동은 가우스 확률 밀도함수를 만족하는 난류 소용돌이에 기인하고, 난류강도 혹은 각 방향으로의 속도변동의 실효값(rms)은 표준편차와 같다고 가정한다[10]. 방향별 난류 속도 벡터는 Box Muller 알고리즘을 이

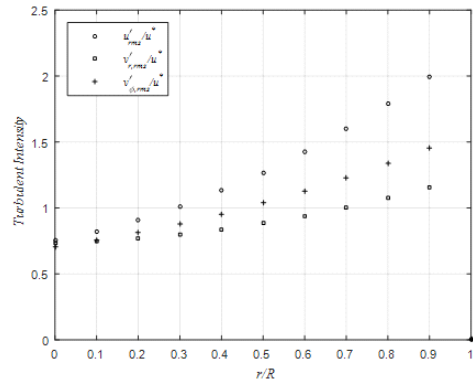


Fig. 4 Experimental Result of Turbulent Intensities in Cylindrical Coordinate [Laufer, 1954]

용해서 GPDF를 충족시키는 3개 세트의 의사 난수로서 대신하고, 입자이동으로 말미암은 레이놀즈 변형력의 영향은  $v_r'$  방향이 항상  $u'$ 에 반대되게 하는 방식으로 준다[11]. Fig. 4는 Laufer[9]의 반경위치에 대한 난류변동속도의 실측 결과로, 반경위치와 속도성분의 실효값을 각각 R과  $u^*$ 로 무차원화 시킨 것이다. 본 연구에서는, k- $\epsilon$  난류모델의 해를 직접 구하는 대신 이 실험데이터를 근거로 난류영향을 적용시켰다.

### 3. 해석결과 및 분석

#### 3.1 직선 원형 파이프 내부 확산

Figure 5는, 가우스 확률밀도함수에 근거한 Box Muller 알고리즘을 이용해서 생성된 2000개의 가상 입자집단의 정규화 된 분포상태를 보여 준다. 이러한 초기분포를 갖는 입자집단이 영점에서부터 출발해서 직경 0.5m, 유속 1.5m/s인 공기 흐름을 따라 이동하면서 주축 및 반경방향으로 확산되는 일련의 과정이 Fig. 6에 나와 있다. 여기서 계산간격은  $\Delta t=1$  s로 하였고, 그 결과는 Widiatmojo[11]의 해석과 흡사하다.

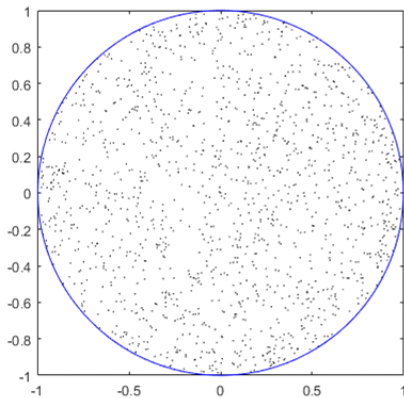


Fig. 5 Initial Particle Distribution created by Box Muller Algorithm

참고로, 입자공급관 직경이 파이프 길이에 비해 상당히 작을 경우에는 입자확산은 초기 주입 조건에 별영향을 받지 않는다[10]. 예컨대, Fig. 6

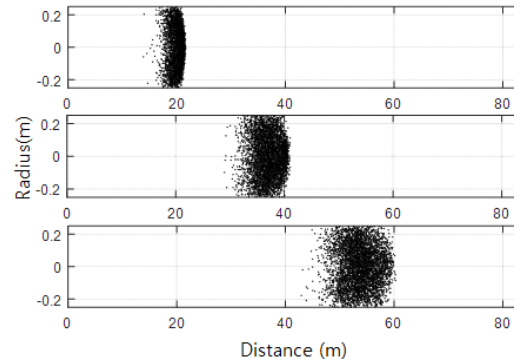


Fig. 6 Sequential Particle Diffusion at t=11, 22, and 33 s. ( $\phi=0.5$  m,  $U_m=1.5$  m/s,  $\Delta t=1$  s)

에서는 주입 후 11초 이내에 이미 파이프 전체 단면을 채우며 흐르고 있다. Fig. 6에서, 축방향 확산은 입자집단의 폭 변화를 의미하며 그 경향이 잘 나타나 있다. Taylor[7]은 입자농도의 축대칭 분포현상을 일차원 편미분방정식으로 표현하였다. 축을 따라 평균속도  $U_m$ 으로 이동하는 입자의 시간별 농도 변화율은 다음 식과 같다.

$$\frac{A}{\Gamma} C(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Et}} \exp\left(\frac{-(x - U_m t)^2}{4Et}\right) \quad (11)$$

$$E = 10.10 r_1 u^* \quad (12)$$

Equation 11에서 C는 입자농도, A는 유체의 단면적,  $\Gamma$ 는 입자체적이고, E는 축방향 확산계수이다. Eq. 11 및 Eq. 12의 해는 Fig. 6과 직접 비견되어진다.

#### 3.2 축대칭 급확대부 확산

급확대부 내부에서의 입자확산 해석에는 유체의 재부착점 위치에 대한 정보가 필요하다. 재부착점  $L_r$ 은 Eq. 13처럼 레이놀즈수, 확대비율, 그리고 입자농도의 함수이다[24].

$$L_r = f(E_r, R_e, C) \quad (13)$$

Hughes[25]에 의하면 재부착점은,

$$\frac{L_r}{h} = \frac{1}{c^2} \frac{h}{d_2} R_e \quad (14)$$

로 표시가 가능하고, c는 실험상수이다. 층류에서의 재부착점은  $R_e$  및  $E_r$ 의 함수로 Eq. 15와 같이 주어지며, 각 항의 계수  $a_n$  ( $n=1\sim5$ )은 실험적으로 정해진다[23].

$$\frac{L_r}{h} = a_1 + a_2 R_e + a_3 E_r + a_4 R_e E_r + a_5 R_e \sqrt{E_r} \quad (15)$$

Figure 7은 레이놀즈수에 대한  $L_r$ 의 다양한 실험결과를 보여주며, 여기서  $L_r$ 은 유동장의 전이점을 향해 증가하다가 난류대로 진입하면서부터 급격히 강하되어  $R_e=3000$  이상에서는 특정 값에 수렴됨을 알 수 있다. 실측된 재부착점 위치범위가 유동장에 따라 상이하므로, 앞서 언급한 기준보다  $10h < L_r < 28h$ 가 더 일반적일 수 있겠다[24].

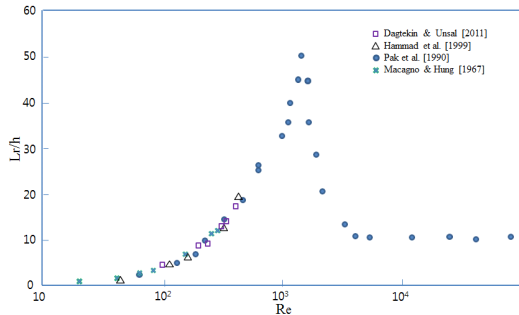


Fig. 7 Shear Layer Reattachment versus Reynolds Number[23]

Figure 8은 Table 2의 조건에서 수행된 특정 이상 유동 실험결과로,  $d_1=0.255$  m,  $d_2=0.51$  m인 급확대부 내부를 흐르는 동안 하류 6개 지점에서의 입자의 반경반향 속도분포를 보여 준다[18]. 진입구에서부터 9 mm 지점은 진입 구역, 50, 100, 그리고 150 mm 지점은 재순환 구역, 그리고 200 및 300 mm 지점은 재발달 구역에 해당한다. 그림에서 붉은 점선은 각각 상류 및 하류

파이프의 반경 크기를 나타내며, 여기서 주목할 사항은 재순환 구역에서의 속도분포가 상당히 특이하다는 점이다.

Table 2. Two-phase Flow Test Condition

| Type           | Unit                     | Liquid* | Particle** |
|----------------|--------------------------|---------|------------|
| Diameter       | $\mu\text{m}$            | -       | 450        |
| Density        | $\text{kg}/\text{m}^3$   | 830     | 2500       |
| Viscosity      | $\text{Pa}\cdot\text{s}$ | 4.32E-3 | -          |
| Inlet Velocity | $\text{m}/\text{s}$      | 6       | -          |
| Mass Flux      | $\text{kg}/\text{s}$     | 2.29    | 0.213      |

\* Diesel \*\* Glass bid

수치해석에서도, 이 구역에서의 축방향 유속은 급격한 국소 난류변동의 영향으로 Navier-Stokes 방정식 및 표준 k- $\epsilon$  모델을 직접 적용하더라도 해의 정확도가 문제시 된다. 그러나 입자가 재발달 구역에 들어서면서부터 유동이 안정성을 회복하므로 정확도가 향상된다[13]. Fig. 8에서 중심축과 가장 근접지점(실제 이격거리: 0.32-0.63 mm)의 속도와 진입 평균속도  $U_m=6$  m/s를 Eq. 3에 대입하면 경계층 형상이 Fig. 9와 같이 주어지고, 축 방향 유동은 경계층의 하부, 그리고 재순환 영역은 상부에 위치하게 된다.

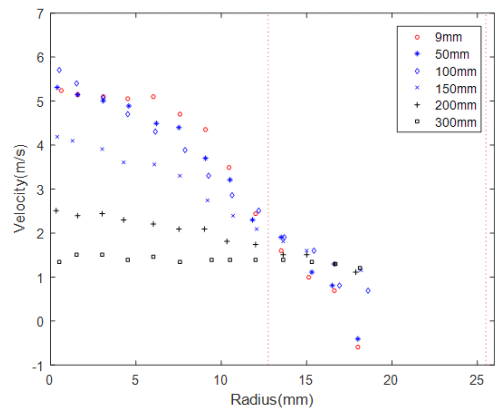


Fig. 8 Flow Frontal Velocity in Sudden Expansion[18]

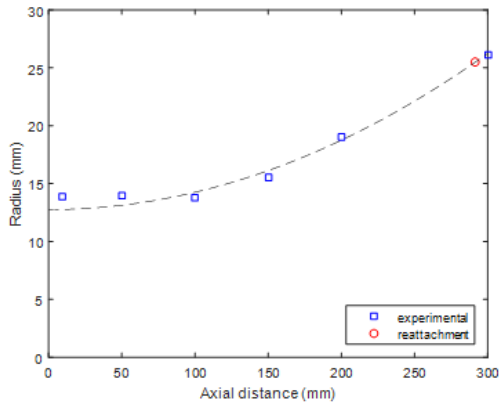


Fig. 9 Shear Layer Profile in Sudden Expansion Region

Figure 9의 원 표시는 재부착점으로, Eq. 3에서  $U(r)=1.5 \text{ m/s}$  에 해당되는 지점이고, 진입구로부터 약 292 mm 하류에 위치한다. 경계층 단면형상의 수식화는, Eq. 14 혹은 Eq. 15로부터의  $L_r$ 과 점  $(0, r_1)$  및 점  $(L_r, r_2)$  구간에 대한 근사식을 구하는 것으로 가능하고, Fig. 9의 경우 이 차함수를 적용하면 실측형상과 거의 일치한다. 본 연구에서는 앞서 언급한 재부착점 범위 내에 속하는  $L_r=11.45h$ 를 이용해서 경계층의 단면을 구하고, 이를 바탕으로 반경방향 입자확산을 해석하였으며, 그 결과가 Fig. 10에 나와 있다.

Figure 10은, 앞서 언급한 기존의 DTPM방식을 적용해서 급확대부에서 레이놀즈수의 변화만

을 고려한 경우와, 본 연구에서 제안한 유동장의 기하학적 구조 변화에 따른 반경방향 강제변위를 추가한 경우의 계산결과를 보여준다. Fig. 10에서 보듯이 전자의 경우 급확대부 내에서의 확산이 거의 발생하지 않으나 후자에서는 명확히 나타난다. 물론 재부착점까지의 거리가 상대적으로 짧아 전자의 경우 난류변동의 영향이 입자에 미칠 시간적 여유가 불충분한 이유일 수도 있다. 그러나 실험결과는 300 mm이내에서 유동장이 안정을 되찾고 재부착되는 사실을 입증하기 때문에, 단순히 기존 방식의 적용연장으로서는 급확대부에서의 입자확산 해석에 무리가 있다고 할 수 있다. 따라서 본 연구에서 제안한 반경방향 속도 첨가 방식이 보다 실질적이겠다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 금속분말을 연료로 하는 추진체의 연료공급관과 연소기의 연결부위에서 발생하는 난류성 분말 확산현상을 수치해석 하였다. 일종의 Lagrangian 기법이며 국소 난류속도변동 조건과 레이놀즈 변형력을 만족하는 개별입자추적법(DTPM)을 도입하였고, 입자집단은 Box Muller 알고리즘을 통해 생성하였다. 확산해석에 있어 이상 유체는 일정 평균속도로 이동하고, 각 방향으로의 국부변동 절대크기는 표준편차로 주

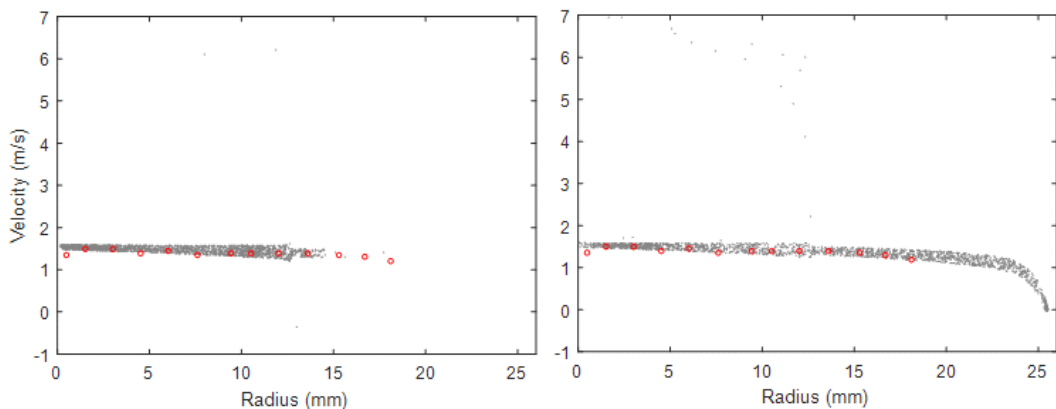


Fig. 10 Comparison of Velocity Profiles near the Reattachment with and without Radial Vector Component,  $U_r$

어지는 난류강도에 따르고, 그 상대크기와 방향성 또한 가우스확률분포를 만족하는 임의행로법으로 결정하였다. 레이놀즈 변형력 모델을 적용해서 입자의 반경방향 속도성분의 방향성은 전적으로 축방향 성분에 의존토록 하였다. 일개 입자집단이 Sommerfeld[18]의 실험에 준하는 속도로 급확대부에 진입한다는 초기조건을 설정한 후, 재순환 구역을 거쳐 재부착점에 도달하기까지의 실시간 속도분포를 계산하였다. 파이프 구경증가에 따른 유동장 변화만을 고려해서 계산된 재부착점에서의 입자의 반경방향 확산은 도달시간이 짧은 만큼 거의 발생되지 않았으므로, 재순환 구역에서 유체의 방향전환을 가중시킬 필요성이 대두되었다. 이에 따라 반경방향 속도 성분을 위치별 유동장의 기하학적 구조에 입각해서 추가로 고려하였다. 속도 추가성분의 영향으로 재부착점 근처에서의 입자 속도분포 계산 결과는 실험결과와 상당히 근사하였다.

따라서 연료공급장치 설계과정에서 사용자 편의 및 경제면에 입각한 설계 도구이자 중간검증 도구로서, 본 연구에서 개발한 컴퓨터 프로그램의 적용가능성이 확인되었다.

#### 참 고 문 헌

- Sutton, G. P., Rocket Propulsion Elements, 8th ed., John Wiley & Sons Inc., 2010
- Waters, D.F., and Cadou, C.P., "Modeling a Hybrid-Rankin-Cycle/Fuel-Cell Underwater Propulsion System based on Aluminum-Water Combustion," J. of Power Sources, Vol. 221, 2013, pp.272-283
- Swamy, A.K.N. and Shafirovich, E., "Combustion of Activated Aluminum with Water," 8th U.S. National Combustion Meeting, May 19-22, 2013
- Ingenito, A. and Bruno, C., "Using Aluminum for Space Propulsion," J. of Propulsion and Power, Vol. 20, 2004, pp.1056-1063
- Mercati, S. Milani, M., Montorsi, L., and Paltrinieri, F., "Design of Steam Generator in an Energy Conversion System based on the Aluminum with Water," Applied Energy, Vol. 97, 2012, pp.686-694
- Xiani, H., Gao, T., Pan, X., Wei, D., Lv, C. Qin, L., and Huang, Y., "A Review: Feasibility of Hydrogen Generation from the Reaction between Aluminum and Water for Fuel Cell Applications," J. of Power Sources, Vol. 229, 2013, pp.133-140
- Taylor, G., "Dispersion of Soluble Matter in Solvent Flowing Slowly through a Tube," Proc. R. Soc. London, Vol. 219, No. 1137, 1953, pp.186-203
- Taylor, G., "The Dispersion of Matter in Solvent Flowing Slowly through a Tube," Proc. R. Soc. London, Vol. 223, No. 1155, 1954, pp.446-468
- Laufer, J., "The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow," NACA Report 1174, 1954
- Sasaki, K., Widiatmojo A., Widodo, N.P., Arpa, G. and Sugai, Y., "Numerical Simulation on Diffusion Phenomena in Mine Airways by using a Method of Discrete Tracer Movements," 12th U.S./North American Mine Ventilation Symposium, 2008, pp.287-292
- Widiatmojo, A., Sasaki, K., Widodo, N.P., and Sugai, Y., "Discrete Tracer Point Method to evaluate Turbulent Diffusion in Circular Pipe Flow," J. of Flow Control, Measurement & Visualization, Vol. 1, 2013, pp.57-68
- Eaton, J.K. and Johnston, J.P., "Review of Research on Subsonic Turbulent Flows Reattachment," AIAA J., Vol. 19, 1981, pp.1093-1100
- Mergheni, M.A., Sautet, J.C., Ticha H.B. and Nasrallah S.B., "Numerical Simulation



- of Sudden-Expansion Particle-Laden Flows using the Eulerian-Lagrangian Approach," *Thermal Science*, Vol. 16, No. 4, 2012, pp.1005-1012
14. Terekhov, V.I. and Pakhomov, M.A., "Turbulent Gas-Dispersed Flow in a Pipe with Sudden Expansion," *Thermophysics and Aeromechanics*, Vol. 15, No. 4, 2008, pp.589-601
  15. Manica, R. and De Bortoli, A.L., "Simulation of Sudden Expansion Flows for Power-Law Fluids," *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 121, 2004, pp.35-40
  16. Simonin, O., "Prediction of the Dispersed Phase Turbulence in Particle-Laden Jets," 4th Int. Symposium on Gas-Solid Flows, Portland, OR, USA, 1991, pp.23-26
  17. Sommerfeld, M., "Analysis of Collision Effects for Turbulent Gas-Particle Flow in a Horizontal Channel: Part 1. Particle Transport," *Int. J. of Multiphase Flow*, Vol. 29, 2003, pp.675-699
  18. Sommerfeld, M., "Particle Dispersion in a Planar Shear Layer," 6th Workshop on Two-Phase Flow Predictions, Erlangen, Germany, 1992
  19. Founti, M. and Klipfel, A., "Experimental and Computational Investigations of Nearly Dense Two-phase Sudden Expansion Flows," *Experimental Thermal and Fluid Science*, Vol. 17, 1998, pp.27-36
  20. Scott, P.S and Mirza, F.A., "A Finite Element Analysis of Laminar Flows through Planar and Axisymmetric Abrupt Expansions," *Computers & Fluids*, Vol. 14, No. 4, 1986, pp.423-432
  21. So, R.M.C., "Inlet Centerline Turbulence Effects on Reattachment Length in Axisymmetric Sudden-Expansion Flows," *Experimental in Fluids*, Vol. 5, 1987, pp.424-426
  22. Adams, E.W., "Effects of the Separating Shear Layer on the Reattachment Flow Structure, Part 2: Reattachment Length and Wall Shear Stress", *Experiments in Fluids*, Vol. 6, 1988, pp.493-499
  23. Moallemi, N. and Brinkerhoff, J.R., "Numerical Analysis of Laminar and Transitional Flow in a Planar Sudden Expansion," *Computers and Fluids*, Vol. 140, 2016, pp.209-221
  24. Pak, B., Cho., Y.I., and Choi, S.U.S., "Separation and Reattachment of Non-Newtonian Fluid Flows in a Sudden Expansion Pipe," *J. of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 37, 1990, pp.175-199
  25. Hughes, T.J.R., Liu, W.K., and Brooks, A., "Review of Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Flows by the Penalty Fuction Formulation," *J. Computational Physics*, Vol. 30, 1979, pp1-60