

미분변환법을 이용해 구해진 Duffing Equation 근사해의 비선형성 증가에 따른 오차 분석

Error Analysis of Approximate Solution by Differential Transform Method
with respect to Non-linearity of Duffing Equation

양성욱¹, 김동훈², 김봉균^{1*}, 양준모¹, 이상철¹
한국항공대학교¹, LG전자²

초 록

미분변환법은 미분방정식의 해를 구하기 위한 방법으로 다양한 분야에서 적용에 관한 연구를 수행 중이다. 항공우주분야의 동역학 모델링의 경우 미분방정식은 비선형성을 포함하게 되며 일반적으로 수치 해석을 이용해 근사해를 구하게 된다. 본 논문에서는 미분변환법을 이용해 구해진 근사해의 오차 추이를 분석한 내용을 다루고 있다. 이를 위한 예제로써 duffing equation을 사용하였으며, duffing equation에 포함된 비선형성을 증가시키기에 따라 미분변환법을 이용해 구한 근사해와 수치해석을 이용해 구한 수치해를 비교하였다.

1. 서 론

항공기 및 우주비행체의 동역학 모델링인 미분방정식의 해는 모델링 대상의 시간에 따른 거동 또는 변화 등을 설명할 수 있도록 도와준다. [1,2] 동역학 모델링은 선형 및 비선형 미분방정식의 형태로 나타나게 되며 모델링의 해는 다양한 방법으로 구할 수 있다. 미분방정식의 해를 구하기 위해 Zhou는 미분변환법을 소개하였으며 [3], 미분변환법은 물리, 수학, 전산, 역학 등 다양한 분야의 학문에서 적용을 위한 연구가 수행되고 있다.

관련연구로서, Bert 외 1인은 컴파운드바(Compound bar)의 종진동(Axial vibration)을 해석하기 위한 해를 미분변환법으로 구하였으며, 구해진 해의 정확도를 보였다. [4] Chen 외 1인은 미분변환법을 이용해 양점 경계치 문제(Two-point boundary problem)의 해를 구하는 방법을 제시하였다. [5] 또한, Rashidi는 미분변환법과 파데 근사(Pade approximant)를 결합한 방법을 제시하였고, 기존의 미분변환법보다 전자유체역학(Magnetohydrodynamics)의 경계층(Boundary-layer) 문제에 있어 더욱 정확한 해를

얻을 수 있음을 보였다.[6]

본 논문에서는 미분변환법을 이용해 구해진 해의 비선형성 증가에 따른 오차를 분석하였다. 이를 위한 예제로 duffing equation이 사용되었다.

2. 미분변환법

함수 $x(t)$ 의 미분변환 $X(t)$ Eq. (1)과 같이 정의된다.[7,8]

$$X(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \quad (1)$$

$X(t)$ 의 미분역변환은 Eq. (2)와 같이 정의된다.[7,8]

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k X(k) \quad (2)$$

따라서, Eqs. (1)과 (2)에 의해 Eq. (3)이 얻어지게 된다.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \left[\frac{d^k x(t)}{dt^k} \right]_{t=0} \quad (3)$$

미분변환인 Equation (3)은 테일러 급수를 이용해 유도되어지며, Eqs. (1)~(2)를 이용하면 Table 1과 같은 연산이 가능하게 된다.

미분변환법으로 구해진 근사해의 정확성은 파데 근사를 이용하여 향상시킬 수 있다.[8]

3. Duffing Equation을 이용한 오차분석

3.1 미분변환법을 이용해 구해진 duffing equation의 해

감쇠(damping)는 0, 강성(stiffness)은 1, 입력은 0일 때 duffing equation은 Eq.(4)와 같다.

$$\ddot{x} + x + \beta x^3 = 0 \quad (4)$$

여기서, β 는 비선형성이다. 초기조건이 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ 이고, 비선형성 β 가 0.1일 때, 미분변환법을 이용하면 Eq. (4)는 Eq. (5)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\left. \begin{aligned} X(k+2) &= -\frac{1}{(k+1)(k+2)} \cdot \\ &\left\{ \begin{aligned} &X(k) \\ &+ 0.1 \sum_{k_2=0}^k \sum_{k_1=0}^{k_2} X(k_1)X(k_2-k_1)X(k-k_2) \end{aligned} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

I.C. $X(0) = 0, \dot{X}(0) = 1$

$k=9$ 일 때 Eq. (5)를 이용하여 구한 근사해 $\tilde{x}(t)$ 는 Eq. (6)과 같다.

$$\tilde{x}(t) = t - 0.167 t^3 - 0.0033 t^5 + 0.0011 t^7 - 0.00015 t^9 \quad (6)$$

Equation (6)은 라플라스 변환을 이용하여 Eq. (7)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{X}(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{0.4}{s^6} + \frac{5.6}{s^8} - \frac{52.64}{s^{10}} \quad (7)$$

Equation (7)에 $s = 1/t$ 를 대입하고, 4차 P 와 Q 의 파데 근사를 이용하면 Eq. (7)은 Eq. (8)과 같다.

$$\frac{P_L(t)}{Q_M(t)} = \frac{9t^4 + t^2}{9.6t^4 + 10t^2 + 1} \quad (8)$$

Equation (8)에 $t = 1/s$ 를 대입한 후 역라플라스 변환을 이용하면 미분변환법을 이용해 구해진 $x(t)$ 의 근사해 $\tilde{x}(t)$ 는 Eq. (9)와 같다.

$$\hat{x}(t) = 0.973 \sin(1.047t) - 0.003 \sin(2.99t) \quad (9)$$

Figure 1에서 볼 수 있듯이 수치해석으로 구한 해와 미분변환법을 이용해 구한 해가 거의 유사함을 알 수 있다.

Table 3. Mathematical Operations of Differential Transform Method

1. $f(x) = g(x) \pm h(x)$ 이면, $F(k) = G(k) + H(k)$
2. $f(x) = cg(x)$ (c 는 상수) 이면, $F(k) = cG(k)$
3. $f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$ 이면, $F(k) = \frac{(k+n)!}{k!} G(k+n)$
4. $f(x) = g(x)h(x)$ 이면, $F(k) = \sum_{l=0}^k G(l)H(k-l)$
5. $f(x) = x^n$ 이면, $F(k) = \delta(k-n)$ (δ 는 크로네커 델타)
6. $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ 이면, $F(k) = \frac{G(k-1)}{k}$ ($k \geq 1$)
7. $f(x) = g(t) \int_0^x h(t)dt$ 이면, $F(k) = \sum_{l=1}^k G(k-l) \frac{H(l-1)}{l}$ ($k \geq 1$)
8. $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ 이면, $F(k) = \sum_{s=0}^k \sum_{m=0}^{k-s} U(s)V(m)W(k-s-m)$

Table 4 Error Trend with respect to the nonlinearity

Nonlinearity	Displacement Error	Rate Error
0.1		
0.2		
0.3		
0.4		
0.5		
0.6		
0.7		
0.8		
0.9		
1.0		

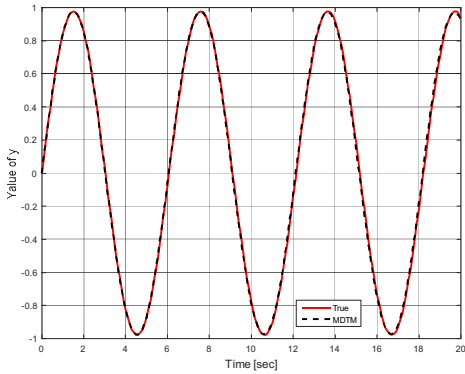


Fig 1. Comparison Result between Numerical Solution and DTM Solution ($\beta = 0.1$)

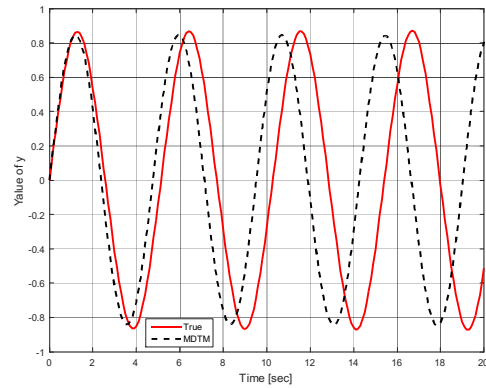


Fig 3. Comparison Result between Numerical Solution and DTM Solution ($\beta = 0.9$)

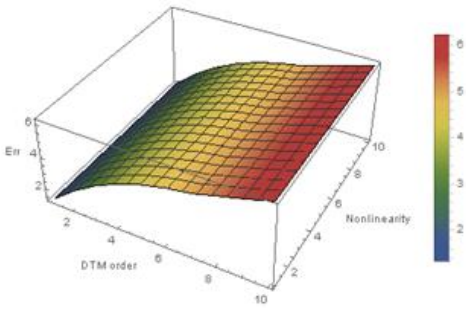


Fig 2. Error Trend with respect to DTM order and Nonlinearity

Table 5 Minimum DTM and Pade Order

Non-linearity (β)	DTM Order	Pade Order		Displacement Error	Rate Error
		P	Q		
0	2	2	2	1.544×10^{-6}	4.705×10^{-7}
0.1	2	2	2	0.3067	0.2799
0.2	2	2	2	0.5716	0.5031
0.3	2	2	2	0.7892	0.7811

3.2 미분변환법으로 구한 근사해의 오차 분석

Table 2는 미분변환법의 차수가 10일 때 비선형성과 파데 근사의 차수 증가에 따른 수치해와 미분변환법으로 구해진 근사해의 오차 크기를 나타낸다. Figure 2는 미분변환법의 차수와 비선형성이 증가하는 경우의 오차 추이를 보여주고 있다. Table 2와 Fig. 2에서 볼 수 있듯이 비선형성이 증가하더라도 미분변환법의 차수가 2 일 때 근사해의 오차가 최소화되지만, Fig. 3에서 볼 수 있듯이 시간이 지남에 따라 오차가 증가한다. Table 3은 비선형성이 0~0.3일 때 미분변환법의 차수가 2차일 때 오차 크기를 나타낸 것이다.

4. 결론

본 논문에서는 미분변환법을 이용해 구해진 해의 오차 분석에 대한 내용을 다루었다. 오차를 분석하기 위한 예제로는 duffing equation을 사용하였고, duffing equation에 포함되어 있는 비선형성을 증가시킴으로써 미분변환법을 이용해 구해진 해의 오차를 수치해석으로 구한 해와 비교하였다. 비교 결과, 미분변환법을 이용해 구해진 해는 미분변환법의 차수가 낮을 때 오차의 크기가 작지만, 비선형성이 증가함에 따라 시간이 지날수록 오차가 증가하게 됨을 알 수 있다.

참고문헌

- [1] Yang, S., Lee, S., 2008, A Study on the Error Analysis of the Numerical Solution using Inverse Method, Journal of KSAA, Vol. 16, No. 2, pp. 21~27.
- [2] Yang, S., Lee, S., 2015, Performance Comparison of Symbolic Manipulation Programs using a Validation Method for Numerical Solution, Journal of KSAA, Vol. 23, No. 2, pp. 69~74.
- [3] Zhou, J. K., 1986, Differential transformation and its application for electrical circuits, Huazhong University Press, China.
- [4] Bert, C. W., Zeng, H., 2004, Analysis of axial Vibration of Compound Bars by Differential Transform Method, Journal of Sound and Vibration, Vol. 275, No. 3, pp. 641~647.
- [5] Abdel-Halim Hassan, I. H., 2008, Application to Differential Transform Method for Solving Systems of Differential Equations, Journal of Applied Mathematical Modelling, Vol. 32, No. 12, pp. 2552~2559.
- [6] Rashidi, M. M., 2009, The Modified Differential Transform Method for Solving MHD Boundary-Layer Equations, Journal of Computer Physics Communications, Vol. 180, No. 11, pp. 2210~2217.
- [7] Chen, C. K., Ho, S. H., 1996, Application of Differential Transformation to Eigenvalue Problems, Applied Mathematics and Computation, Vol. 79, No. 2, pp. 173~188.
- [8] El-Shahed, M., 2008, Application of Differential Transform Method to Non-linear Oscillatory Systems, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 13, No. 8, pp. 1714~1720.