직교모듈라 격자에서의 논리적 함의
Logical Implications on Orthomodular Lattices

연 용 호
목원대학교

Yon yong-ho
Mokwon Univ.

요약

고전 논리의 연산이 집합의 연산과 밀접하게 관련되어 있는 것과 같이 양자논리(quantum logic)는 힐버트 공간(Hilbert space)의 닫힌부분공간(closed subspace)의 연산과 관련되어 있다. 닫힌부분공간들의 집합은 직교모듈로 격자(orthomodular lattice)를 이루고, von Neumann과 Birkhoff를 포함하여 많은 수학자들은 양자논리의 수학적 체계를 만들기 위해 직교모듈로 격자를 이용하였다. 일반 격자(lattice)에서 논리적 함의(implication)는 $x \to y = \neg x \vee y$ 에 의해 일의적으로 정의되지만 직교모듈로 격자에서는 6개의 서로 다른 논리적 함의가 정의되는 것으로 알려져 있다. 본 논문에서는 직교모듈로 격자에서 정의되는 3개의 논리적 함의를 소개하고 이들 사이의 관계를 조사한다.

Ⅰ. 서론

힐버트 공간의 닫힌부분공간과 직교사영은 양자역학을 표현할 수 있는 하나의 수학적 모델이다. von Neumann과 Birkhoff[1]는 이를 연구하기위해 양자논리를 제안하였고, Husimi[2]는 이를 보완하기 위해 직교모듈라의 성질을 소개하였다. 직교모듈라 격자 L은 모든 $a, b \in L$에 대하여 다음의 성질 (OM1)-(OM4)를 만족하는 직교연산자 $'$ 을 갖는 유계격자(bounded lattice)이다[3].

(OM1) $a \le b \implies b' \le a'$,
(OM2) $a'' = a$,
(OM3) $a \vee a' = 1,\ a \wedge a' = 0$.
(OM4) $a \le b \implies a \vee (a' \wedge b) = b$

일반 격자에서의 논리적 함의는 $x \to y = \neg x \vee y$로 일의적인 방법으로 정의되지만, 직교모듈라 격자에서의 논리적 함의는 다음의 6가지 방법으로 정의될 수 있다[3].

$a \to_0 b = a' \vee b$ (classical),
$a \to_1 b = a' \vee (a \wedge b)$ (Sasaki),
$a \to_2 b = (a' \wedge b') \vee b$ (Dishkant),
$a \to_3 b = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b')$(relevance),
$a \to_4 b = (a \wedge b) \vee (a' \wedge b) \vee ((a' \vee b) \wedge b')$ (non-tollens),
$a \to_5 b = (a \wedge (a' \vee b)) \vee (a' \wedge b) \vee (a' \wedge b')$ (Kalmbach)

Abbott[4]은 Dishkant 함의 $\to_2$를 일반화하여 이를 이항연산으로 갖는 직교함의(orthoimplication) 대수를 정의하고 이들의 특성을 조사하였다. 또한 Hardegree[5]는 Sasaki 함의 $\to_1$을 일반화하여 이를 이항연산으로 갖는 준함의(quasi-implication) 대수를 소개하였다.

이 연구에서는 고전적(classical)함의, Sasaki 함의와 Dishkant 함의의 공통된 성질을 조사하고 이들의 관계를 알아본다.

Ⅱ. 고전적함의, Sasaki함의와 Dishkant함의의 관계

보조정리 2.1. L이 직교모듈라 격자이고 $a, b \in L$이면 다음이 성립한다.

$$a \ge b \implies a \wedge (a' \vee b) = b.$$

정리 2.2. 직교모듈라 격자에서의 고전적, Sasaki, Dishkant 함의를 * 라 할 때, 이는 다음의 성질을 만족한다.

(1) $a \le b \implies a^*(b^*c) = a^*c$,
(2) $a \le b \implies (b^*a)^*a = b$.
(3) $(a^*b)^*a = a$.

(증명) Sasaki의 함의에 대해 증명한다. 고전적 함의와 Dishkant의 함의에 대해 유사한 방법으로 증명할 수 있다.

(1) Sasaki 함의 $\to_1$을 * 라 하고, $a \le b$라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} a^*(b^*c) &= a' \vee [a \wedge (b^*c)] \\ &= a' \vee [a \wedge (b' \vee (b \wedge c))] \\ &= a' \vee [a' \vee (b' \vee (b \wedge c))']' \\ &= a' \vee [a' \vee (b'' \wedge (b \wedge c)')]' \\ &= a' \vee [a' \vee b' \vee (b'' \wedge (b \wedge c)')]' \ (\because b' \le a') \end{aligned}$$

$= a' \vee [a' \vee (b \wedge c)']'$ ($\because b' \leq (b \wedge c)'$, OM4)
$= a' \vee [a \wedge b \wedge c]$
$= a' \vee (a \wedge c)$ ($\because a \leq b$)
$= a * c$

(2) Sasaki 함의 $\rightarrow_1$을 $*$라 하고, $a \leq b$라 하면

$$b * a = b' \vee (b \wedge a) = b' \vee a$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(b*a)*a &= (b*a)' \vee ((b*a) \wedge a) \\ &= (b' \vee a)' \vee ((b' \vee a) \wedge a) \\ &= (b \wedge a') \vee a \quad (\because a \leq b' \vee a) \\ &= b \quad (\because \text{OM4}).\end{aligned}$$

(3) Sasaki 함의 $\rightarrow_1$을 $*$라 하면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(a*b)*a &= (a*b)' \vee ((a*b) \wedge a) \\ &= (a' \vee (a \wedge b))' \vee ((a' \vee (a \wedge b)) \wedge a) \\ &= (a' \vee (a \wedge b))' \vee (a \wedge b) \ (\because \text{보조정리 2.1}) \\ &= (a \wedge (a \wedge b)') \vee (a \wedge b) \\ &= a \quad (a \wedge b \leq a, \text{OM4})\end{aligned}$$

정리 2.2의 성질 (3)에 의해 성질 $(a \rightarrow b) \rightarrow a = a$은 Sasaki와 Dishkant 함의가 모두 만족하는 성질임을 알 수 있다. 이 성질은 직교함의 대수와 준함의 대수를 정의하는 공리 중의 하나이다.

정리 2.3. 직교모듈라 격자 L에서의 고전적 함의 $\rightarrow_0$, Sasaki 함의 $\rightarrow_1$와 Dishkant 함의 $\rightarrow_2$는 다음을 만족한다.

(1) $a \rightarrow_1 b = a \rightarrow_2 (a \wedge b)$
(2) $a \rightarrow_2 b = (a \vee b) \rightarrow_1 b$,
(3) $a \rightarrow_0 b = (a \rightarrow_1 b) \vee (a \rightarrow_2 b)$,
(4) $a \rightarrow_1 b = b' \rightarrow_2 a'$,
(5) $a \rightarrow_2 b = b' \rightarrow_1 a'$.

(증명) L을 직교모듈라 격자라 하자.

(1) $a, b \in L$에 대하여 $a \wedge b \leq a$이므로 $a' \leq (a \wedge b)'$이고 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}a \rightarrow_2 (a \wedge b) &= (a' \wedge (a \wedge b)') \vee (a \wedge b) \\ &= a' \vee (a \wedge b) = a \rightarrow_1 b.\end{aligned}$$

(2) $a, b \in L$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(a \vee b) \rightarrow_1 b &= (a \vee b)' \vee ((a \vee b) \wedge b) \\ &= (a' \wedge b') \vee b = a \rightarrow_2 b.\end{aligned}$$

(3) $a, b \in L$에 대하여 $a \leq a \vee b$이고 $a \wedge b \leq b$이므로 $(a \vee b)' \leq a'$이고 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}(a \rightarrow_1 b) \vee (a \rightarrow_2 b) &= (a' \vee (a \wedge b)) \vee (a' \wedge b') \vee b) \\ &= (a' \vee (a \wedge b)) \vee ((a \vee b)' \vee b) \\ &= (a' \vee (a \vee b)') \vee ((a \wedge b) \vee b) \\ &= a' \vee b \\ &= a \rightarrow_0 b.\end{aligned}$$

(4) $a, b \in L$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}b' \rightarrow_1 a' &= b'' \vee (b' \wedge a') = b \vee (b' \wedge a') \\ &= (a' \wedge b') \vee b = a \rightarrow_2 b.\end{aligned}$$

(5) $a, b \in L$에 대하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}b' \rightarrow_2 a' &= (b'' \wedge a'') \vee a' \\ &= a' \vee (a \wedge b) = a \rightarrow_1 b.\end{aligned}$$

위의 정리로부터 고전적 함의는 Sasaki 함의와 Dishkant 함의를 이용하여 표현될 수 있으며, Sasaki 함의와 Dishkant 함의는 서로가 일반 논리의 대우명제와 유사한 성질을 갖는다.

■ 참 고 문 헌 ■

[1] G. Birkhoff and J. von Neumann, "The logic of quantum mechanics," Ann. of Math. Vol. 37, pp. 822-843, 1936.
[2] K. Husimi, "Studies on the foundations of quantum mechanics I," Proc. of the physicomath. Soc. of Japan, Vol. 19, pp. 766-789, 1937.
[3] G. Kalmbach, Orthomodular lattices, Academic Press, New York, 1983.
[4] J. C. Abbott, "Orthoimplication algebras," Studia Logica, Vol 35, pp. 173-177, 1976.
[5] G. M. Hardegree, "Quasi-implication algebras, Part I: Elementary theory," Algebra Universalis, Vol. 12, pp. 30-47, 1981.