확장된 크로스 엔트로피 오차함수의 특성
Characteristics of Extended Cross-Entropy Error Function

오 상 훈
목원대학교

Sang-Hoon Oh
Mokwon University

요약

신경회로망의 학습을 위하여 크로스 엔트로피 오차함수가 사용되며, 이의 성능향상을 위하여 확장된 크로스 엔트로피 함수도 제시되었다. 크로스 엔트로피 오차함수는 정보이론에서 제시된 상대 엔트로피(relative entropy)에서 유도된 함수이다. 상대 엔트로피는 두 확률밀도함수의 발산(divergence) 함수이다. 이 논문에서는 상대 엔트로피와 크로스 엔트로피 관계를 파악한 후, 이를 기반으로 확장된 크로스 엔트로피에 상응하는 새로운 엔트로피 발산 함수를 n=2와 4인 경우에 대하여 유도한다.

I. 서론

신경회로망 모델은 크게 교사학습(supervised learning) 모델과 비교사 학습(unsupervised learning) 모델로 나누어 진다[1]. 교사학습 모델은 신경회로망의 출력노드에 대한 목표값이 주어지며, 출력노드의 출력 값과 목표 값 간의 오차함수를 정의하여, 이 오차함수를 감소시키는 형태로 학습이 이루어진다. 일반적으로 교사학습 신경회로망의 학습을 위하여 MSE(mean squared error) 함수를 사용한다[2]. 대표적인 교사학습 신경회로망은 MLP(multi-layer perceptron)이다[2].

이 MLP의 학습 성능을 개선하기 위하여 CE (crloss-entropy) 오차함수가 제시되었다[3]. 이 CE 오차함수는 MLP의 학습 시 발생하는 부적절한 포화(incorrect saturation) 현상을 제거하여 학습성능이 향상된다. 여기에 학습패턴에 대한 과도한 학습 방지 기능까지 지니도록 제시된 오차함수가 nCE(n-th order extension of Cross-Entropy) 오차함수이다[4]. 이 외에도 MLP의 학습 성능 개선을 위하여 다양한 오차함수들이 제안되었고, 또 이들의 특성들이 여러가지 방식으로 비교되었다[5].

CE 오차함수는 확률변수가 두 가지의 값 만을 지니는 경우에, 두 확률밀도함수 간의 상대 엔트로피(relative entropy)로부터 유도된다. 이 논문에서는 CE 오차함수와 상대 엔트로피 간의 관계를 먼저 살펴본 후, 이 관계를 기반으로 nCE 오차함수로 부터 새로운 엔트로피 함수를 유도하겠다.

Ⅱ. CE(Cross-Entropy)와 상대엔트로피

신경회로망의 노드가 가지는 값은 단극 [0,+1] 방식 혹은 쌍극 [-1,+1] 방식으로 표현한다. 보통의 경우 출력노드의 값은 확률을 나타낸다고 해석하며, 엔트로피는 확률변수와 관계되므로, 신경회로망의 노드 값을 단극 방식으로 표현한 경우에 대하여 크로스 엔트로피 오차함수와 상대 엔트로피의 관계를 설명하겠다.

먼저 두 확률밀도 함수 사이의 상대 엔트로피는

$$D(p\|q) = \sum_x p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)} \qquad (1)$$

로 정의된다[6]. 여기서, x는 확률변수이고 $p(x)$와 $q(x)$는 확률밀도함수이다. 확률변수 x가 0 혹은 1의 값만을 지닌다고 가정하고, 각각의 확률은

$$p(x=1)=p \text{ and } p(x=0)=1-p \qquad (2)$$

이고

$$q(x=1)=q \text{ and } q(x=0)=1-q \qquad (3)$$

라고 하자. 그러면,

$$D(p\|q) = H(p,q)-H(p) \qquad (4)$$

로 정리되며, 여기서

$$H(p) = -p\log p-(1-p)\log(1-p) \qquad (5)$$

는 엔트로피이며,

$$H(p,q) = -p\log q-(1-p)\log(1-q) \qquad (6)$$

는 크로스 엔트로피 이다.

신경회로망의 학습에 사용되는 크로스 엔트로피 오차함수는 식 (6)으로 주어진 크로스 엔트로피에서 p를 출력노드의 목표 값 t로 대체하고, q를 입력 x에 대한 노드의 출력 값 y로 대체한 형태로 주어지며,

$$E_{CE}(x) = -t\log y-(1-t)\log(1-y) \qquad (7)$$

이다.

Ⅲ. nCE와 연관된 엔트로피 함수

nCE 오차함수는 쌍극방식으로 노드 값을 표현하는 경우에 대하여 제안되었다[4]. 이를 앞에서 유도한 형태로

엔트로피 개념으로 해석하기 위하여 우선적으로 단극 방식으로 변경하면

$$E_{nCE}(x;n) = -\int \frac{(2t+1)^{n+1}(t-y)^n}{y(1-y)}dy \tag{8}$$

로 주어진다.

n=1 인 경우에 식 (8)의 적분을 수행하면 크로스 엔트로피 오차함수 식 (7)과 같이 유도된다. 따라서, 식 (8)은 크로스 엔트로피 오차함수의 n차 확장형이라고 볼 수 있다.

식 (8)에서 n=2 일 경우에 적분을 수행하면

$$E_{nCE}(x;n=2) = (2t-1)^3\left[y+(t-1)^2\log(1-y)-t^2\log y\right] \tag{9}$$

와 같이 얻게 된다. 또한, n=4 일 경우에 적분을 수행하면

$$E_{nCE}(x;n=4) = (2t-1)^5\left[\begin{array}{l}\log(1-y)+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3} \\ -4t\left(\log(1-y)+y+\frac{y^2}{2}\right) \\ +6t^2(\log(1-y)+y)-4t^3\log(1-y) \\ -t^4(\log y-\log(1-y))\end{array}\right] \tag{10}$$

와 같이 주어진다.

상대 엔트로피에 해당하는 식 (1)에서 (5)와 (6)의 관계를 거쳐 식 (7)을 찾아내었듯이, 식 (9)와 (10)에 해당하는 엔트로피 함수를 유도할 수 있을 것이다. 그 과정은 복잡하기에 이 논문에서는 생략한다. 유도한 결과를 그림으로 그려 다이버젼스 기준으로 볼 때 어떤 차이가 있는 지를 확인하였다.

Ⅳ. 결론

MLP의 학습에 널리 사용되는 크로스 엔트로피 오차함수는 상대 엔트로피로부터 유도된 함수이다. 또한, 크로스 엔트로피 보다 더 학습성능이 좋은 오차함수가 크로스 엔트로피 오차함수를 n차 함수로 확장한 형태(nCE: nth order extension of Cross-Entropy)로 제안되었다. 이 논문에서는 이 nCE 오차함수에 해당하는 엔트로피 함수를 유도하여 상대 엔트로피와 비교하였다.

■ 참 고 문 헌 ■

[1] R. P. Lippmann, "An introduction to computing with neural nets," IEEE ASSP Magazine, Vol. 4, pp. 4-22, Apr. 1987.

[2] D. E. Rumelhart and J. L. McClelland, Parallel Distributed Processing, MIT Press, Cambridge, MA, 1986.

[3] A. van Ooyen and B. Nienhuis, "Imrpoving the convergence of the back-propagation algorithm," Neural Networks, Vol. 4, pp. 465-471, 1992.

[4] S.-H. Oh, "Improving the error back-propagation algorithm with a modified error function," IEEE Trans. Neural Networks, Vol. 8, pp. 799-803, 1997.

[5] S.-H. Oh, "Statistical analyses of various error functions for pattern classifiers," Proc. Convergence on Hybrid Information technology, Daejon, Korea, CCIS Vol. 206, pp. 129-133, Sept. 22-24, 2011.

[6] T. M. Cover and J. A. Thomas, Elements of Information Theory, John Wiley & Sons, 1991.