

# 티모센코 보 이론에 따른 초기 비틀림각을 갖는 경사기능재 블레이드의 진동 해석

## Vibration Analysis of Pre-twisted Blades with Functionally Graded Material Properties Based on Timoshenko Beam Theory

유홍희† · 오유탉‡

Hong Hee Yoo and Yutaek Oh

**Key Words :** Bending vibration (굽힘진동), Pre-twist angle (초기 비틀림각), Functionally graded material (경사기능재료), Timoshenko beam theory (티모센코 보 이론), Natural Frequency (고유진동수)

### ABSTRACT

Equations of motion for the vibration analysis of rotating pre-twisted beams with functionally graded material properties are derived in this paper. Based on Timoshenko beam theory, the effects of shear and rotary inertia are considered. The pre-twisted beam has a rectangular cross-section and is mounted on a rotating rigid hub with a setting angle. Functionally graded material (FGM) properties are considered along the height direction of the beam. The equations of stretching and bending motion are derived by Kane's method employing hybrid deformation variables. To validate the derived equations, natural frequencies of a rotating FGM pre-twisted beam are compared to those obtained by a commercial software ANSYS. The effects of the pre-twisted angle, slenderness ratio, hub radius, volume fraction exponent, and angular speed on the modal characteristics of the system are investigated with the proposed model.

### 1. 서 론

터빈 블레이드나 헬리콥터 날개 등 많은 기계 구조물들은 회전하는 유연체 빔과 그 빔이 부착되어 있는 강체 허브로 이루어진 시스템으로 모델링 할 수 있다. 대부분의 경우, 이러한 구조물들은 공기역학적인 성능을 향상시키기 위해 단순한 직선 형태의 빔 형상이 아니라, 초기 비틀림 형상을 갖거나 장착각을 갖게 된다. 게다가, 이러한 구조들이 고온의 환경에서 작동할 경우 온도에 대한 내구성을 증가시키기 위해 경사기능재(Functionally graded material, FGM)로 제작하는 경우가 최근에 늘어나

고 있다. 이러한 복잡한 빔의 형상과 재료 물성 변화는 시스템의 고유 진동 특성에 큰 영향을 미치게 되므로, 이러한 영향들을 고려한 진동 해석에 관한 연구가 필요하다.

경사기능재료란 일반적인 적층형 복합재와는 달리 그 재료의 물성이 연속적으로 변화하는 재료이며, 주로 내열성이 강한 세라믹과 강인성을 지닌 금속을 혼합하게 된다. 이렇듯 두 가지 재료의 장점을 동시에 지니면서 연속적으로 변화하는 물성 덕분에 일반 복합재에서 흔히 발생하는 박리 현상이 발생하지 않는 이점이 있어서 최근 들어 그 필요성이 증가하여 많은 연구자들로부터 연구의 대상이 되고 있는 추세이다.

본 연구에서는 초기 비틀림각을 갖는 경사기능재 블레이드의 변형에너지를 얻기 위해 참고문헌<sup>(1), (2)</sup>에서 제시된 하이브리드 변형변수를 도입하였고, Kane's method<sup>(3)</sup>를 이용하여 운동방정식을 유도

† Corresponding Author; Member, Department of Mechanical Convergence Engineering, Hanyang University  
E-mail : hhyoo57@gmail.com

Tel : +82-2-2220-0446 , Fax : +82-2-2293-5070

‡ Member; Department of Mechanical convergence Engineering, Hanyang University

하였다. 본 방법은 블레이드의 회전에 의한 강성변화 효과를 선형 운동방정식을 통해서도 구현할 수 있는 장점이 있다. 티모셴코 보 이론에 따라 전단과 회전 관성에 의한 영향을 고려하였으며, 제안한 모델을 이용하여 초기 비틀림각, 세장비, 부피분율지수에 따라 시스템의 고유진동 특성이 어떻게 변하는지를 조사하였다.

## 2. 운동방정식

### 2.1 경사기능재료 물성

본 연구에서 사용하는 재료는 경사기능재료로 단면의 바깥쪽은 온도에 저항력을 갖는 세라믹, 안쪽은 강인성을 지닌 금속의 물성을 갖도록 하였으며, 두께 방향에 따른 재료의 물성은 아래와 같다.

$$P(z) = (P_m - P_c) \left| \frac{2z}{h} \right|^{1/n} + P_c$$

이 때  $P_m$  과  $P_c$  는 각각 금속과 세라믹의 물성치를 나타내며, 본 연구에서 사용한 값은 Table 1에 제시되어 있다. 또한  $n$  은 부피분율 지수이며 세라믹의 메탈에 대한 부피분율을 의미함과 동시에 물성의 분포를 결정하는 파라미터이다. 즉, 세라믹과 메탈의 부피비가  $n:1$  이며,  $n$  이 클수록 단면의 바깥쪽으로 감에 따라 세라믹으로 빠르게 물성이 바뀌게 된다. 또한  $n=0$  이면 금속의 물성을 나타내며,  $n \rightarrow \infty$  이면 세라믹의 물성을 나타낸다.

Table 1 Metal and Ceramic properties

	Material	Modulus of elasticity ( $E$ )	Density ( $\rho$ )	Shear modulus ( $G$ )
Metal	Stainless steel	201.04 GPa	8166 kg/m <sup>3</sup>	75.796 GPa
Ceramic	Silicon Nitride	348.43 GPa	2370 kg/m <sup>3</sup>	140.496 GPa

### 2.2 운동방정식

Kane's method 에 따라 아래와 같이 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$\int_0^L \left( \frac{\partial \bar{\omega}^{dB}}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \left( \frac{d\bar{\omega}^{dB}}{dt} \right) \cdot \ddot{I} + \bar{\omega}^{dB} \times \dot{I} \cdot \bar{\omega}^{dB} dx + \int_0^L \rho^* \left( \frac{\partial \bar{v}^P}{\partial \dot{q}_i} \right) \cdot \left( \frac{d\bar{v}^P}{dt} \right) dx + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad (i=1, \dots, \mu)$$

좌변의 첫 번째 항과 두 번째 항은 일반관성력, 세 번째항은 일반작용력이며, 특히 첫 번째 항에는 회전 관성에 의한 영향이 포함되어 있다.

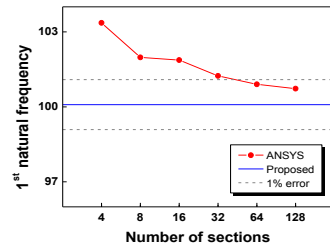


Figure 1 The 1<sup>st</sup> natural frequencies of the system compared to those obtained from ANSYS

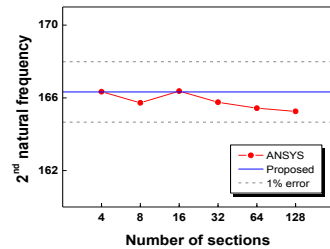


Figure 2 The 2<sup>nd</sup> natural frequencies of the system compared to those obtained from ANSYS

## 3. 수치 해석

Fig. 1과 Fig. 2는 제안된 모델을 통해 임의의 경우 ( $L=1m, b=6cm, h=3cm, \theta=90^\circ, n=1$ ) 에 대해 얻어낸 1차와 2차 고유진동수를 구조해석 상용 소프트웨어인 ANSYS의 해석 결과와 비교하여 나타낸 그래프이다. ANSYS에서는 빔 요소의 단면을 유한 개의 물성층으로 나눈 다음 그 층수를 늘려감에 따라서 연속적인 물성에 수렴한다는 것을 확인할 수 있다. Fig. 1의 1차 고유진동수의 경우는 층수가 작을 때는 어느 정도 오차를 가지다가 층수가 증가할수록 점점 수렴하는 데 반해서 Fig. 2의 2차고유

진동수의 경우는 층수에 관계없이 적은 오차를 가지는 것을 확인할 수 있다. 그 이유는 1차 고유모드가 주로 면외방향 굽힘 성분을 가지고 있는데 반해 2차 고유모드는 면내방향 굽힘 성분을 가지고 있다. 그런데 변형에너지를 통해서 등가물성을 계산해보면, 면내방향의 물성은 층수와 관계없이 일정한 반면에 면외방향의 경우 적은 층수에서는 단면의 바깥쪽에 분포한 세라믹의 물성치의 영향이 연속적인 물성을 가질 때 보다 더 크게 나타나기 때문이다.

#### 4. 결 론

본 연구에서는 티모셴코 보 이론에 따른 초기 비틀림각을 갖는 경사기능재 회전 블레이드의 진동 해석을 위한 운동방정식을 유도하였고 이를 이용하여 진동 해석을 수행하였다. 해석 결과는 구조해석 상용 소프트웨어인 ANSYS의 결과와 비교하여 검증하였다. 또한 일반적인 결론을 얻기 위해 제안한 운동방정식을 무차원화하였으며, 빔의 세장비, 초기 비틀림각, 부피분율 지수, 허브 반경비와 같은 무차원 변수가 진동해석에 미치는 영향을 알아보았다. 균일물성의 블레이드일 경우 세장비가 어느 이상일 경우 전단에 의한 효과가 거의 없는 반면 경사기능재 블레이드의 경우 전단 효과를 무시할 수 없음을 알 수 있었다.

#### 후 기

본 연구는 2011년도 산업통상자원부의 재원으로 한국에너지기술평가원(KETEP)의 지원을 받아 수행한 연구 과제입니다. (No. 20111510100050)

#### 참 고 문 헌

- (1) Yoo, H. H., Ryan, R. R. and Scott, R. A., 1995, Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions, *Journal of Sound and Vibration* 181(2), pp. 261~278.
- (2) Yoo, H. H., Shin, S., 1998, Vibration analysis of rotating cantilever beams, *Journal of Sound and Vibration* 212, pp. 807~828.
- (3) Lee, J. H. and Yoo, H. H., 2010, Vibration Analysis of Rotating Blades with the Cross Section Taper Considering the Pre-twist Angle and the Setting Angle, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*. Vol. 20, No. 1, pp. 10~21.

- (4) Lee, K. B. and Yoo, H. H., 2013, Free Vibration Analysis of a Rotating Cantilever Beam Made-up of Functionally Graded Materials, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*. Vol. 23, No. 8, pp. 742~751.

- (5) Kane, T., Levinson, D., 1985, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill, New York.