수학의 좌표상의 점의 존재성에 대한 사고

A Thought of Existence of a Point on a Coordinate System of Mathematics

윤 호 창
SCCA

Youn Ho-chang
SCCA

요약

기하학에서 도형에 대한 철학적 사유에 대해서 다양한 논의가 있었고 고대 그리스 철학자들도 점에 대한 다양한 정의가 있어 왔다. 데카르트의 좌표의 발견으로 도형은 좌표 상의 수식으로 표현이 가능하며 좌표에 대응 하는 수는 점으로 인식하게 되었다. 수가 도형으로 변환된 좌표계 상에서 점은 그 존재성을 어떻게 인식하게 할 것인가에 대한 고찰을 좌표계와 좌표계에 표현된 점과 그를 인식하는 관찰자의 의식의 속도 개념으로 설명하고자 한다[1].

Ⅰ. 서론

1.1 수학의 정초

현대 수학은 수학을 이루는 그 기본적 정초에 대한 끊임없는 질문과 사고를 바탕으로 발전하였다. 예를 들어 평행선 공리에 대한 끊임없는 수학자들의 노력으로 비유클리드 기하학이 탄생하였다. 즉 수학의 발견은 정초에 대한 끊임없는 의문과 사고의 확장에서 이루어졌다고 할 수 있다.

1.2 순환소수의 유리수 표현과 좌표상의 점

순환 소수인 0.999…은 1 로 표현된다. 그러나 이를 좌표상의 수인 점으로 표현하고자 한다면 점을 찍고자 할 때 소숫점의 다음 자릿수에 계속해서 9가 등장 한다. 즉 점을 찍는 행위로 점이 생성된다고 할 때 점 찍기가 계속 대기 상태가 되기 때문이다[3]. '찍지 않는 점은 존재하는 점인가?'에 대한 직관적인 의문이 제기 된다.

1.3 비표준 해석학에서의 무한소

19세기의 해석학의 발달 과정에서 바이에르슈트라스, 데데킨트, 칸토어 등은 실수를 엄밀하게 완비순서체로 정의하는데 기여하였다. 그러나 여기서는 무한소를 배재한 표준 실수였는데 1960년대에 로빈슨(Robinson)은 무한소(infinitesinal)와 infinite number를 포함하는 실수로 비표준 실수체계(hyperreal number system)를 창안하였다. 즉 0.999…이 1인 것은 바로 표준해석학에서의 것으로 이해되어 진다[2][3].

1.4 연구 목표 및 의의

본 연구의 목적은 좌표상의 점의 존재성에 대해서 점을 관찰하는 관찰자와 좌표와 점의 상호 작용의 관점에서 점의 존재 양태에 대한 시각을 제안 하는 것이다. 즉 관찰자의 의식을 상호작용의 속도 개념으로 대입하여 객체화 되어 있는 수와 점을 관찰자의 주관적 요소의 개입이라는 개념을 제시하여 수인식의 주관성에 대한 접점을 마련하고자 한다.

Ⅱ.본론

좌표상의 점의 존재성을 논하기 전에 접근하는 수와 레일 위의 바퀴의 사고 실험으로 관찰자의 개입의 개연성에 대해서 파악하고 좌표상의 점의 인식의 위한 요소와 행위 및 점의 존재 양태에 대해서 살펴보고자 한다.

2.1 접근하는 수에 대한 재 고찰

만약에 A와 B라는 사람이 극한을 생각한다고 하자 A= $\lim_{x\to 1} x = 1$ 라고 하고 B=$\lim_{x\to 1} x = 1$ 라고 하면 A와 B의 결과는 1 로써 같다. 그러데 A와 B가 1에 접근하는 속도의 상상이 다르다면 즉, x가 1에 접근하는 속도의 개념을 넣어보자. A는 x가 1에 접근하는 속도가 2배 빠르다면 A가 1/2 을 갔을 경우 B는 1/4 을 가게 될 것이다. 즉 무한히 간다면 A와 B의 값이 같게 되겠지만 한 시점에서는 A와 B의 값은 다르게 된다[4].

2.2 레일을 굴러가는 바퀴의 사고 실험

레일 길이가 1이고 레일 간의 틈도 1인 점선의 레일이 있고,지름이 2인 원의 바퀴 있다고 하자. 원이 레일 위를 굴러 갈 때 1 길이의 틈이 있지만 지름이 2이므로 빠지지 않고 굴러간다. 여기서 레일과 레일의 틈의 확대 또는 축소 속도를 Vrail = Vr, 바퀴의 확대 축소 속도를 Vcircle = Vc 라고 한다. 만약 Vr = Vc와 같이 확대 되면 여전히 바퀴는 레일을 굴러 갈 것이다. 그러나 레일과 바퀴의 확대 속도가 Vr 〉 Vc 이면 언젠가는 바퀴는 레일의 틈으로 빠져 사라지게 될 것이다[4].

2.3 좌표상의 점의 인식을 위한 요소

인식을 위한 요소는 {관찰자(observer), 좌표(coordinate), 점(point), 수, 의식 }이며, 행위는 {찍다, 관찰된다, 사라진다, 확대되다, 축소되다, 정지하다} 이다[1].

2.4 좌표상의 점의 생성과 인식의 가정

"좌표상의 수는 점으로 환원되고, 점은 부분이 없는 0 차원으로 정의하며, 좌표상의 점은 존재한다." [가정 1] "좌표상에서 관찰자는 임의의 수를 생각하고 좌표 위에 상상의 뾰족한 연필로 그 수의 위치에 점을 찍으면, 점은 생성되고 인식되면 관찰된다." 고 가정한다. [가정 2]

2.5 좌표 상에 점을 찍는 행위 고찰

"좌표 상에서 점을 찍다" 는 좌표 상에 한 수가 정해지고 그 위치에 점을 찍어 점을 생성하는 것이다. 그런데 숫자 1과 0.999… 같다. 여기서 두 가지를 의문해 보고자 한다. "1은 좌표 상에 점이 찍혀 있는가?" 와 "0.999…는 좌표 상에 점을 찍을 수 있는가?" 이다. 무리수인 $\sqrt{2}$ 의 경우도 길이가 1인 정사각형의 대각선으로 정확히 좌표 상에 위치가 정하여진다. 그러나 소수로 표현된 무리수는 무한히 다음의 자릿수의 수가 온다. 이경우도 점을 찍을 수 있는가?

2.6 점의 생성과 존재에 대한 사유

수는 좌표 상에서 점이라는 도형의 형태로 변환되었다. 그러므로 점이 존재한다는 것은 수가 존재한다는 것이고, 수가 존재한다는 것은 점이 존재한다는 것이다. 그런데 가정에 의해 찍을 수 없는 점은 생성되지 않는 것이며, 그러므로 존재하지 않고 관찰되지 않는다. 여기서 "존재하지 않는 점의 수는 존재하는가?" 라는 질문을 던질 수 있다.

2.7 상호작용을 통한 좌표 상의 점의 존재성

좌표 상에 임의의 수를 나타내는 위치에 점으로 인식되는 점을 찍는다. [가정2]에 의해서 점은 생성되고 존재하게 된다. 좌표계와 점과 관찰자의 시선의 속도를 다음과 같이 정의한다.

1. 좌표계의 확대 축소 속도를 Vcoordinate = Vc
2. 점의 확대 축소를 Vpoint = Vp
3. 관찰자의 시선의 속도를 Vobserver = Vo

관찰자가 점이 진짜 존재하는가에 대해서 의심을 품고 점의 위치를 점점 확대해서 본다고 할 경우 다음의 3가지 경우가 있을 수 있다.

2.7.1 점으로 관찰된다

관찰자가 좌표상에서 점으로 보이는 상태를 좌표계와 점과 관찰자의 속도 개념으로 파악하면 Vc=Vp=Vo의 상태로 관찰자가 점으로 인식하는 그 시점은 바로 점이 부분이 없는 상태와 부분이 있는 상태의 경계 부분의 상태이다.

즉, Vc=Vp=Vo 이면 점은 관찰된다.

2.7.2 점이 부분이 있는 상태

좌표의 확대 속도가 Vc 점의 확대 속도 Vp보다 느리고 관찰자가 좌표의 확대 속도로 점을 바라본다면 언젠가는 점은 부분이 있는 상태로 보이게 될 것이다.

즉, Vc=Vo〈Vp 이면 점은 부분이 있다.

2.7.3 점이 사라진 상태

좌표의 범위의 확대 속도인 Vc가 Vp 보다 빠르면 관찰자는 점을 인식할 수 없고 점은 사라질 것이다. 즉, Vc=Vp〉Vp 이면 점은 사라진다.

Ⅲ. 결론

좌표상의 점의 존재성을 좌표축과 그 위의 점과 이를 바라보는 관찰자의 시점에 속도의 개념을 도입하여 표현하였다.

관찰자의 시선의 속도가 일정하지 않고 변화를 갖고 점을 바라 본다면 점은 그 속도에 맞추어 확대 축소를 하여야 점으로써 존재하게 된다, 즉 관찰자와 동기화 되어야 존재하게 된다. 이러한 점의 능동적 속도 변화를 '점의 의식' 으로 개념화 하였다.

■ 참 고 문 헌 ■

[1] 윤호창, "좌표상의 점에 대한 사유에 대한 연구", 한국콘텐츠학회 종합학술대회 논문집, P367-368, 2013.5
[2] 이지현, "예비교사들은 0.99…〈1 라는 주장을 어떻게 반박하는가?", 대한수학교육학회지 제16권 제3호, 2014
[3]Vakil, N. "Real analysis through modern infinitesimals." New York : Cambridge University Press, 2011
[4] 윤호창, "수학 사고 노트", 1999