

# 차수감소모델의 신뢰성 예측

## Reliability estimation of reduced-order models

김진균 \* · 이필승 †

Jin-Gyun Kim, Phill-Seung Lee

### 1. 서 론

차수감소기법(model reduction method)은 유한요소모델의 자유도를 효과적으로 감소시키기 위해 개발되었다. 이를 이용하면 수치 해석에 소요되는 시간과 재원을 크게 줄일 수 있기 때문에 구조물의 설계 및 해석에 널리 이용되고 있다. 차수감소모델(reduced-order model)의 신뢰성은 원래의 유한요소모델에서 얻어진 정확한 고유치( $\lambda_i$ )와 차수감소모델에서 얻어진 근사한 고유치( $\bar{\lambda}_i$ )의 상대오차를 이용해 판단하는 것이 일반적이다. 하지만 이를 위해서는 원래 유한요소모델의 고유치 문제를 풀어야 하는 문제가 있다. 따라서 본 연구에서는  $\lambda_i$ 를 계산하지 않고 상대오차를 판단할 수 있는 신뢰성 예측 기술을 개발하였다.

### 2. 차수감소기법

원래의 유한요소모델(original FE model)의 고유치 문제는 다음과 같다.

$$\mathbf{K}_g(\boldsymbol{\varphi}_g)_i = \lambda_i \mathbf{M}_g(\boldsymbol{\varphi}_g)_i. \quad (1)$$

대표적인 차수감소기법인 Guyan 축소법과<sup>(1)</sup> Craig-Bampton (CB) 법은<sup>(2)</sup> 모두 변환행렬( $\mathbf{T}_0$ )을 이용해 차수감소모델을 만든다.

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{M}_g \mathbf{T}_0, \quad \bar{\mathbf{K}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_g \mathbf{T}_0. \quad (2)$$

Guyan 축소법에서 세부행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

† 정회원, 한국과학기술원 해양시스템공학전공  
E-mail : phillseung@kaist.edu  
Tel : 042-350-1512, Fax : 042-350-1510

\* 한국과학기술원 해양시스템공학전공

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

여기서 아래첨자 1은 주자유도를, 2는 그 외의 자유도를 의미한다. CB 법에서 세부행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{M}_c \\ \mathbf{M}_c^T & \mathbf{M}_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_c^T & \mathbf{K}_b \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_d & -\mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_c \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

이때 아래첨자  $s$ ,  $b$ ,  $c$ 는 부구조, 경계면, 연결부를 의미하며,  $\boldsymbol{\Phi}_d$ 와  $\mathbf{I}$ 는 부구조의 주고유벡터 행렬과 단위행렬을 의미한다.

이를 이용하면 차수감소모델의 고유치 문제를 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$\bar{\mathbf{K}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}})_i = \bar{\lambda}_i \bar{\mathbf{M}}(\bar{\boldsymbol{\varphi}})_i, \quad (\bar{\boldsymbol{\varphi}}_g)_i = \mathbf{T}_0(\boldsymbol{\varphi}_g)_i. \quad (5)$$

### 3. 신뢰성 예측

식 (1)의 고유치 문제는 식 (6.1)과 같이 표현될 수 있으며, 고유벡터( $\boldsymbol{\varphi}_g$ )는 식 (6.2)와 같이 근사고유벡터( $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_g$ )와 오차( $\delta\boldsymbol{\varphi}$ )로 표현할 수 있다.

$$\frac{1}{\lambda_i} (\boldsymbol{\varphi}_g)_i^T \mathbf{K}_g (\boldsymbol{\varphi}_g)_i = (\boldsymbol{\varphi}_g)_i^T \mathbf{M}_g (\boldsymbol{\varphi}_g)_i, \quad (6.1)$$

$$(\boldsymbol{\varphi}_g)_i = (\bar{\boldsymbol{\varphi}}_g)_i + (\delta\boldsymbol{\varphi})_i. \quad (6.2)$$

식 (5)에서 정의된  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}_g$ 는 보다 정밀한 변환행렬( $\mathbf{T}_1$ )을 이용해 재정의 될 수 있다.

$$(\bar{\boldsymbol{\varphi}}_g)_i = \mathbf{T}_1(\bar{\boldsymbol{\varphi}})_i, \quad \mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0 + \mathbf{T}_r. \quad (7)$$

이때  $\mathbf{T}_r$ 은 Guyan 축소법과 CB법에서 각각 식 (8.1)과 (8.2)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \lambda \left[ \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} - \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{22} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{K}_{21} \right] \\ + \lambda^2 \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{22} \mathbf{K}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \end{bmatrix}, \quad (8.1)$$

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \lambda \mathbf{F}_{rs} [-\mathbf{M}_s \mathbf{K}_s^{-1} \mathbf{K}_c + \mathbf{M}_c] \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{rs} = \mathbf{K}_s^{-1} - \Phi_d \Lambda_d^{-1} \Phi_d^T. \quad (8.2)$$

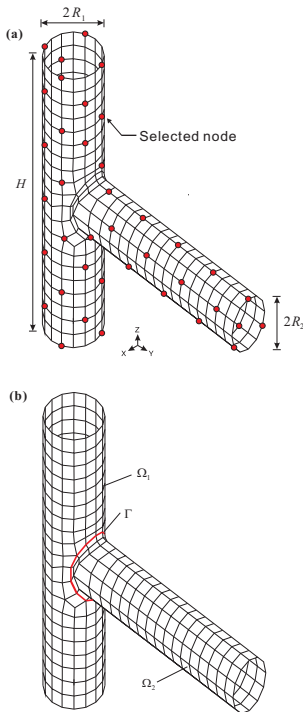
식 (6)~(8)를 이용하면, 고유치의 상대오차에 대한 근사식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\frac{\bar{\lambda}_i}{\lambda_i} - 1 \approx 2(\bar{\Phi})_i^T \mathbf{T}_0^T \left[ \mathbf{M}_g - \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{K}_g \right] \mathbf{T}_r (\bar{\Phi})_i + (\bar{\Phi})_i^T \mathbf{T}_r^T \left[ \mathbf{M}_g - \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{K}_g \right] \mathbf{T}_r (\bar{\Phi})_i. \quad (9)$$

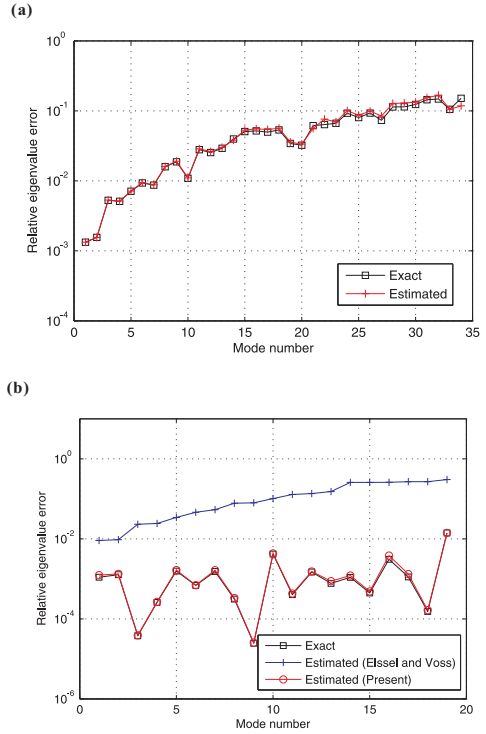
이를 이용하면 정확한 고유치( $\lambda_i$ )를 계산하지 않고 고유치의 상대오차를 근사할 수 있기 때문에, 차수감소모델의 신뢰성 평가를 위해 사용될 수 있다.

#### 4. 수치예제

Figure 1의 쉘 구조모델에<sup>(3)</sup> 식 (9)에서 정의된 상대오차 추정식을 적용하였다. 수치해석 결과는 개발된 추정식이 Guyan 축소법과 CB 법 모두에서 고유치의 상대오차를 상당히 정확하게 예측할 수 있음을 보여준다 (Figure 2).



**Figure 1.** An shaft-shaft problem. (a) selected nodes in Guyan reduction, (b) partitioned type in CB method.



**Figure 2.** Exact and estimated relative eigenvalue errors. (a) Guyan reduction, (b) CB method.

#### 5. 결론

본 연구에서는 차수감소기법이 적용된 유한요소모델의 신뢰성 예측 기술을 개발하였다. 개발된 신뢰성 예측 기술은 고유치의 상대오차를 매우 정확하게 근사할 수 있기 때문에, 이를 이용하면 행렬과 벡터의 연산만으로 간단하게 차수감소모델의 신뢰성을 판단할 수 있다. 수치예제를 통해 개발된 기법의 성능을 검증하였다.

#### 참고 문헌

- (1) Guyan, R., 1965, Reduction of stiffness and mass matrices, AIAA Journal. Vol.3, No.2, pp.380.
- (2) Craig, R.R. and Bampton, M.C.C., 1968, Coupling of substructures for dynamic analysis, AIAA Journal. Vol.6, No.7, pp.1313-1319.
- (3) Lee, Y.G., Yoon, K.H., Lee, P.S., 2012, Improving the MITC3 shell finite element by using the Hellinger-Reissner principle, Computers and Structures, Vol. 110-111, pp.93-106.