

기하 비선형을 고려한 켄틸레버 보의 처짐해석

박 세 혁^{1*} · 전 휘 범²

¹연세대학교 토목환경공학과, ²연세대학교 토목환경공학과

초록

이 논문에서는 역학적 지식과 EDISON 구조동역학 서버에서 지원하는 이공계 교육 및 연구용 시뮬레이션 프로그램 중 Co-rotational Plane Beam with Arbitrary Section을 이용하여 켄틸레버 보의 처짐을 기하 비선형적으로 해석한다. 또한 해석에 사용된 프로그램이 실제 교육에 적용이 가능한 지를 고찰함에 그 목적이 있다.

처짐을 해석하기 위하여 수계산, 프로그램을 이용하여 얻은 결과값을 비교하였고 켄틸레버 보의 변화 형상을 시각화 하였다.

핵심어 : 기하 비선형, 켄틸레버 보, 수직처짐, 수평처짐

1. 서 론

켄틸레버 보의 한끝은 고정되어 있고 다른 끝은 자유단인 보를 말한다. 근대 건축에서는 종종 대규모로 사용되고 있으며 건물시공과 기계분야에서 광범위하게 이용된다. 또한 학부과정을 거치며 배우는 역학과목에서 가장 많이 다루는 보의 하나로 학부생들에게는 익숙한 구조형태이다.

보의 처짐을 해석하는 방법은 학부과정에서 전공서적을 통하여 배우게 되며 그 대표적 방법으로 모멘트면적법, 공액보법 등이 있다. 처짐 형상에 대해서는 개략적인 스케치를 해봄으로써 이를 시각화하고 이해한다. 하지만 앞서 말한 방법들은 기하 비선형을 고려하지 않은 방법이며 처짐 형상 또한 정확하다 할 수 없다.

이 논문에서는 학부과정에서 배우는 지식에서 더 나아가 심화된 지식을 바탕으로 보의 처짐을 해석하였다. 전공서적에 제시된 공식들을 이용하여 수계산을 통해 보의 자유단에서의 처짐을 구하였다. 또한 EDISON 구조동역학 서버에 탑재된 Co-rotational Plane Beam with Arbitrary Section 프로그램을 활용하여 보를 여러 요소로 등분한 후 각

절점에 대한 처짐을 얻고 이를 이용하여 보를 시각화함으로써 정확한 형상을 얻었다.

처짐 해석의 대상 구조물로는 자유단에 집중하중이 작용하는 켄틸레버 보를 채택한다.

2. 본 론

이 장에서는 켄틸레버 보의 자유단에 수직하중을 가하였을 때의 처짐을 수계산 및 프로그램을 통하여 구하였다.

2.1 수계산을 통한 처짐 해석(보의 큰 처짐)

작은 회전각을 가진 경우 보의 처짐은 미분방정식을 풀어서 구한다. 만약 기울기의 처짐이 크다면, 처짐 곡선의 미분방정식은 정확한 식을 사용해야 한다. 보의 재료가 선형적 탄성을 유지한다는 가정하에 미분방정식은 다음과 같다.

$$k = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI}$$

곡률 $d\theta/ds$ 에서 θ (처짐곡선의 회전각)가 아주 작으면 곡선을 따라 추정한 거리 s 는 직선거리 x 와 같아지고, 회전각 θ 는 기울기 dv/dx 와 같아지므로 우리는 $d\theta/ds$ 를 d^2v/dx^2 로 근사할 수 있다. 그러나 처짐이 큰 경우 이런 단순화된 식은 유용하지 않으며 처짐을 구하기 위해서는 정확한 곡률식을 이용하여야 한다. 정확한 처짐곡선의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{[1 + (\frac{dv}{dx})^2]^{3/2}} = -\frac{M}{EI}$$

이 방정식으로 구한 탄성처짐곡선의 정확한 모양을 *Elastica*라 부른다.

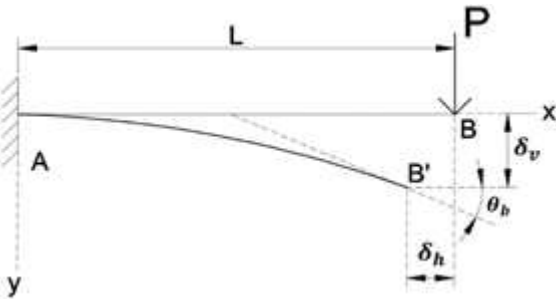


Figure 2.1 보의 큰 처짐

그림 2.1의 고정보 AB에서 하중 P가 보의 큰 처짐을 일으키고 결과적으로 보의 자유단이 점 B에서 B'으로 움직인다 가정한다. 이 때 보의 자유단의 회전각을 θ_b , 수평 및 연직 변위를 δ_h, δ_v 라 둘 수 있다. 인장에 따른 축방향 길이의 변화를 무시하기 때문에 AB'의 길이는 최초의 길이 L과 같다. 굽힘모멘트 M을 구한 후 미분방정식과 타원함수의 식을 통해 위의 미지수들을 구할 수 있다. 우선 회전각을 구하는 식은 다음과 같다.

$$F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}$$

이 식의 해들은 다음과 같다.

$$k = \sqrt{\frac{1 + \sin\theta_b}{2}}$$

$$\phi = \sin^{-1} \frac{1}{k\sqrt{2}}$$

$$F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

프로그램용 계산기를 이용한 수치적분에 의해 타원적분을 계산하였다. 위 두식의 차이는 ϕ 부터 $\pi/2$ 까지의 적분치로 표시할 수 있다. $F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}$ 가 초월함수이므로 회전각 θ_b 를 구하기 위해서는 시행착오법을 사용해 풀어야 하며, 그 과정은 다음과 같다.

- (1) $0 \sim 90^\circ$ 의 값 중 θ_b 을 가정
- (2) $k = \sqrt{\frac{1 + \sin\theta_b}{2}}$ 를 이용하여 k를 계산
- (3) $F(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$ 를 이용하여 $F(k)$ 를 계산
- (4) $\phi = \sin^{-1} \frac{1}{k\sqrt{2}}$ 에서 (2)에서 구한 k를 이용하여 ϕ 를 계산
- (5) 얻은 값 k와 ϕ 를 식 $F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$ 에 대입하여 $F(k, \phi)$ 를 계산
- (6) (3), (5)에서 얻은 해를 $F(k) - F(k, \phi) = \sqrt{\frac{PL^2}{EI}}$ 에 대입하여 하중 P를 계산한다.

이 과정을 통해 가정한 θ_b 에 대응하는 하중 P를 알 수 있다. 또 다른 값에 대해서도 위 과정을 반복하여 그에 대응하는 하중 P와 θ_b 를 계산할 수 있다.

한편 수직처짐방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\delta_v}{L} = 1 - \sqrt{\frac{4EI}{PL^2}} [E(k) - E(k, \phi)]$$

이 식의 해들은 다음과 같다.

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

$$E(k, \phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt$$

위 식은 앞의 처짐각을 구할 때 사용한 θ_b, k, ϕ 과 PL^2/EI 값을 사용하여 풀 수 있다. $E(k)$ 와 $E(k, \phi)$ 의 값을 계산 후 대입하는 단계가 하나 추가된 것이다.

마지막으로 수평처짐은 다음 식으로 구할 수 있다.

$$\frac{\delta_h}{L} = 1 - \sqrt{\frac{2EI\sin\theta_b}{PL^2}}$$

이 식 또한 앞의 식에서 사용한 θ_b 와 PL^2/EI 값을 이용하여 풀 수 있다.

위 과정을 통한 실제 하중, 처짐각, 처짐을 계산해보도록 한다.

● θ_b 이 30° 일때의 결과는 다음과 같다.

(1) $\theta_b = 30^\circ$

(2) $k = 0.8660$

(3) $F(k) = 2.1564$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (0.866\sin(t))^2}} dt = 2.15644$$

(4) $\phi = 0.304\pi$

(5) $F(k, \phi) = 1.07787$

$$\int_0^{0.304\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - (0.866\sin(t))^2}} dt = 1.07786$$

(6) $F(k) - F(k, \phi) = 1.07854$

(7) $\frac{PL^2}{EI} = 1.163$

(8) 수직처짐을 계산하기 위해 $E(k)$

$E(k, \phi)$ 을 계산한다.

$$E(k) = 1.21108$$

$$E(k, \phi) = 0.855342$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (0.866\sin(t))^2} dt = 1.21108$$

$$\int_0^{0.304\pi} \sqrt{1 - (0.866\sin(t))^2} dt = 0.855342$$

(9) $\frac{\delta_v}{L} = 0.340264$

(10) $\frac{\delta_h}{L} = 0.0727216$

$$1 - \sqrt{2 \times \frac{\sin 30^\circ}{1.163}}$$

● θ_b 이 45° 일때의 결과는 다음과 같다.

(1) $\theta_b = 45^\circ$

(1) $k = 0.9239$

(2) $F(k) = 2.40021$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9239\sin(t))^2}} dt = 2.40021$$

(3) $\phi = 0.2774\pi$

(4) $F(k, \phi) = 0.980593$

$$\int_0^{0.2774\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9239\sin(t))^2}} dt = 0.980593$$

(5) $F(k) - F(k, \phi) = 1.419617$

(6) $\frac{PL^2}{EI} = 2.01531$

(7) 수직처짐을 계산하기 위해 $E(k)$

$E(k, \phi)$ 을 계산한다.

$$E(k) = 1.14076$$

$$E(k, \phi) = 0.782669$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (0.9239\sin(t))^2} dt = 1.14076$$

$$\int_0^{0.2774\pi} \sqrt{1 - (0.9239\sin(t))^2} dt = 0.782669$$

(8) $\frac{\delta_v}{L} = 0.495510$

(9) $\frac{\delta_h}{L} = 0.162304$

$$1 - \sqrt{2 \times \frac{\sin 45^\circ}{2.01531}}$$

● θ_b 이 60° 일때의 결과는 다음과 같다.

(1) $\theta_b = 60^\circ$

(2) $k = 0.9659$

(3) $F(k) = 2.76771$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9659\sin(t))^2}} dt = 2.76771$$

(4) $\phi = 0.2614\pi$

(5) $F(k, \phi) = 0.922517$

$$\int_0^{0.2614\pi} \frac{1}{\sqrt{1 - (0.9659\sin(t))^2}} dt = 0.922517$$

(6) $F(k) - F(k, \phi) = 1.845193$

(7) $\frac{PL^2}{EI} = 3.4047$

(8) 수직처짐을 계산하기 위해 $E(k)$

$E(k, \phi)$ 을 계산한다.

$$E(k) = 1.07645$$

$$E(k, \phi) = 0.738643$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - (0.9659 \sin(t))^2} dt = 1.07645$$

$$\int_0^{0.2614\pi} \sqrt{1 - (0.9659 \sin(t))^2} dt = 0.738643$$

$$(9) \frac{\delta_v}{L} = 0.633850$$

$$(10) \frac{\delta_h}{L} = 0.286751$$

$$1 - \sqrt{2 \times \frac{\sin 60^\circ}{3.4047}}$$

이런 방법으로 결정된 값들의 기록이 아래의 표 2.1 에 수록되어 있다.

Table 2.1 집중하중을 받는 캔틸레버 보의 회전각 및 처짐

$\frac{PL^2}{EI}$	$\frac{\theta_b}{2\pi}$	$\frac{\delta_v}{L}$	$\frac{\delta_h}{L}$
0	0	0	0
0.2	0.063	0.066	0.003
0.4	0.126	0.131	0.010
0.6	0.185	0.192	0.022
0.8	0.241	0.249	0.038
1	0.294	0.302	0.056
1.5	0.407	0.411	0.108
2	0.498	0.493	0.161
3	0.628	0.603	0.254
4	0.714	0.670	0.329
5	0.774	0.714	0.388
6	0.817	0.745	0.435
7	0.850	0.767	0.473
8	0.875	0.785	0.505
9	0.895	0.799	0.532
10	0.911	0.811	0.555
15	0.956	0.848	0.635

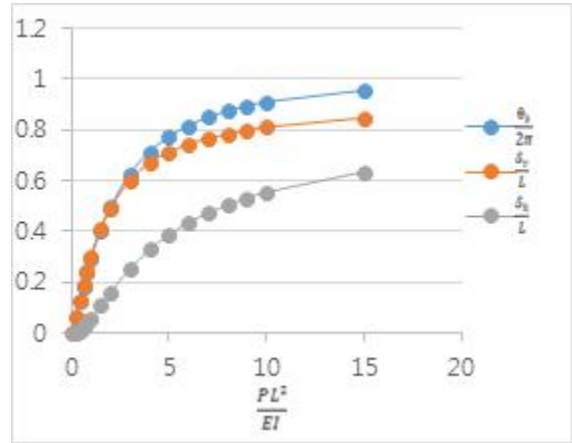


Figure 2.2 자유단에 집중하중 P를 받는 캔틸레버 보의 큰 처짐 : 회전각 θ_b , 수직처짐 δ_v , 수평처짐 δ_h

2.2 프로그램을 이용한 처짐 해석

표 2.1의 결과값들을 이용해 똑같은 조건을 적용하여 프로그램을 실행해 보았다. 계산의 편의를 위하여 $\frac{PL^2}{EI}$ 의 값을 1로 맞추어 프로그램을 실행하였고 그 결과는 다음과 같다.

NON-LINEAR TWO-DIMENSIONAL PLANE BEAM STATIC ANALYSIS

- STRUCTURAL INFORMATION **ISOTROPIC MATERIAL**
 - . Area (m²) = 4
 - . Moment of inertia of section (m⁴) = 1.3333
 - . Young's Modulus (Pa) = 100000
 - . Length (m) = 10
- ANALYSIS CONDITION **CONCENTRATED TIP LOAD**
 - . Root boundary condition = CANTILEVERED
 - . Number of elements = 20
 - . Magnitude of applied load = 1333.3
 - . Direction of applied load = Y, transverse force (N)

ANALYSIS RESULT

DEFORMED NODAL POSITION (Table 2.3)

Node	x(m)	y(m)	th(rad)
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	0.499860E+00	0.115953E-01	0.459694E-01
3	0.998781E+00	0.455309E-01	0.894414E-01
4	0.149590E+01	0.100506E+00	0.130423E+00
5	0.199051E+01	0.175198E+00	0.168925E+00
6	0.248206E+01	0.268279E+00	0.204961E+00
7	0.297013E+01	0.378425E+00	0.238549E+00
8	0.345443E+01	0.504323E+00	0.269705E+00
9	0.393479E+01	0.644682E+00	0.298449E+00
10	0.441115E+01	0.798232E+00	0.324802E+00
11	0.488354E+01	0.963734E+00	0.348783E+00
12	0.535206E+01	0.113998E+01	0.370412E+00
13	0.581692E+01	0.132578E+01	0.389707E+00
14	0.627835E+01	0.152000E+01	0.406687E+00
15	0.673668E+01	0.172150E+01	0.421367E+00
16	0.719225E+01	0.192920E+01	0.433763E+00
17	0.764548E+01	0.214203E+01	0.443887E+00
18	0.809678E+01	0.235892E+01	0.451750E+00
19	0.854663E+01	0.257886E+01	0.457360E+00
20	0.899549E+01	0.280082E+01	0.460724E+00
21	0.944385E+01	0.302378E+01	0.461845E+00

6	-0.179437E-01	0.268279E+00	0.204961E+00
7	-0.298746E-01	0.378425E+00	0.238549E+00
8	-0.455721E-01	0.504323E+00	0.269705E+00
9	-0.652077E-01	0.644682E+00	0.298449E+00
10	-0.888471E-01	0.798232E+00	0.324802E+00
11	-0.116461E+00	0.963734E+00	0.348783E+00
12	-0.147936E+00	0.113998E+01	0.370412E+00
13	-0.183084E+00	0.132578E+01	0.389707E+00
14	-0.221650E+00	0.152000E+01	0.406687E+00
15	-0.263324E+00	0.172150E+01	0.421367E+00
16	-0.307748E+00	0.192920E+01	0.433763E+00
17	-0.354523E+00	0.214203E+01	0.443887E+00
18	-0.403218E+00	0.235892E+01	0.451750E+00
19	-0.453373E+00	0.257886E+01	0.457360E+00
20	-0.504514E+00	0.280082E+01	0.460724E+00
21	-0.556150E+00	0.302378E+01	0.461845E+00

2.3 결과값 해석

앞서 2.1장과 2.2장에서 각각 수계산과 프로그램을 이용하여 결과값을 얻었다. 수계산을 통하여 얻은 결과값들은 표 2.1에 수록되어 있으며 이는 캔틸레버 보의 자유단에서의 처짐값이다. 프로그램을 이용하여 얻은 표 2.2의 결과값들은 20개의 요소로 나누어진 보의 각 절점에 해당하는 처짐값들이다. 여기서 계산 및 비교의 편의를 위해 $\frac{PL^2}{EI} = 1$ 로 맞추어 주었으며 표 2.2에서 필요한 절점은 자유단인 절점 21이다.

수계산으로 구한 수직처짐과 수평처짐은 각각 3.02와 0.56이며, 프로그램으로 구한 수직처짐과 수평처짐은 각각 3.02378과 0.55615이다. 두 방법으로 구한 값들의 차이는 0.00378과 0.00385로 매우 근소하다.

표 2.3을 통하여 자유단에 집중하중이 작용하였을때의 보의 처짐 형상을 아래의 그림 2.3과 같이 시각적으로 나타내었다

NODAL DEFORMATION (Table 2.2)

Node	u(m)	v(m)	th(rad)
1	0.000000E+00	0.000000E+00	0.000000E+00
2	-0.139847E-03	0.115953E-01	0.459694E-01
3	-0.121890E-02	0.455309E-01	0.894414E-01
4	-0.410121E-02	0.100506E+00	0.130423E+00
5	-0.949118E-02	0.175198E+00	0.168925E+00

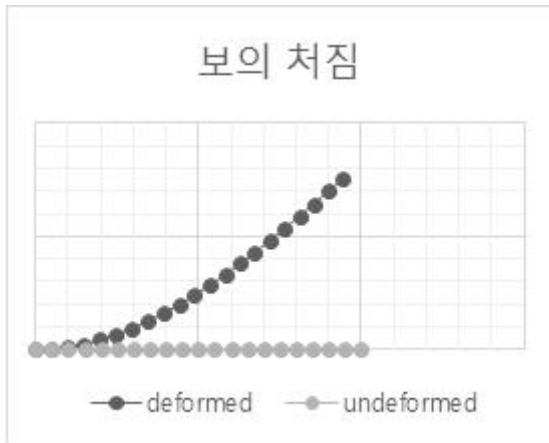


Figure 2.3 보의 처짐

3. 결 론

이 논문은 자유단에 집중하중이 작용하는 캔틸레버 보의 처짐을 기하 비선형을 고려하여 해석한 논문이다. 수계산의 경우 Elastica 문제를 푸는 방법을 이용하였다. Co-rotational Framework를 바탕으로 돌아가는 프로그램을 이용해 결과값을 비교하고 처짐 형상을 시각화하였다. 두 가지 해석을 비교함으로써 프로그램의 정확성 및 유용성을 보였다. 이 논문을 통하여 얻은 결론은 다음과 같다.

- (1) 기하 비선형을 고려한 캔틸레버 보의 큰 처짐을 구하기 위하여 미분방정식과 타원함수 식 등을 이용하였고 시행착오법을 사용하여 자유단에서의 처짐들을 구하였다.
- (2) Co-rotational Plane Beam with Arbitrary Section을 이용하여 캔틸레버 보를 20개의 요소로 나눈 후 각 절점에 해당하는 처짐값 및 위치를 구하였다.
- (3) 기하 비선형을 고려한 두 방법으로 구한 결과값을 비교한 결과, 수계산과 프로그램을 활용하여 얻은 값들의 결과가 거의 일치함을 보임으로써 프로그램의 정확성을 보였고 프로그램을 통하여 얻은 시각적 효과로 유용성을 보였다.
- (4) 하중에 의한 보의 처짐에 대한 정확한 값과 형상을 통하여 교육에 유용하게 사용될 수 있다고 판단된다.

감사의 글

본 논문은 2015년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단 첨단 사이언스·교육 허브 개발 사업의 지원을 받아 수행된 연구이다.

참 고 문 헌

- Battini, J.M.** (2008) A Rotation-free Corotational Plane Beam Element for Non-linear Analyses, *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 75, pp.672-689.
- Saafan, S.A.** (1963) Nonlinear Behavior of Structural Plane Frames, *Journal of the Structural Division, ASCE* V. 89, p.557.
- F. V. Rohde.** "Large Deflection of a Cantilever Beam with a Uniformly Distributed Load", *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol. 11, 1953, pp.337-338.
- C, Rojahan,** "Large Deflections of Elastic Beams", Thesis for the Degree of Engineer, Stanford University, 1968.
- C, Y. Wang,** "Large Deflections of an Inclined Cantilever with an End Load", *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 16, No.2, 1981, pp.155-164.
- John H. Lau,** "Large Deflection of Cantilever Beam", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 107, No. EM1, 1981, pp.259-264.
- John H. Lau,** "Large Deflection of Cantilever Beams with Combined Loads", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 108, No. EM1, 1982, pp.180-185.
- J. F. Wilson and J. M. Snyder,** "The Elastica with End-Load Flip-Over", *The Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 55, 1988, pp.845-848.