혼합 경계를 가진 임의 형상 음향 공동의 고정밀도 고유치 추출 기법

Extraction of eigenvalues of acoustic cavities with a mixed boundary

강상욱†
S. W. Kang

Key Words : Eigenvalue(고유치), NDIF method(무차원동영향함수법), Acoustic cavity(음향공동).

ABSTRACT

The NDIF method is developed for eigenvalue analysis of arbitrarily shaped two-dimensional acoustic cavity with a mixed boundary, which consists of rigid-wall and open boundaries. The NDIF method, which was developed by the author in 2000, has the feature that it yields highly accurate eigenvalues compared with other analytical methods or numerical methods (FEM and BEM). The validity of the proposed method is shown in a case study, which indicate that eigenvalues obtained by the proposed method are more accurate compared to the exact method or FEM(ANSYS).

1. 서 론

유한요소법 또는 경계요소법은 임의 형상 음향 공동의 고유치를 구하기 위하여 가장 일반적으로 사용되는 기법이다[1,2]. 그러나 이들 기법들은 사용되는 기저함수가 지배 미분방정식을 만족하지 않기 때문에 해의 정밀도에 있어서 한계를 가진다. 이러한 단점을 극복하여 고정밀도 고유치를 추출하기 위한 방법으로 저자는 NDIF 법(Non-dimensional Dynamic Influence method)을 제안하였다[3]. NDIF 법은 유한요소법이나 경계요소법과는 달리 기저함수가 지배 미분방정식을 만족하고, 동시에 적은 노드 개수로 해석 대상물의 경계만을 이산화하기 때문에 수치 계산량이 적어지는 장점을 가진다.

본 논문에서는 강체벽 경계를 가진 음향 공동에 제한적으로 적용되었던 NDIF 법을 강체벽 경계와 개방 경계로 구성된 혼합 경계를 가진 음향 공동에 확장하는 방안이 연구된다. 엄밀해를 가지는 음향 공동에 제안된 방법을 적용하여 구한 고유치를 ANSYS 의 의해 구해진 고유치 및 엄밀해와 비교하는 방법에 의해 본 논문의 타당성이 보여진다.

† 교신저자; 정회원, 한성대학교 기계시스템공학과
E-mail : swkang@hansung.ac.kr
Tel : 02-760-4228, Fax : 02-760-4329

2. 이론 정식화

2.1 지배방정식과 경계조건

Fig. 1 에서 실선으로 표시된 2 차원 음향 공동의 고유치 해석을 위한 지배 방정식은 다음과 같이 헤름홀츠 방정식의 형태를 가진다[4].

$$\nabla^2 p(\mathbf{r}) + k^2 p(\mathbf{r}) = 0 , \qquad (1)$$

여기서 $\mathbf{r}$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에 대한 위치벡터를 의미하고(Fig. 1 참조), $p(\mathbf{r})$ 은 음향 공동 내부의 한 점 P 에서의 음압을 나타내며, k 는 주파수 파라미터이다.

일반적으로 음향공동의 경계는 개방 경계와 강체벽 경계로 나뉘어지며, 두 경계에 대한 경계 조건식은 다음과 같이 각각 주어진다[4].

$$p(\mathbf{r}_\Gamma) = 0 , \quad \frac{\partial p(\mathbf{r}_\Gamma)}{\partial n} = 0 \qquad (2, 3)$$

여기서 $\mathbf{r}_\Gamma$ 는 Fig. 1 과 같이 음향 공동의 경계 상의 한 점에 대한 위치벡터이며, n 은 경계에서의 법선 방향을 의미한다.

2.2 혼합경계를 고려한 NDIF법

먼저 해석 대상 음향 공동의 경계는 Fig.1 과 같이 N 개의 노드들로 이산화된다. 그러면 음향 공동 내부의 한 점 P 에서의 음압은 다음과 같이 무차원동 영향 함수들의 선형 결합으로 가정될 수 있다.

$$p(\mathbf{r}) = \sum_{s=1}^{N} A_s \, J_0(k\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\right|), \tag{4}$$

여기서 J_0 는 제 1 종 0 차 베셀 함수를 나타내며, A_s 는 미지 상수이다. 그리고 $\mathbf{r}_s$ 는 음향 공동 경계에 위치한 노드 P_s 에 대한 위치 벡터를 뜻한다. 참고로 식(4)는 지배방정식 식(1)을 정확히 만족한다.

다음으로, 음향 공동의 경계를 따라 연속적으로 주어진 경계조건 식(2, 3)은 다음과 같이 경계 노드에 대한 식으로 각각 이산화 된다.

$$p(\mathbf{r}_i^{(o)}) = 0, \quad i = 1,2,\cdots,No, \tag{5}$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}_j^{(r)})}{\partial n_j} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,Nr, \tag{6}$$

여기서 $\mathbf{r}_i^{(o)}$ 는 개방 경계(open boundary)에 놓인 노드 P_i 에 대한 위치벡터를 뜻하며, $\mathbf{r}_j^{(r)}$ 와 n_j 는 강체벽 경계(rigid-wall)에 놓인 노드 P_j 에 대한 위치 벡터와 법선 방향을 각각 의미한다. 그리고 No 은 개방 경계에 놓인 노드 개수를, Nr 강체벽 경계에 놓여진 노드의 개수를 의미하며, $No + Nr = N$ 이 성립한다.

이제, 음압 식(4)를 경계조건 식(5, 6)에 대입하면 다음의 두 식을 각각 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r}_i^{(o)}) &= \sum_{s=1}^{No} A_s^{(o)} J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_i^{(o)} - \mathbf{r}_s^{(o)}\right|) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{Nr} A_s^{(r)} J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_i^{(o)} - \mathbf{r}_s^{(r)}\right|) = 0 \\ &\quad i = 1,2,\cdots,No, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{r}_j^{(r)})}{\partial n_j} &= \sum_{s=1}^{No} A_s^{(o)} \frac{\partial}{\partial n_j} J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_j^{(r)} - \mathbf{r}_s^{(o)}\right|) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{Nr} A_s^{(r)} \frac{\partial}{\partial n_j} J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_j^{(r)} - \mathbf{r}_s^{(r)}\right|) = 0 \\ &\quad j = 1,2,\cdots,Nr. \end{aligned} \tag{8}$$

식(7)과 식(8)은 다음과 같이 행렬식의 형태로 각각 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{SM}^{(oo)}\,\mathbf{A}^{(o)} + \mathbf{SM}^{(or)}\,\mathbf{A}^{(r)} = \mathbf{0}, \tag{9}$$

$$\mathbf{SM}_n^{(ro)}\,\mathbf{A}^{(o)} + \mathbf{SM}^{(rr)}\,\mathbf{A}^{(r)} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

여기서 국부 시스템 행렬 $\mathbf{SM}^{(oo)}$, $\mathbf{SM}^{(or)}$, $\mathbf{SM}^{(ro)}$,

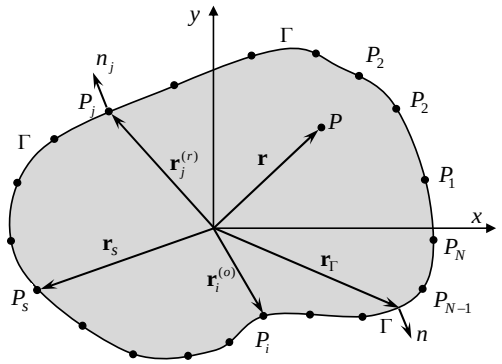

Fig. 1 Arbitrarily shaped, 2-D acoustic cavity discretized with boundary nodes $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \cdots, \mathrm{P}_N$.

$\mathbf{SM}^{(rr)}$ 의 성분은 다음의 식에 의해 각각 주어진다.

$$\mathbf{SM}^{(oo)}(i,s) = J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_i^{(o)} - \mathbf{r}_s^{(o)}\right|), \tag{11}$$

$$\mathbf{SM}^{(or)}(i,s) = J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_i^{(o)} - \mathbf{r}_s^{(r)}\right|), \tag{12}$$

$$\mathbf{SM}_n^{(ro)}(j,s) = \frac{\partial}{\partial n_j} J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_j^{(r)} - \mathbf{r}_s^{(o)}\right|), \tag{13}$$

$$\mathbf{SM}_n^{(rr)}(j,s) = \frac{\partial}{\partial n_j} J_0(\Lambda\left|\mathbf{r}_j^{(r)} - \mathbf{r}_s^{(r)}\right|). \tag{14}$$

마지막으로, 식(9)와 식(10)은 다음과 같이 하나의 행렬식으로 표현될 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{SM}^{(oo)} & \mathbf{SM}^{(or)} \\ \mathbf{SM}_n^{(ro)} & \mathbf{SM}_n^{(rr)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^{(o)} \\ \mathbf{A}^{(r)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \tag{15}$$

식(15)는 다음과 같이 간단히 표현된다.

$$\mathbf{SM}\ \mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{16}$$

여기서 전체 시스템 행렬 $\mathbf{SM}$ 와 기여도 벡터 $\mathbf{A}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{SM} = \begin{bmatrix} \mathbf{SM}^{(oo)} & \mathbf{SM}^{(or)} \\ \mathbf{SM}_n^{(ro)} & \mathbf{SM}_n^{(rr)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{Bmatrix} \mathbf{A}^{(o)} \\ \mathbf{A}^{(r)} \end{Bmatrix}, \tag{17, 18}$$

전체 시스템 행렬식 식(16)이 실용해(non-trivial solution)를 갖기 위해선 시스템 행렬 $\mathbf{SM}$ 의 판별식이 다음과 같이 0 을 만족해야 한다.

$$\det(\mathbf{SM}(k)) = 0, \tag{19}$$

여기서 시스템 행렬 $\mathbf{SM}(k)$ 는 주파수 파라미터 k 의 함수이다. 음향 공동의 고유치는 식(19)를 만족하는 주파수 파라미터에 해당한다. 식(19)에 의해 구해진 고유치를 식(16)에 대입하면 고유 벡터가 구해지며, 이 고유벡터의 성분들을 식(4)에 대입하면 음향 모드 형상을 구할 수 있다.

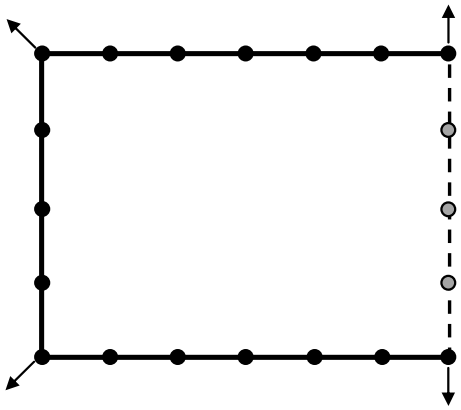

Fig. 2 Rectangular acoustic cavity discretized with 20 nodes (solid line: rigid-wall boundary, dotted line: open boundary).

3. 검증 예제

본 논문에서 제안된 방법의 타당성을 검증하기 위해 Fig. 2와 같은 가로 1.2m, 세로 0.9m의 직사각형 음향 공동이 고려된다. 이 음향 공동의 우측은 개방 경계를 가지고 있으며 Fig. 2에서 점선으로 표시되어 있다. Fig. 2에서와 같이 음향 공동의 전체 경계는 총 20개의 노드들로 이산화했으며, 개방 경계는 3개의 노드로, 강체벽 경계는 17개의 노드로 이산화했다. 직사각형 음향 공동의 네 군데 코너에서의 법선 방향은 Fig. 2에서 화살표로 표시되었다.

식(19)를 이용하여 제안된 방법에 의해 구해진 고유치는 Table 1의 첫 번째 열에 요약되었다. 이 결과를 엄밀해(exact solution)와 비교해보면, 제안된 방법이 첫 번째 고유치를 제외하고는 아주 정확한 결과를 제공함을 확인할 수 있다. 반면에 1271개의 많은 노드를 사용한 FEM 해석 결과는 제안된 방법에 비해 상대적으로 정밀도가 많이 떨어짐을 알 수 있다. 그리고 제안된 방법이 첫 번째 고유치를 구하지 못하는 원인은 향후 연구에서 밝혀질 계획이다.

한편, 제안된 방법에 의해 구해진 고유치들 속에는 잉여 고유치(spurious eigenvalues) SP1과 SP2가 포함되어 있다. 이 고유치들은 음향 공동의 전체 경계가 개방 경계일 때의 고유치에 해당함이 확인되었다. 향후 연구에서 잉여 고유치를 제거할 수 있는 방안에 대한 연구도 수행될 예정이다.

Table 1 Eigenvalues of the rectangular acoustic cavity

	Proposed method	exact solution	FEM (ANSYS)
1	-	1.309	1.308
2	3.728	3.728	3.729
3	3.927	3.927	3.926
4	5.254	5.254	5.253
SP1	6.293		
5	6.545	6.545	6.551
6	7.103	7.103	7.115
7	7.425	7.418	7.419
SP2	7.456		
8	8.010	8.010	8.019
9	9.165	9.163	9.185

4. 결 론

본 논문에서는 개방 경계와 강체벽 경계로 구성된 혼합 경계를 가진 음향 공동에 대한 NDIF법 이론을 정립하였다. 정립된 이론의 타당성을 보여주기 위한 예제 연구에서 제안된 방법이 유한요소법 보다 정확하며, 엄밀해에 거의 수렴한 값을 제공함이 확인되었다.

참 고 문 헌

(1) Bathe, K., 1982, Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, New Jersey.

(2) Brebbia, C. A., Telles, J. C. F. and Wrobel, L. C., 1984, Boundary Element Techniques, Springer-Verlag, New York.

(3) Kang, S. W. and Lee, J. M., 2000, “Eigenmode analysis of arbitrarily shaped two-dimensional cavities by the method of point-matching,” Journal of the Acoustical Society of America, 107(3), 1153~1160.

(4) Kinsler, L. E., 1980, Fundamentals of Acoustics, Wiley.