

# 집중질량을 갖는 회전중심방향 자유단 외팔보의 진동해석 Vibration Analysis of Rotating Inward Cantilever Beams With a Tip-Mass

이건호 ‡ · 유흥희 †  
Gun Ho Lee, Hong Hee Yoo

**Key Words** : Vibration Analysis(진동 해석), Rotating Inward cantilever beam(회전중심방향 자유단 외팔보), Euler-Bernoulli beam theory(오일러-베르누이 보 이론) Hybrid Deformation Variable Modeling(복합 변형 변수를 이용한 모델링), Tip-Mass(집중질량)

## ABSTRACT

The Vibration Analysis of Rotating Inward Beams Considering The Tip-Mass is presented based on Euler-Bernoulli beam theory. The frequency equations, which are coupled through gyroscopic coupling terms, are calculated using hybrid deformation variable modeling along with the Rayleigh-Ritz assumed mode methods. In this study, resulting system of ordinary differential equations shows the effects of angular speed, and Young's modulus ratio. It is believed that the results will be a reference with which other researchers and commercial FE analysis program, ANSYS can compare their results.

## 1. 서 론

회전중심방향 자유단 외팔보는 터보팬, 믹싱 터보팬 엔진에 활용되고 있다. 이러한 원심력을 받는 구조물의 동적 안정성과 진동에 관한 연구는 기계공학, 항공우주공학 분야에서 연구자들의 관심의 대상이 되어왔고, 회전 운동이 진동특성의 변화에 미치는 영향을 예측하기 위한 연구가 많이 이루어져 왔다<sup>(1-4)</sup>.

회전중심방향 자유단 외팔보와 같은 구조물의 진동특성에 대한 연구는 Southwell<sup>(5)</sup>에 의해 시작되었다. 그는 회전운동에 따른 외팔보의 고유진동수 변화를 계산할 수 있도록 모델을 제시하였고, 그 후 Schilhan<sup>(6)</sup>은 회전 외팔보의 굽힘 진동방정식을 유도하고 이에 Ritz방법을 통해 Southwell 방정식의 정확성을 확인하였다. 1970년대를 거치며 전산기의

발전과 더불어 종래의 해석적 방법을 떠나 수치적인 방법으로 진동해석을 하려는 연구 결과들이 등장하게 되었다. 이 방법들은 고유진동수를 더 정확하게 구할 수 있게 되었고, 현재까지 연구들이 활발하게 이루어지고 있다<sup>(7-9)</sup>.

본 논문은 회전중심방향 자유단 외팔보의 진동에 관한 연구이다. 그에 관련된 연구는 N.Mostaghel와 I.Tadjbakhsh<sup>(10)</sup>가 1973년에 최초로 수행하였다. 그 후 C.H.J. Fox<sup>(11)</sup>는 1985년에 선행 연구에 초기 장작각을 추가하여 중심축을 향하는 자유단 외팔보의 연구로 발전시켰다. 본 논문은 기존에 다루지 않았던 선형 운동방정식을 얻기 위해 복합 변형 변수를 정의하였고, 집중질량을 추가하여 Kane의 방법을 이용하여 유도하였다.

## 2. 운동방정식

이 절에서 사용된 복합변형 변수를 이용한 동적 모델링에 의한 운동방정식 유도과정을 참고문헌을 참조할 수 있다<sup>(11-12)</sup>. Fig. 1는 반경  $r$ 의 디스크에 고정되어 평면에서  $\hat{a}_3$  방향으로  $\Omega$  만큼 회전 운동하는 외팔보를 보여준다. 디스크 축에 부착된 서로 수직인  $s$ 는 외팔보 중립축의 임의 점에서 보가 인장된 길이를 나타낸다.

† 교신저자; 정희원, 한양대학교 기계공학부  
E-mail : hhyoo@hanyang.ac.kr  
Tel : (02) 2220-0446, Fax : (02) 2293-5070  
‡ 발표자; 한양대학교 대학원 융합기계공학과

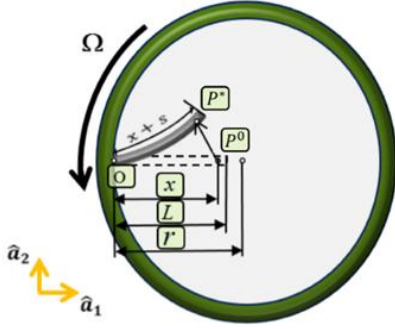


Fig. 1 Rotating Inward Beams Considering The Tip-Mass

$L$  은 빔의 길이를 이고  $P_0$  는 변형 후  $x+s$  의 길이를 갖는  $P^*$  의 위치로 이동된다. 집중질량은 자유단방향 끝 단에 고정되어 있으며  $O$  의 속도벡터  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  방향 스칼라의 구성요소는 (1)과(2)로 정의된다.

$$\bar{\omega}^A = \omega_3 \bar{a}_3 \quad (1)$$

$$\bar{v}^0 = -r\Omega \bar{a}_2 \quad (2)$$

인장방향 운동으로 간섭효과를 무시하는 가정에 운동방정식을 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij}^{11} \ddot{q}_{1j} - 2\omega M_{ij}^{12} \dot{q}_j + (K_{ij}^s - \omega^2 M_{ij}^{11}) q_j = P_i \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} [M_{ij}^{22} \ddot{q}_{1j} - 2\omega M_{ij}^{21} \dot{q}_j + (K_{ij}^{b2} + K_{ij}^{g2} - \omega^2 M_{ij}^{22}) q_j] = 0 \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} [M_{ij}^{33} \ddot{q}_{3j} + (K_{ij}^{G3} + K_{ij}^{B3}) \dot{q}_j] = 0 \quad (6)$$

여기서,

$$M_{ij}^{ab} \equiv \int_0^L \rho \phi_{ai} \phi_{bj} dx \quad (7)$$

$$M_{ij}^s \equiv \int_0^L EA \phi_{i,x} \phi_{j,x} dx \quad (8)$$

$$K_{ij}^{b2} \equiv \int_0^L EI_3 \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \quad (9)$$

$$K_{ij}^{b3} \equiv \int_0^L EI_2 \phi_{3i,xx} \phi_{3j,xx} dx \quad (10)$$

$$K_{ij}^{g2} \equiv r\Omega^2 \left[ \int_0^L \rho(L-x) \phi_{ai}' \phi_{aj}' dx \right] + \Omega^2 \left[ \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{2i,x} \phi_{2j,x} dx \right] \quad (11)$$

$$K_{ij}^{g3} \equiv r\Omega^2 \left[ \int_0^L \rho(L-x) \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \right] + \Omega^2 \left[ \int_0^L \frac{\rho}{2} (L^2 - x^2) \phi_{3i,x} \phi_{3j,x} dx \right] \quad (12)$$

$$P_i \equiv \Omega^2 \int_0^L \rho x \phi_{1i} dx + \gamma \Omega_3^2 \int_0^L \rho \phi_{1i} dx \quad (13)$$

유도된 운동방정식, 식 (4-5)을 무차원화 하기 위해 다음과 같이 시간과 공간 그리고 일반좌표 변수들을 무차원화 한다.

$$g_{ai} \equiv \frac{q_{ai}}{l}, \quad \delta \equiv \frac{r}{L}, \quad \alpha \equiv \frac{m}{\rho L}, \quad \beta \equiv \frac{a}{L}, \quad \gamma \equiv \Omega T \quad (14)$$

식 (14)에서  $T$  는 다음과 같이 정의되는 변수이다.

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho_0 l^4}{EI_3}} \quad (15)$$

식 (14-15)을 사용하여 정리한 운동방정식을 다음과 같이 무차원 형태로 나타낼수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left[ \left\{ \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi + \alpha \varphi_i(\beta) \varphi_j(\beta) \right\} \ddot{g}_j + \left( \int_0^1 \varphi_{i,\xi\xi} \varphi_{j,\xi\xi} d\xi \right) g_j + \gamma^2 \left\{ \delta \int_0^1 (1-\xi) \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\xi + \alpha(\beta + \delta) \int_0^\beta \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\xi \vartheta + \frac{1}{2} \delta \int_0^1 (1-\xi^2) \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\xi - \int_0^1 \varphi_i \varphi_j d\xi \right\} g_j \right] = 0 \quad (16)$$

### 3. 결 론

$$(\alpha = 1, \beta = 1, \kappa = 0.0025)$$

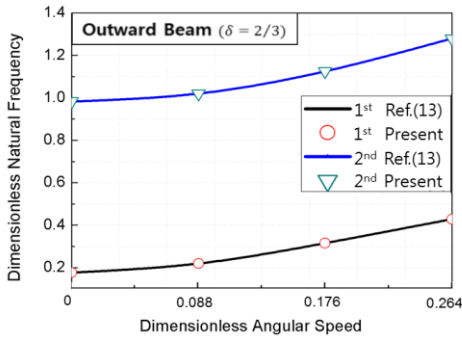


Fig. 2 Natural frequency variation vs angular speed

$$(\alpha = 1, \beta = 1, \kappa = 0.0025)$$

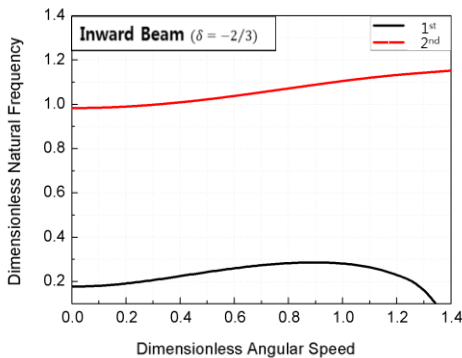


Fig. 3 Natural frequency variation vs angular speed

집중질량을 갖는 회전중심방향 자유단 외팔보진동 특성을 알아보았다. 결과값 검증 하기 앞서 Fig.2은 결과값의 신뢰를 높이기 위해 기존 집중질량을 갖는 회전외팔보 결과값과<sup>(13)</sup> 본 논문에서 구한 값을 비교해보았다. 그 후 Fig.3 에서는 본 논문에서 제시한 결과값을 사용하여 결과 값을 구하였으며 각속도가 무차원 각속도 1이였을 때 까지 고유진동수가 높아지는 것을 알 수 있으며 무차원 각속도가 1.34 이였을 때 좌굴 현상이 일어나는 것을 알 수 있다. 이 해석결과들은 앞으로 이 분야의 비교연구를 위한 기준 자료로 사용될 수 있을 것으로 사료된다.

### 후 기

본 연구는 2011년도 산업통상자원부의 재원으로

한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다. (No.20111510100050)

### 참 고 문 헌

- (1) C.H.J. Fox., 1979, The Natural Frequencies of a Thin Rotating Cantilever with Offset Root, *Journal of Sound Vibration*, Volume 65(2), Pages 151-158.
- (2) C.H.J. Fox., 1985, The free vibration of compact rotating radial cantilevers, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 98, Issue 3, Pages 325-336
- (3) S. Naguleswaran., 1994, Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam, *Journal of Sound Vibration*, Volume 176(5), Pages 613-624.
- (4) O. Turhan and G. Bulut., 2005, On nonlinear vibrations of a rotating beam, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 322, Pages 314-335
- (5) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades," *British A.R.C Reports and Memoranda No. 766*.
- (6) Schihansl, M., 1958, " Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam," *J. of Appl. Mech. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs*, 25, Pages 28-30
- (7) 유흥희., 1992, 회전 외팔보의 굽힘 진동해석, *대한기계학회논문집*, 제16권 제5호, Pages 891-898
- (8) 유흥희., 1995, 회전 외팔보의 면외방향 굽힘 진동해석, *대한기계학회논문집*, 제19권 제2호, Pages 348-353
- (9) 신상하., 1996, 인장-굽힘 운동간 연성효과를 고려한 회전 외팔보의 진동해석, *한국항공우주학회*, 제24권 제2호, Pages 77-84
- (10) N. Mostaghel, I. Tadjbakhsh., 1973, Buckling of rotating rods and plates, *International Journal of Mechanical Sciences*, Volume 15, Issue 6 Pages 429-434
- (11) Kane., T, and Levinson, D., 1985, *Dynamics : Theory and Applications*, McGraw-Hill Book co., NewYork, N.Y
- (12) 유흥희., 1991, 회전 구조물의 Hybrid 변형 변수를 이용한 선형 동적 모델링, *한국항공우주학회*, 제9권 제3호, Pages 32-39
- (13) 유흥희., 1996, 집중질량의 영향을 고려한 회전 외팔보의 진동해석, *대한기계학회논문집*, 제20권 제8호, Pages 2516-2523