불확실한 인자 표본을 이용한 시스템 고유진동수의 신뢰성 설계
Reliability Design of the Natural frequency of a System based on the Samples of Uncertain Parameters

최찬규* · 유홍희†
Chan Kyu Choi and Hong Hee Yoo

Key Words : Uncertainty(불확실성), Sample(표본), Extreme value theory(극치이론), Reliability design(신뢰성 설계)

ABSTRACT

The natural frequencies of a mechanical system are determined by the system parameters such as masses and stiffness of the system. Since material irregularities and manufacturing tolerances always exist in most of practical engineering situations, the system parameters always have uncertainties. As the uncertainties of the parameters increase, the uncertainties of the system natural frequencies also increases. Then, the reliability of the system deteriorates. So, the uncertainty of the system natural frequencies should be analyzed accurately and considered in the design of the system. In order to analyze the uncertainty of the system natural frequencies employing most of existing uncertainty analysis methods, the probability distributions of the uncertain system parameters should be identified. In most practical situations, however, identification of the probability distributions is almost impossible because of limited time and cost. For that case, the reliability should be estimated based on finite samples of the system parameters. In this paper, sample based reliability estimation method employing extreme value theory was proposed. Using the proposed estimation method, sample based reliability design of the system natural frequencies was conducted.

1. 서 론

진동시스템의 고유진동수는 그 시스템의 동적 특성에 직접적인 영향을 미치는 중요한 성능인자(performance index)이다. 이러한 진동시스템을 구성하는 스프링, 댐퍼의 특성 및 질량과 같은 시스템 파라미터는 시스템 고유진동수에 영향을 미치며 이 파라미터는 재료 불균질성 (material irregularity) 및 제조공차(manufacturing tolerance)에 의해 불확실성(uncertainty)을 가진다. 이러한 시스템 파라미터의 불확실성은 시스템 고유진동수 불확실성을 야기시키며 이러한 고유진동수 불확실성은 진동시스템의 신뢰성을 저하시킨다. 따라서 진동시스템의 신뢰성을 증가시키기 위해서는 고유진동수의 불확실성을 정확히 예측하고 이 불확실성을 고려한 신뢰성 설계가 반드시 필요하다.

시스템 파라미터의 불확실성이 시스템 성능 불확실성에 미치는 영향을 해석하는 성능 불확실성 해석방법에 관한 연구는 다양하게 이루어져왔다. 성능 불확실성 해석방법 중 가장 일반적인 방법은 MCS (Monte Carlo simulation)이다[1]. 이 방법은 가장 일반적인 방법으로써 대상시스템의 제약 없이 대부분의 시스템에 적용 가능한 방법이지만 정확한 해석 결과를 얻기 위해서는 매우 많은 수의 반복해석이 필요하기 때문에 비효율적인 방법이기도 하다. MCS의 비효율성을 개선하기 위하여 다양한 해석적 방법이 개발되었다. 해석적인 방법으로써 테일러 급수를 이용한 방법[2], 실험계획법(Design of experiment; DOE)를 이용한 방법[3] 그리고 최근에는 uDR (univariate Dimension Reduction)[4] 및 eDR (eigenvector Dimension Reduction)[5] 방법이 개발되어 성능 불확실성 해석에 많이 활용되고 있

† 교신저자; 정회원, 한양대학교 기계공학부
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr
Tel : 02-2220-0446, Fax : 02-2293-5070
* 발표자; 한양대학교 대학원 기계공학과

다. 하지만 이러한 기존의 성능 불확실성 해석 방법들을 사용하기 위해서는 불확실한 시스템 파라미터의 확률분포(probability distribution)를 정확히 알아야 한다. 하지만 불확실한 시스템 파라미터의 확률분포를 정확히 알고 있는 경우는 거의 없다. 이 경우 유한개의 표본을 이용하여 시스템 성능 불확실성을 예측해야 한다. 그러나 시스템 파라미터 표본을 이용한 성능 불확실성 예측 방법에 관한 연구는 거의 이루어지지 않았다.

본 논문에서는 극치이론(Extreme value theory)를 이용하여 불확실한 시스템 파라미터 표본을 이용한 성능 불확실성 예측 방법을 제안하였다. 제안된 방법을 이용하여 회전하는 더블펜들럼(Double pendulum) 고유진동수의 신뢰성 설계를 수행하였으며 제안된 방법의 정확성을 MCS결과와 비교함으로써 검증하였다.

2. 극치이론을 이용한 성능 신뢰도 예측방법

2.1 극치이론

극치분포는 임의의 확률분포로부터 유한개의 표본을 뽑았을 때 그 표본들의 최소값 또는 최대값을 확률변수(random variable)로 갖는 분포이다. 최소값을 확률변수로 가지는 분포를 최소 극치분포(Minimum extreme value distribution), 최대값을 확률변수로 가지는 분포를 최대 극치분포(Maximum extreme value distribution)라 한다. 극치이론은 이러한 극치분포를 구하는 방법에 관한 이론이다. Fig. 1은 최소 및 최대 극치분포를 나타낸다. 이러한 극치분포를 구하는 방법은 크게 2가지로 분류할 수 있다. 극치분포를 구하고자 하는 대상분포의 확률밀도함수(probability density function; PDF)를 정확히 알고 있는 경우 아래와 같은 확률적 관계를 이용하여 극치분포를 구할 수 있다. [6]

$$F_{X_1}(x) = 1 - \left[1 - F_X(x)\right]^n \tag{1}$$

$$F_{X_n}(x) = \left[F_X(x)\right]^n \tag{2}$$

여기서 F_X 는 대상 분포의 누적분포함수(cumulative distribution function; CDF), $F_{X_1}(x)$ 는 최소 극치 분포의 누적분포함수, $F_{X_n}(x)$ 은 최

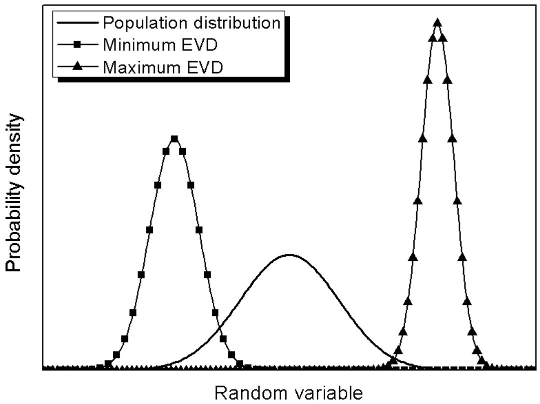

Fig. 1 Minimum and maximum extreme value distributions

대 극치 분포의 누적분포함수 그리고 n 은 표본의 크기이다. 식 (1), (2)에서 알 수 있듯이 대상 분포를 정확히 아는 경우 그 분포의 CDF와 표본의 크기만으로 최소 및 최대 극치분포를 얻을 수 있음을 알 수 있다. 하지만 대부분의 경우 대상분포를 아는 경우는 극히 드물다. 이 경우 대상분포의 표본을 이용하여 극치분포를 예측할 수 있으며 이 때 식 (3) 및 (4)와 같은 GEVD(generalized extreme value distribution) 함수를 이용한다. [7]

$$F_{X_1}(x;\lambda,\delta,\kappa) = 1 - \exp\left\{-\left[1+\kappa\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right]^{\frac{1}{\kappa}}\right\}, \quad 1+\kappa\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) \geq 0 \tag{3}$$

$$F_{X_n}(x;\lambda,\delta,\kappa) = \exp\left\{-\left[1-\kappa\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right)\right]^{\frac{1}{\kappa}}\right\}, \quad 1-\kappa\left(\frac{x-\lambda}{\delta}\right) \geq 0 \tag{4}$$

여기서 λ 는 location parameter, δ 는 scale parameter 그리고 κ 는 shape parameter이다. 이 세 파라미터는 대상분포의 표본을 이용하여 예측한다. 본 논문에서는 세 파라미터 예측에 Maximum likelihood estimation방법을 이용하였다. [8]

2.2 극치분포를 이용한 성능 신뢰도 예측방법

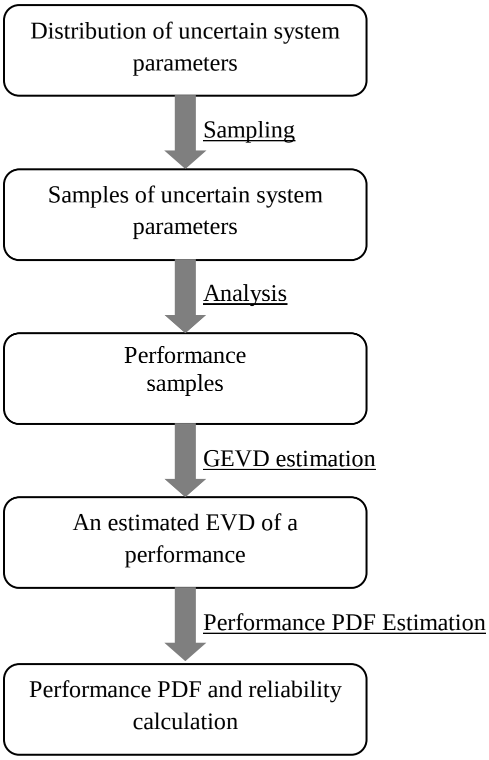

Fig. 2 Sample-based performance reliability estimation method

2.1 절에서는 극치 분포를 구하는 2가지 방법에 대하여 기술하였다. 본 논문에서는 이 2가지 방법을 활용하여 불확실한 시스템 파라미터 표본을 이용한 시스템 성능 신뢰도를 예측하는 방법을 제안하였다. Fig. 2는 제안된 성능 신뢰도 예측 방법을 나타낸다. 불확실한 시스템 파라미터 표본을 이용하여 성능 표본을 시스템 해석을 통하여 얻고 이 성능 표본을 이용하여 성능의 극치분포를 GEVD 파라미터를 예측함으로써 얻을 수 있다. 이렇게 예측된 극치분포는 식 (1) 및 (2)의 관계식을 이용하면 시스템 성능의 분포를 역으로 예측 가능하다. 극치분포는 대상분포의 전체적인 형상과는 관계없이 그 대상분포의 테일 형상에만 영향을 받기 때문에 극치분포를 이용하여 역으로 예측 된 대상분포는 원래 대상분포의 전체적인 형상을 예측할 수는 없다. 하지만 원래 대상분포의 테일 부분의 형상은 비교적 정확히 예측할 수 있다. 대부분의 신뢰성 설계 문제에서 설계 목표는 신뢰도 90%이상이기 때문에 테일 부분의 형상만 정확히 예측할 수 있어도 신뢰성 설계에 있어 활용 가능하다. 또한 대상분포의 전체적 형상과 관계없이 테일 부분의 형상만 관계 있기 때문에 원래 대상분포의 분포 형태가 임의의 형상을 가진다고 하더라도 시스템 성능의 신뢰도를 유한개의 표본을 이용하여 구할 수 있는 장점이 있다.

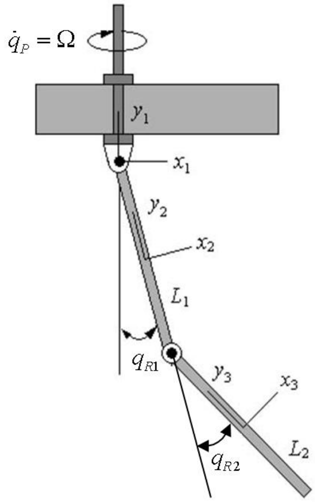

Fig. 3 Double pendulum

3. 회전하는 더블펜들럼 고유진동수 신뢰성 설계

Fig. 3은 회전하는 더블펜들럼 (rotating double pendulum)을 나타낸다. 여기서 불확실성을 가지는 시스템 파라미터는 각 링크의 길이와 질량이며 이 불확실한 파라미터들은 식 (5), (6)과 같은 정규분포 (normal distribution)를 따른다고 가정하였다.

$$L_i \sim N\left(1,\ 0.02^2\right) \tag{5}$$

$$m_i \sim N\left(3,\ 0.09^2\right) \tag{6}$$

각 링크 길이 및 질량이 식 (5), (6)과 같은 정규분포를 따른다고 가정하였지만 실제로는 이 분포를 모른다. 따라서 식 (5), (6)의 정규분포로부터 유한개의 표본을 추출하여 회전하는 더블펜들럼 고유진동수의 신뢰도를 예측하고 신뢰성 설계를 수행하였다. 고유진동수 신뢰도 예측 및 신뢰성 설계에 사용된 표본의 크기는 표본크기 $n=5$ 그리고 극치표본 크기 $m=15$이다. Fig. 4는 회전하는 더블펜들럼 1차 고유진동수를 회전속도에 따라 나타낸 것이다.

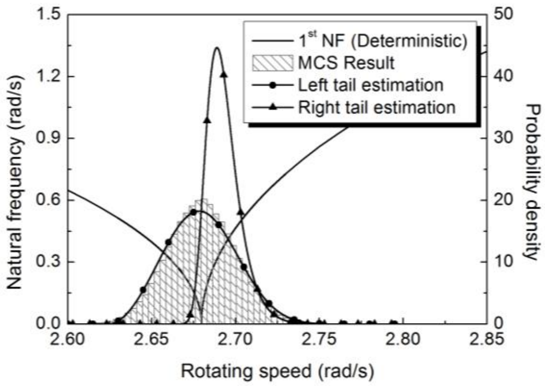

Fig. 4 1st natural frequency of the rotating double pendulum and PDF of the critical rotating speed

각 링크의 불확실성을 고려하지 않았을 때 결과를 보면 고유진동수가 0(rad/s)가 되는 곳이 있다. 고유진동수가 0(rad/s)인 경우 그 시스템은 불안정해지기 때문에 고유진동수가 0(rad/s)가 되는 회전속도를 critical angular speed라하며 이 회전속도는 이 시스템의 중요한 성능 인자가 된다. 각 링크의 불확실성을 고려하지 않은 경우 이 회전속도는 2.679 (rad/s)이다. 만약 각 링크에 불확실성이 존재한다면 critical angular speed 또한 불확실성을 가지게 된다. Fig. 4에는 각 링크에 불확실성이 식 (5), (6)과 같이 존재할 때 critical angular speed의 분포를 히스토그램으로 나타내었다. 이 분포는 MCS를 이용하여 얻었으며 이 때 사용된 표본 수는 100000개이다. Fig. 4에는 제안된 방법을 이용하여 예측한 확률분포 또한 나타내었다. 왼쪽 테일의 경우 최소 극치분포를 활용하여 예측하였고 오른쪽 테일의 경우 최대 극치분포를 활용하여 예측하였다. Fig. 4를 보면 제안된 방법을 이용하여 예측된 확률분포들은 MCS를 이용하여 얻은 확률분포의 테일을 정확히 예측하고 있음을 알 수 있다. 본 논문에서 이 시스템의 신뢰도는 critical angular speed가 2.679±0.01*2.679 범위 내 존재할 확률로 정의하였으며 신뢰성 설계의 설계 목표는 신뢰도 99.73%로 설정하였다. 초기 설계조건에서의 신뢰도는 83.3(%)로 예측되었다. 설계 목표를 달성하기 위하여 식 (7)과 같은 최적화 문제를 수행하였다.

$$\begin{aligned}&\text{Find} && \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}} \text{ and } \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}}\\ &\text{Minimize} && \text{Max}\left(R_t - R_e, 0\right)\\ &\text{Subject to} && \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}^l \le \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}} \le \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}^u \text{ and } \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}}^l \le \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}} \le \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}}^u\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}$ 는 각 링크 길이의 평균, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}}$ 는 각 링크 길이의 표준편차, R_t 는 설계 목표, R_e 는 제안된 방법으로 예측 된 신뢰도 그리고 $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}^l$, $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{L}}^u$, $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}}^l$ 및 $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{L}}^u$ 는 각 링크 평균 및 표준편차의 상한, 하한 값이다. 식 (7)을 이용한 신뢰성 설계 수행 후의 신뢰도 예측 결과는 99.9(%)로써 제안된 방법을 이용한 신뢰성 설계는 잘 되었음을 확인하였다. 이 때의 설계 변수의 값은 $\mu_{L_1} = 1.001(m)$, $\mu_{L_2} = 0.998(m)$, $\sigma_{L_1} = 0.001(m)$ 그리고 $\sigma_{L_2} = 0.012(m)$ 이다. 여기서 불확실한 파라미터의 표준편차는 제조비용(manufacturing cost)과 직접적인 연관이 있다. 그렇기 때문에 표준편차는 가능한 한 큰 것이 제조비용 절감에 유리하다. 본 연구에서는 제조비용을 고려하지는 않았다. 하지만 만약 제조비용을 고려한다면 보다 더 나은 결과를 얻을 수 있을 것으로 판단된다.

3. 결 론

본 논문에서는 극치이론을 활용하여 표본을 이용한 시스템 성능의 신뢰성 예측방법을 제안하였다. 제안된 방법은 불확실한 시스템 파라미터 인자의 분포가 임의의 형태를 갖는 경우에도 적용 가능한 장점이 있다. 제안된 방법의 경우 예측하고자 하는 대상분포의 전체 형상을 정확히 예측하지 못하지만 그 분포의 테일 형상은 비교적 정확히 예측할 수 있다. 대부분의 신뢰성 설계 문제의 경우 목표 신뢰도가 90% 이상이기 때문에 테일 형상만 예측하여도 충분하다. 따라서 제안된 방법은 실제 신뢰성 설계 시 유용하다. 제안된 방법을 이용하여 회전하는 더블펜들럼 고유진동수의 신뢰성 설계를 수행함으로써 제안된 방법이 불확실성을 가지는 시스템의 신뢰성 설계에 활용될 수 있음을 확인하였다.

후 기

본 연구는 2014년도 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다. (No. 20111510100050)

참 고 문 헌

(1) Ulam, S., Richtmyer, R. D. and Von Neumann, J., 1947, Statistical methods in neutron diffusion, Los Alamos Scientific Laboratory report LAMS-551.

(2) Hasofer, A. M. and Lind, N. C., 1972, Exact and invariant second-moment code format, Journal of the Engineering Mechanics Division, 100(1), pp. 111~121.

(3) Seo. H. S. and Kwak. B. M., 2002, Efficient statistical tolerance analysis for general distribution using three-point information, International Journal of Production Research, 40(4), pp. 931~944.

(4) Rahman, S. and Xu, H., 2004, A univariate dimension-reduction method for multi-dimensional integration in stochastic mechanics. Probabilistic Engineering Mechanics, 19(4), pp. 393~408.

(5) Youn, B. D., Zhimin, X. and Wang, P. F., 2008, Eigenvector Dimension-Reduction (EDR) Method for Sensitivity-Free Probability Analysis, Structural Multidisciplinary Optimization, 37(1), pp. 13~28

(6) Rao, S. S., 1992, Reliability-based design, McGraw-Hill, New York.

(7) Castillo, E., Hadi, A. S., Balakrishnan, N. and Sarabia, J. M., 2005, Extreme Value and Related Models with Applications in Engineering and Science, John Wiley & Sons, New Jersey.

(8) Prescott, P. and Walden, A. T., 1980, Maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized extreme-value distribution, Biometrika, 67(3), pp. 723~724.