

# 고주파 연소불안정 예측을 위한 해석기술 개발 사례

김성구\* · 조미옥\* · 한상훈\* · 최환석\*

## Introduction of Numerical Simulation Techniques for High-Frequency Combustion Instabilities

Seong-Ku Kim\*<sup>†</sup> · Miok Joh\* · Sanghoon Han\* · Hwan-Seok Choi\*

### ABSTRACT

High-frequency combustion instability results from a feedback coupling between the unsteady heat release rate and the acoustic waves formed resonantly in the combustion chamber. It can be modeled as thermoacoustic problems with various degrees of the assumptions and simplifications. This paper presents numerical analysis of self-excited combustion instabilities in a variable-length lean-premixed combustor and designs of passive control devices such as baffle and acoustic resonators in a framework of 3-D FEM Helmholtz solver. Nonlinear behaviors such as steep-fronted shock waves and a finite amplitude limit cycle are also investigated with a compressible flow simulation technique.

### 초 록

고주파 연소불안정은 비정상 화염의 열방출율 섭동과 연소실 내부에서 공진되는 음향파의 상호 결합으로 발생하는 열음향 문제로, 다양한 해석적 접근방법이 존재한다. 본 논문에서는 주파수 영역에서 선형음향 가정과 시간지연 이론을 이용한 3차원 FEM Helmholtz solver의 개발 사례를 소개하였으며, 가변길이 희박 예혼합 연소기의 자발 연소불안정 예측과 수동제어기구(배플, 음향공진기)의 설계분석 결과를 제시하였다. 또한 시간 영역에서 시간지연 이론을 이용한 압축성 유동 해석코드를 통해, 고진폭 압력섭동에 의해 야기되는 비선형 음향 특성과 한계사이클 현상을 분석하였다.

Key Words: Combustion Instability(연소불안정), Thermoacoustic System(열음향 시스템), Helmholtz Solver(헬름홀츠 해법), Time-Lag(시간지연), Steep-fronted shock wave(충격파)

### 1. 서 론

고주파 연소불안정은 연소실 내부 공진으로

발생하는 특정 음향파와 화염에 의한 열방출율 섭동이 상호 결합하여 급격한 열과 음향 에너지를 방출하는 현상이다[1]. 로켓 엔진과 가스터빈, 램제트과 같은 대부분의 연소시스템에서 발생하며, 큰 진폭의 압력 섭동, 높은 열유속과 기계적 진동을 수반한다. 특히 액체로켓엔진은 에너지

\* 한국항공우주연구원 연소기팀

† 교신저자, E-mail: kimsk@kari.re.kr

밀도가 매우 높고 소산이 적어, 연소불안정 발생 시 순식간에 회복 불능의 손상을 야기한다. 1960년대 아폴로 계획 이후 수많은 연구가 진행되었으나, 여전히 새로운 액체로켓엔진 개발에 있어 가장 큰 걸림돌이 되고 있다[2,3]. 가스터빈의 경우, 높은 효율과 공해물질 감소를 위해 가연한계 근방의 희박 영역에서 작동하는 예혼합 연소기술이 적용되고 있다. 희박 예혼합 연소 방식은 연소불안정에 취약하므로 주로 수동 및 능동 제어의 관점에서 많은 연구가 진행되고 있다[4].

시행착오와 실험적인 방법에 소요되는 개발 비용과 노력을 절감해야 하는 현실적 요구로 인해, 초기 설계 단계부터 연소불안정을 예측하고 연소안정화 설계에 활용할 수 있는 고신뢰도의 해석기술에 대한 연구도 꾸준히 진행되어 왔다. 연소시스템에 따라 연소불안정의 구동 기구(driving mechanism)가 다르고, 복잡한 물리적 현상들이 결합되어 있어 정확한 규명이 어렵다. 그러나 이론적으로는 음향장과 열방출을 섭동의 상호작용에 의해 발생하는 열음향 문제로 볼 수 있으며, 열방출을 섭동에 대한 모델링이 다를 뿐 전체적인 해석 틀은 동일하게 사용될 수 있다. 연소불안정 해석기술은 물리적 가정을 통한 단순화 정도와 모델링 난이도에 따라 다양한 접근 방법이 존재하며, 해석기법의 분류와 장단점은 참고문헌[1,5,6]에 자세히 설명되어 있다.

최근에 LES(Large Eddy Simulation) 기법을 이용한 해석적 연구가 활발히 진행되고 있으며, 연소불안정을 현상학적으로 규명할 수 있는 뛰어난 예측 능력을 보여주고 있다[7,8]. 그러나 과도한 계산시간이 요구되고 그 자체 결과만으로는 예측된 연소불안정에 대한 직접적 해답을 제시할 수 없어 실제 설계 과정에 적용하기에는 한계가 존재한다. 특히 액체로켓엔진의 경우, 초임계 압력 조건에서 발생하는 액체추진제의 난류연소 모델링은 아직도 많은 연구가 필요한 분야이다.

CERFACS를 중심으로 한 프랑스 연구그룹은 주목할 만한 연구결과를 보여주고 있다. Nicoud 등[6]은 AVSP라는 3차원 FEM Helmholtz solver를 개발하고, LES solver(AVBP)의 해석결과로

얻어진 화염응답모델과 연동하여 각각의 음향 공진 모드에 대한 불안정 여부를 예측할 수 있는 새로운 방법론을 제시하였다. 이후 AVSP 코드를 이용한 헬리콥터용 환형 가스터빈 연소기 해석[9]과 연소실 벽면 냉각률 및 압축기와 터빈에 연결된 입/출구의 음향 거동을 모사하기 위한 모델링 연구[10,11] 등을 통해 Helmholtz solver의 적용분야와 활용성을 확대해 가고 있다. 또한, Silva 등[12]은 비선형 화염 응답특성을 고려하기 위해 FDF(Flame Describing Function)의 측정결과를 AVSP 코드에 적용하였으며, 실험에서 나타난 한계사이클 거동을 예측하였다.

Helmholtz solver의 또 다른 사례로, 이탈리아 연구자들은 상용 FEM 소프트웨어인 COMSOL Multiphysics를 이용하여 Nicoud 등의 해석방법[6]을 구현하였으며[13], 비선형 화염 응답 모델에 의한 자발 불안정의 분기(bifurcation) 현상을 연구하였다[14].

가스터빈 연소기의 사례처럼 활발하지는 않지만, 최근 들어 액체로켓 연소기의 연소불안정 예측에 Helmholtz solver를 활용하려는 연구들이 일부 수행된 바 있다[8,15].

한국항공우주연구원(이하 항우연)의 연소기팀은 자체적으로 고주파 연소불안정과 관련된 해석기술을 개발하고자 노력해 왔다[16-19]. 본 논문에서는 지금까지의 개발 현황을 소개하고, 향후 연구 방향을 모색하였다.

## 2. 선형음향해석을 통한 연소불안정 연구

### 2.1 3차원 FEM Helmholtz solver 개발

항우연 연소기팀은 AVSP 코드의 개발 사례를 참고하여, 자체적으로 3차원 FEM Helmholtz solver인 ASCI3D를 개발하였다[16,17].

선형화된 파동방정식은 주파수 영역에서 다음과 같은 Helmholtz 방정식으로 변환된다.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} \right) + \frac{\omega^2}{\gamma p_0} \hat{p} = i\omega \frac{\gamma-1}{\gamma p_0} \hat{q}(\mathbf{x}) \quad (1)$$

여기서 변수 위의 기호  $\hat{\cdot}$ 는 Fourier 변환된 복소값을 의미하며, 하첨자 0는 시간평균을 나타낸다. 조화진동을 가정하면 시간에 대한 압력의 섭동은 아래와 같이 나타난다.

$$p_1(\mathbf{x}, t) = \text{Re}\{\hat{p}(\mathbf{x}) e^{-i\omega_R t}\} e^{\omega_I t} \quad (2)$$

Eq. 2의 우변에서 복소음향압력  $\hat{p}(\mathbf{x})$ 는 시간과 무관한 공간상의 음향 모드를 나타내며, 복소 각주파수의 실수부  $\omega_R$ 를 포함한 지수항은 공진주파수( $f = \omega_R/2\pi$ )에 따른 주기 진동을 의미한다. 마지막으로 허수부  $\omega_I$ 는 증폭율(growth rate)로서, 양의 부호이면 진폭이 지수함수적으로 증가하고 음의 부호에서는 감소하게 된다. Eq. 1에 대한 고유치 문제를 해석함으로써 위의 세 가지 값들을 구할 수 있다.

기본적인 수치해석 절차는 Nicoud 등의 연구 [6]와 동일하지만, 해석의 효율성을 높이기 위해 일부 수치해석방법을 개선하였다. 우선 FEM 해

석에 있어 사면체 요소만을 사용하는 AVSP 코드에 비해, ASCI3D는 4가지 형태의 요소(사면체, 프리즘, 피라미드, 육면체)를 혼합하여 사용할 수 있기 때문에, 보다 유연하고 효율적인 격자 구성이 가능하다. 또한 대규모 고유치 문제 해석을 위해 AVSP 코드와 동일하게 ARPACK 라이브러리[20]를 사용하였으나, standard 모드 대신에 shift-invert 모드를 적용하여 고유치 계산의 수렴성을 높이는 동시에 관심 대상인 음향 모드들만 선별적으로 계산할 수 있게 하였다. 대신 shift-invert 모드에서 고유치에 가까울수록 행렬식의 특이성(singularity)이 증가하여 발생하는 수치적 어려움을 극복하기 위해 MUMPS (Multi-frontal Massively Parallel Solver)[21]를 이용한 직접해법으로 복소 역행렬 계산을 수행하였다.

ASCI3D 코드의 전체 구성은 Fig. 1과 같으며, 세부적인 해석방법과 기본적인 코드 검증 결과들은 참고문헌[16,17]에 자세히 제시되어 있다.

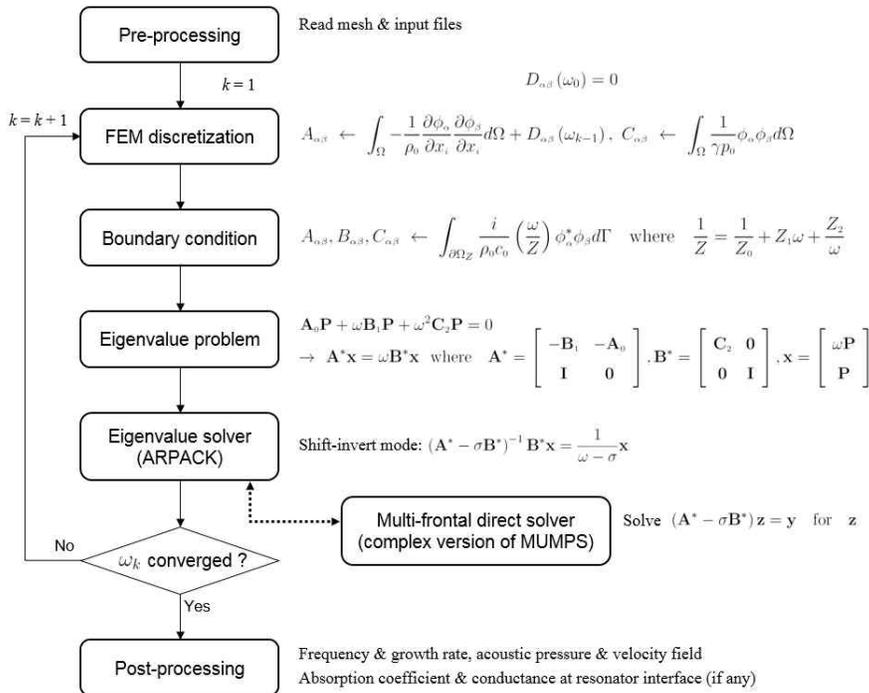


Fig. 1 Solution procedure for the Helmholtz solver ASCI3D.

## 2.2 가변길이 예혼합 연소기의 자발 불안정 해석

ASCI3D 코드의 예측 능력을 검증하기 위해, Kim 등[22]이 실험한 예혼합 모델 연소기를 해석하였다. 연소기 전체 구성은 Fig. 2(a)와 같으며, 상대적으로 단순한 형상이지만, 선회에 의한 난류 예혼합 화염 특성은 실제 산업용 가스 터빈과 유사하게 설계되었다. 횡방향(transverse) 음향모드는 관심 대상이 아니므로, 계산의 효율성을 위해 Fig. 2(b)와 같이 원주 방향으로 45° 영역만 해석영역으로 선정하였다. 실험에서 천연가스와 수소의 혼합기를 연료로 사용하였으며, 수소의 첨가량에 따라 화염 구조의 변화와 화염 전달함수를 자세히 측정하였다[22]. 이 중에서 수소 첨가량이 0%(Flame H00)과 45%(Flame H45)인 두 가지 화염 조건을 해석하였다.

Eq. 1로 주어진 열음향 문제를 해석하는 데 있어, 음향 섭동에 대한 화염응답특성  $\hat{q}(\mathbf{x})$ 를 모델링하는 것이 가장 중요하고 어려운 부분이다. 일반적으로 예혼합 화염에 대해서는 아래와 같은 속도감응 시간지연 모델을 사용한다.

$$\hat{q}(\mathbf{x}) = \frac{\bar{q}}{u} n(\mathbf{x}) e^{i\omega\tau(\mathbf{x})} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_{ref}) \cdot \mathbf{n}_{ref} \quad (3)$$

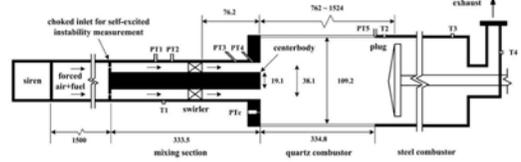
여기서  $n$ 과  $\tau$ 는 열방출율 섭동에 대한 속도 섭동의 영향을 결정하는 연소응답 파라미터로서, 각각 감응지수와 시간지연을 나타낸다. 이 값들은 실험적으로 측정되는 화염전달함수(FTF)와의 상사성으로부터 구할 수 있다.

$$FTF(\omega) = \frac{\hat{Q}/\bar{Q}}{\hat{u}/\bar{u}} = G(\omega) e^{i\phi} \quad (4)$$

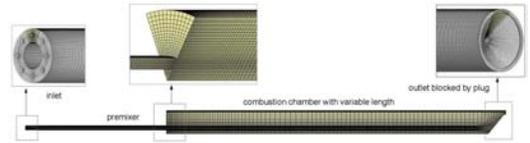
이때 이득값  $G$ 와 위상차  $\phi$ 는 주파수의 함수로서, 실험에서 측정된 결과는 Fig. 3과 같다.

Fig. 4에서 보듯이, 연소실의 길이를 변화시키며 연소시험을 수행했을 때, 특정 길이에서 자발 불안정이 발생하였으며 수소를 첨가한 화염 조건에서는 그 길이가 더 짧아졌다. 양의 증폭율( $\omega_I > 0$ )을 갖는 해석결과와 실험결과를 비교할

때, 연소실 내부에서 발생된 자발불안정은 1L 모드이며 화염조건에 따른 불안정 발생 영역이 정성적으로 일치하는 것을 알 수 있다.

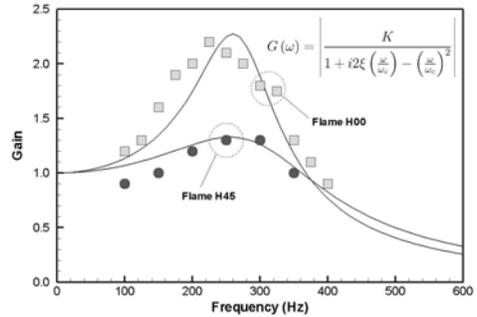


(a) Experimental setup [22]

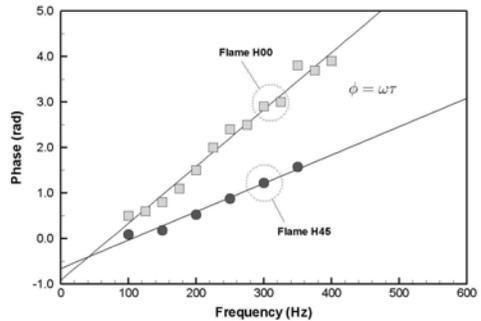


(b) Computational mesh

Fig. 2 Swirl-stabilized lean-premixed combustor.



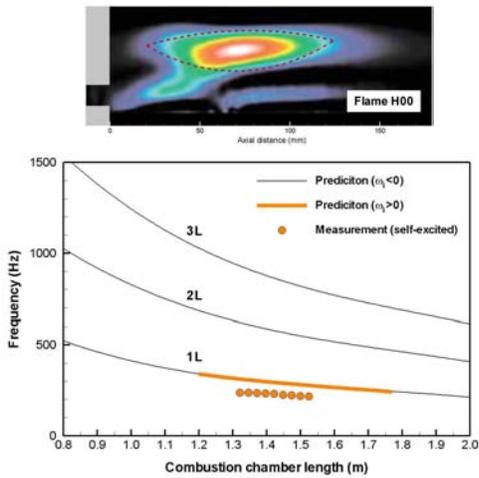
(a) Gain



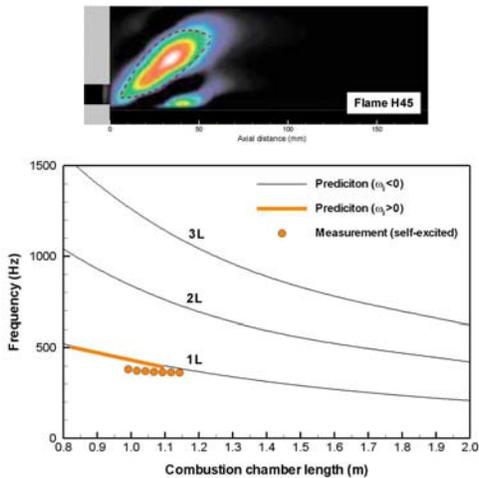
(b) Phase

Fig. 3 Global flame transfer functions measured for two different flame conditions [22].

해석모델의 비교 과정에서 화염의 길이가 커질수록 시간지연 모델 파라미터의 공간상 분포가 해석 정확도에 큰 영향을 미치는 것으로 나타났다. 또한 해석 정확도를 높이기 위해서는 입/출구 경계에서의 음향 경계조건, 연소실 내부의 음속 분포, 그리고 시스템 내부에 존재하는 감쇠기구의 모델링에 대해 추가적인 연구가 필요함을 확인하였다. 해석모델이 예측결과에 미치는 영향은 참고문헌[17]에 자세히 기술되어 있다.



(a) 100% natural gas



(b) 55% natural gas + 45% hydrogen

Fig. 4 Prediction of self-excited instabilities with varying the chamber length.

### 3. 수동제어기구 설계/해석

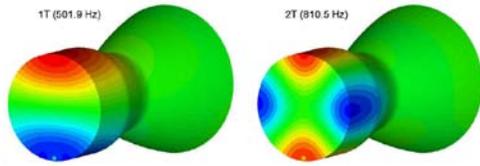
#### 3.1 Helmholtz solver를 이용한 조화해석 방법

연소안정화를 위한 수동제어기구로 일반적으로 배플과 음향공진기가 사용된다. 수동제어기구의 설계를 위해서는 음향 특성을 정량적으로 평가할 필요가 있으며, 이 목적으로 비연소 음향시험이 수행되어 왔다[23]. 본 연구에서는 음향시험을 대체하기 위해 Helmholtz solver를 이용한 선형음향해석을 수행하였으며, 음향시험 결과와 비교하여 예측 정확도를 검증하였다[18].

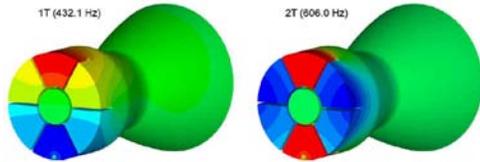
비연소 조건이므로 Eq. 1의 우변항인 열방출을 섭동은 사라지며( $\hat{q}=0$ ), 진폭이 일정한 중립상태( $\omega_I=0$ )를 가정하면 복소 각주파수는 실수부인 공진주파수만을 가지게 된다( $\omega=2\pi f$ ). 음향시험과 유사하게 가진점에서 미소 진폭의 압력 진동을 가하고 가진 주파수를 원하는 범위 내에서 순차적으로 증가시켜 가며 조화해석을 수행한다[18]. 따라서 2절에서처럼 고유치 문제를 계산할 필요가 없으며, 주어진 가진주파수에서 Eq. 1에 대한 유한요소 연립방정식을 직접 계산하여 복소음향압력  $\hat{p}(\mathbf{x})$ 을 해로 얻게 된다. 평균유동의 영향을 무시하면 속도 섭동은 압력 섭동의 구배를 통해 계산할 수 있다.

#### 3.2 배플 장착에 따른 횡방향 음향모드 특성 예측

Fig. 5는 상온 음향시험 조건에서 배플 장착 유무에 따른 1T와 2T 음향 모드의 압력 섭동 분포를 보여준다. 배플이 장착된 경우 연소실 내부의 접선방향 섭동이 배플 구획 내부에서 종방향화(longitudinalization)되어 분사면에서 횡방향 압력 구배가 현저히 감소하는 것을 알 수 있다. 이러한 영향은 해당 모드의 감쇠인자[23]를 통해 정량화될 수 있다. 또한 배플이 장착되면 분사면 근방에서 횡방향 모드의 유효 파장길이가 증가하기 때문에 해당 모드의 공진주파수가 감소하게 된다. Table 1은 배플 장착에 따른 주파수 변이와 감쇠인자 증가비에 대해 해석과 음향시험을 비교한 결과이며, 다소 번거로운 음향시험을 대체하기에 충분한 예측능력을 나타내었다.



(a) Un baffled chamber



(b) Baffled chamber

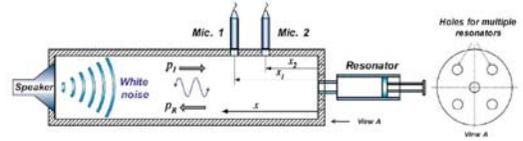
Fig. 5 Harmonic analysis of liquid rocket combustion chambers at a cold acoustic test condition.

Table 1. Comparison of frequency shift and damping factor ratio due to baffle installation

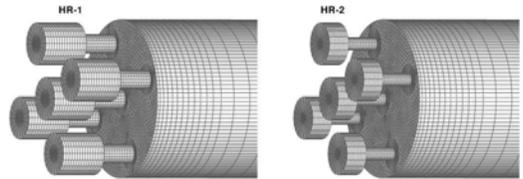
		Frequency shift (Hz)	Damping factor ratio
1T	Predicted	69.8	1.46
	Measured	68.0	1.63
2T	Predicted	204.5	2.00
	Measured	197.2	2.68

### 3.3 음향공진기의 음향감쇠 특성 해석

음향공진기를 통해 원하는 음향감쇠를 얻기 위해서는 정확한 동조가 이루어지게 설계되어야 한다. 이론적으로 유도된 동조주파수 관계식은 정형화된 형상이어야 하며, 목표 음향모드의 파장길이에 비해 공진기가 충분히 작아야만 유효하다. 이러한 이유로 Helmholtz solver의 해석결과에 대한 후처리 과정을 통해 음향공진기의 감쇠 특성을 정량적으로 평가할 수 있는 방법을 고안하였다[18]. Fig. 6과 같이 서로 다른 형상을 갖는 Helmholtz 공진기에 대해 선형음향해석을 수행하였으며, 음향시험결과[24]와 비교하였다. Fig. 7에서 보듯이 선형음향해석은 공진기 형상과 개수에 따라 음향시험에서 얻어진 음향 감쇠 특성 변화를 정확히 예측하였다. 실제 연소조건에서도 음향공진기 안팎의 음속만 알 수 있다면 공진기의 최적설계가 가능할 것으로 기대된다.

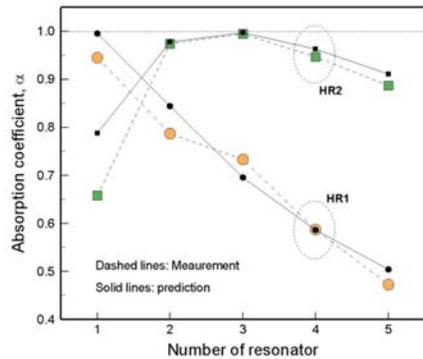


(a) Experimental setup [24]

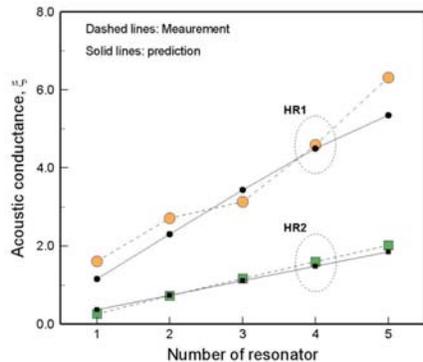


(b) Computational mesh(left: HR-1; right: HR-2)

Fig. 6 Impedance tube with two different Helmholtz resonators.



(a) Absorption coefficient



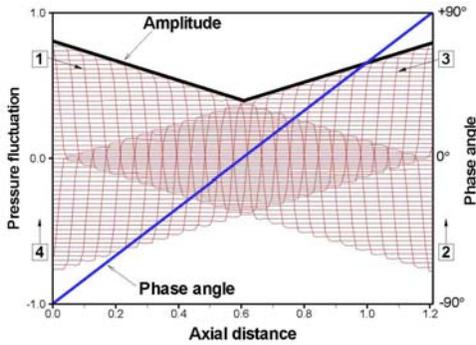
(b) Acoustic conductance

Fig. 7 Absorption coefficient and conductance for various numbers of resonators.

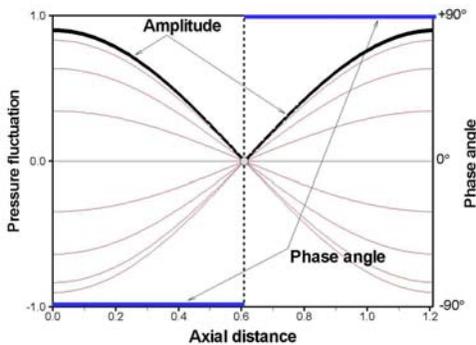
#### 4. 비선형 음향 특성을 고려한 연소불안정 해석

##### 4.1 공진관 해석을 통한 비선형 음향 특성 분석

일정 진폭 이상의 압력 섭동은 충격파를 수반하게 된다. 이러한 현상은 압력파의 전파속도(음속, 유체속도)가 위치에 따라 달라지면서 음압이 끝단에 적체되어 발생하는 비선형 음향 현상이다. 공진관 내부의 천이 과정을 압축성 유동해석기법(Euler solver)으로 해석하였다. 공진관 내부에 사인파의 압력 교란을 초기 조건으로 가하면 wave-steepening을 통해 Fig. 8(a)와 같이 충격파(sharp-fronted shock wave)로 천이되는 것을 확인하였다. 이때 중앙의 압력 노드가 사라지고 위상차가 선형적인 분포를 가진다. Fig. 8(b)의 선형 음향과 비교할 때, 매우 다른 모드 특성을 나타내게 되며, 각 위치에서 시간에 따라 측정된 신호 역시 톱니 파형(N-wave)을 나타내게 된다.



(a) steep-fronted wave



(b) linear acoustic wave

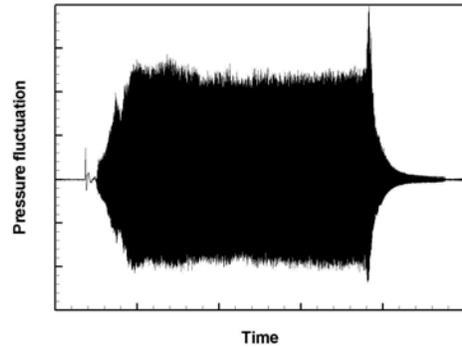
Fig. 8 Mode shapes of the first longitudinal pressure waves within a resonant pipe.

##### 4.2 가스발생기의 종방향 연소불안정 해석

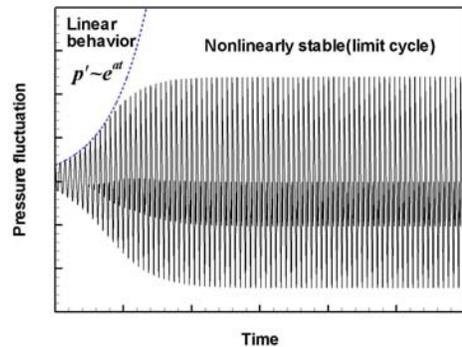
공진관의 경우와 유사하게, 30톤급 가스발생기의 초기 개발시험에서 충격파를 수반한 종방향 연소불안정이 발생한 바 있다. 압축성 유동해석 코드(Euler solver)에 아래와 같은 압력감응 시간 지연 모델을 적용하여 연소불안정을 해석하였다.

$$\dot{w} = \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{u}A)}{\partial x} \left[ 1 + \frac{n}{p} \{p'(t,x) - p'(t-\tau,x)\} \right] \quad (5)$$

이때  $n$ 과  $\tau$ 는 Fig. 9(a)와 같이 연소시험의 동압 신호를 재현하도록 결정하였다. Fig. 9(b)의 해석 결과는 초기에 선형 불안정 구간을 거쳐 충격파 거동에 의한 한계사이클에 도달하였으며, 연소시험과 유사한 신호 파형을 얻을 수 있었다[19].



(a) measurement



(b) prediction

Fig. 9 Nonlinear acoustics of longitudinal combustion instability in a gas generator.

## 5. 결론

본 논문에서는 고주파 연소불안정을 예측하고 수동안정화기구를 설계하기 위한 열음향 해석기법들의 개발 사례를 제시하였다. 그러나 이러한 해석기술들이 직접적으로 설계에 활용되기 위해서는, 실제 연소기에서 나타나는 연소응답특성을 정확히 모델링하는 것이 가장 중요한 과제이다. 이를 위해 실추진제의 고압 연소환경에서 분사기의 동적 화염 특성을 정량화할 수 있는 시험평가 기술이 개발되고, 초임계 난류연소모델을 포함한 LES 해석기술이 뒷받침이 되어야 할 것이다. 이러한 선행 연구가 성공적으로 수행될 수 있다면, Fig. 10과 같은 설계 전략을 통해 초기 개발 단계부터 선제적인 연소안정화 설계를 수행할 수 있을 것이다. 이러한 해석기술의 확보는 향후 차세대 액체로켓엔진 개발에 기여하는 동시에, 저공해 가스터빈을 비롯하여 다양한 연소 시스템 개발 과정에도 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

## 참고문헌

1. Poinso, T., "Prediction and control of combustion instabilities in real engines," *Proceedings of the Combustion Institute*, Vol. 36, Issue 1, pp. 1-28, 2017.
2. Yang, V. and Anderson, W.E. (eds), "Liquid Rocket Engine Combustion Instability," *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol 169, AIAA, 1995.
3. Dranovsky, M.L., Combustion Instabilities in Liquid Rocket Engines: Testing and Development Practices in Russia, *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 221, 2007.
4. Lieuwen, T.C. and Yang, V. (eds), "Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines," *Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol 210, AIAA, 2005.
5. Pieringer, J., Sattelmayer, T. and Fassl, F., "Simulation of Combustion Instabilities in

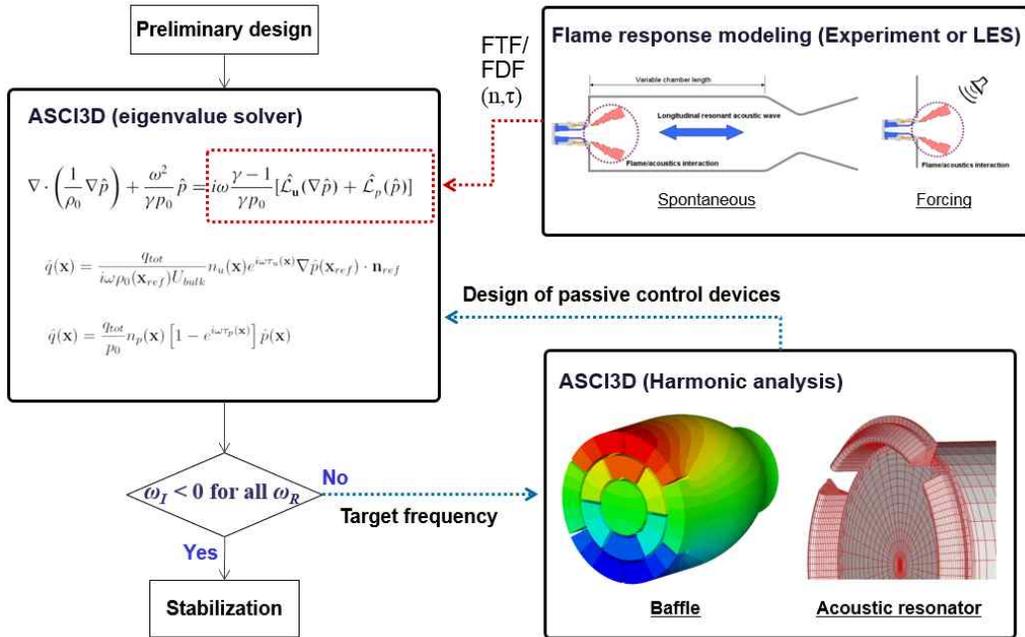


Fig. 10 Design strategy for combustion stabilization using the numerical simulation techniques.

- Liquid Rocket Engines with Acoustic Perturbation Equations," *Journal of Propulsion and Power*, Vol. 25, No. 5, pp. 1020-1031, 2009.
6. Nicoud, F., Benoit, L., Sensiau, C. and Poinso, T., "Acoustic Modes in Combustors with Complex Impedances and Multidimensional Active Flames," *AIAA Journal*, Vol. 45, No. 2, pp. 426-441, 2007.
  7. Gicquel, L.Y.M., Staffelbach, G. and Poinso, T., "Large eddy simulations of gaseous flames in gas turbine combustion chambers," *Progress in Energy and Combustion Science*, Vol. 38, No. 6, pp. 782-817, 2012.
  8. Urbano, A., Selle, L., Staffelbach, G., Cuenot, B., Schmitt, T., Ducruix, S. and Candel, S., "Exploration of combustion instability triggering using Large Eddy Simulation of a multiple injector liquid rocket engine," *Combustion and Flame*, Vol. 169, pp. 129-140, 2016.
  9. Wolf, P., Staffelbach, G., Gicquel, L.Y.M., Muller, J. and Poinso, T., "Acoustic and large eddy simulation studies of azimuthal modes in annular combustion chambers," *Combustion and Flame*, Vol. 159, No. 11, pp. 3398-3413, 2012.
  10. Gullaud, E. and Nicoud, F., "Effect of perforated plates on the acoustics of annular combustors," *AIAA Journal*, Vol. 50, No. 12 pp. 2629-2642, 2012.
  11. Silva, C.F., Duran, I., Nicoud, F. and Moreau, S., "Boundary conditions for the computation of thermoacoustic modes in combustion chambers," *AIAA Journal*, Vol. 52, No. 6, pp. 1180-1193, 2014.
  12. Silva, C.F., Nicoud, F., Schuller, T., Durox, D. and Candel, S., "Combining a Helmholtz solver with the flame describing function to assess combustion instability in a premixed swirled combustor," *Combustion and Flame*, Vol. 160, No. 9, pp. 1743-1754, 2013.
  13. Camporeale, S.M., Fortunato, B. and Campa, G., "A finite element method for three-dimensional analysis of thermo-acoustic combustion instability," *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power*, Vol. 133, No. 1, 011506, 2010.
  14. Laera, D., Campa, G. and Camporeale, S.M., "A finite element method for a weakly nonlinear dynamic analysis and bifurcation tracking of thermo-acoustic instability in longitudinal and annular combustors," *Applied Energy*, Vol. 187, pp. 216-227, 2017.
  15. Laera, D., Coclite, A., Camporeale, S.M. and Pascazio, G., "Numerical investigation of thermo-acoustic combustion instability of high-pressure combustion in rocket engines," *22<sup>nd</sup> International Symposium on Air Breathing Engines*, ISABE-2015-20206, 2015.
  16. Kim, S.-K., Choi, H.S., Cha, D.J., "Development of Helmholtz Solver for Thermo-Acoustic Instability within Combustion Devices," *Journal of The Korean Society for Aeronautical & Space Sciences*, Vol. 38, No. 5, pp. 445-455, 2010.
  17. Kim, S.-K., Kim, D., Cha, D.J., "Finite element analysis of self-excited instabilities in a lean premixed gas turbine combustor," submitted to *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2017.
  18. Kim, S.-K., Choi, H.S., Kim, H.J., Ko, Y.S., Sohn, C.H., "Finite element analysis for acoustic characteristics of combustion stabilization devices," *Aerospace Science and Technology*, Vol. 42, pp. 229-240, 2015.
  19. Kim, S.-K., Choi, H.S., Park, T.S., Kim, Y.M., "Numerical Analysis of Nonlinear

- Longitudinal Combustion Instability in LRE Using Pressure-Sensitive Time-Lag Hypothesis," *Proceedings of 2005 KSPE Spring Conference*, pp. 281-287, 2005.
20. Lehoucq, R., Sorensen, D., ARPACK: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods, <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>
  21. MUMPS (MULTifrontal Massively Parallel Solver), Vers.4.10.0, <http://mumps.enseeiht.fr/>
  22. Kim, K.T., Lee, J.G., Quay, B.D., Santavicca, D.A., "Spatially distributed flame transfer functions for predicting combustion dynamics in lean premixed gas turbine combustor," *Combustion and Flame*, Vol. 157, pp. 1718-1730, 2010.
  23. Laudien, E., Pongratz, R., Pierro, R. and Preclik, D., "Experimental procedures aiding the design of acoustic cavities," Yang, V. and Anderson, W.E. (Eds.), *Liquid Rocket Engine Combustion Instability, Progress in Astronautics and Aeronautics*, Vol. 169, AIAA, Washington, DC, pp.377-399, 1995.
  24. Kim, H.J., Cha, J.P., Song, J.-K. and Ko, Y.S., "Geometric and number effect on damping capacity of Helmholtz resonators in a model chamber," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 329, pp. 3266-3279, 2010.